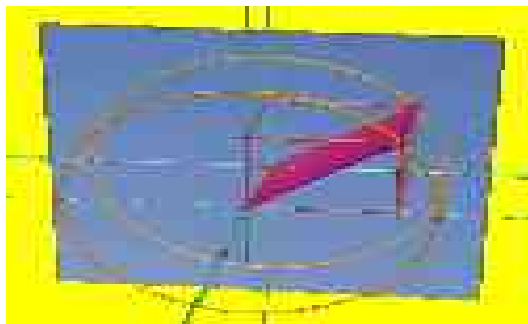


## TRIGONOMÉTRIE AVEC CABRI

Jean-Jacques DAHAN [jjdahan@wanadoo.fr](mailto:jjdahan@wanadoo.fr)

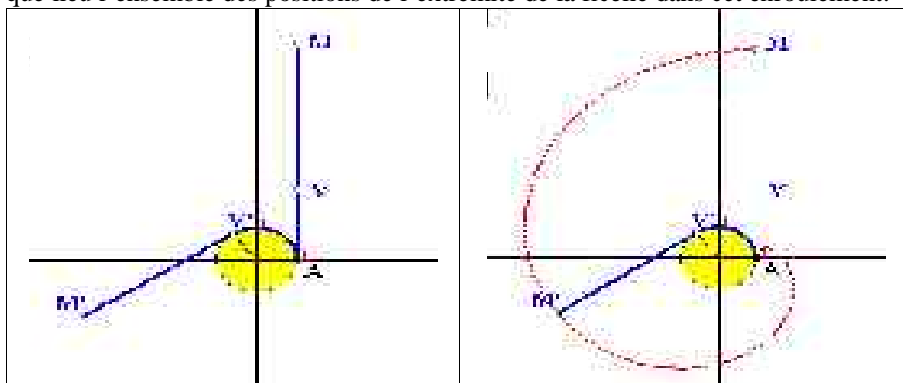
I.A.M. de Grenoble et I.R.E.M. de Toulouse



*fichier réalisé avec Cabri 3D : cercletrigo.cg3*

### 1. ENROULEMENT D'UN FIL AUTOUR DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

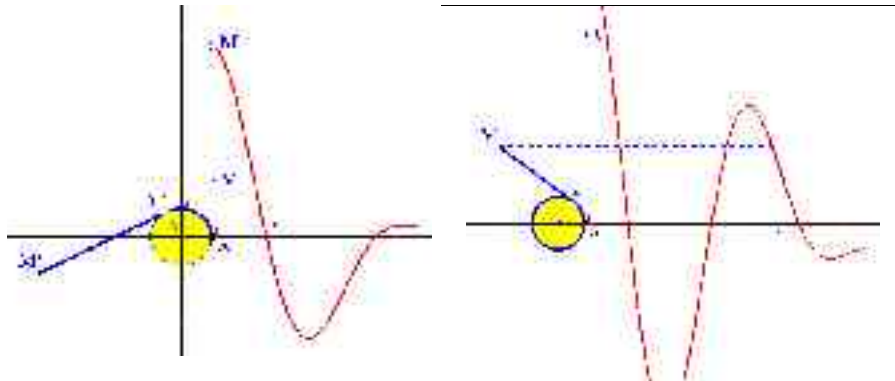
**1.1. Modélisation de cet enroulement :** un fichier est fourni qui permet de visualiser de manière dynamique cet enroulement et même de représenter en tant que lieu l'ensemble des positions de l'extrémité de la ficelle dans cet enroulement.



*enroufil.fig*

### 1.2. Visualisation d'une fonction annexe :

Il est encore aisé avec l'outil lieu de visualiser la courbe de la fonction qui à  $x = OA + AV$  fait correspondre l'ordonnée de  $M'$  (figure de gauche). On peut allonger la ficelle en tirant sur  $M$  pour voir la réactualisation de cette courbe (figure de droite).

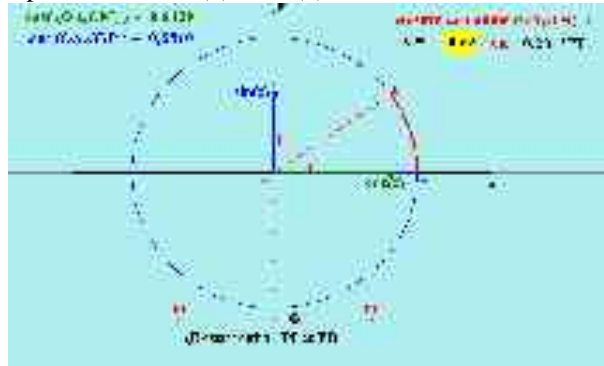


*enroufil.fig*

## 2. DÉFINITIONS DYNAMIQUES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

### 2.1. Définitions des lignes trigonométriques :

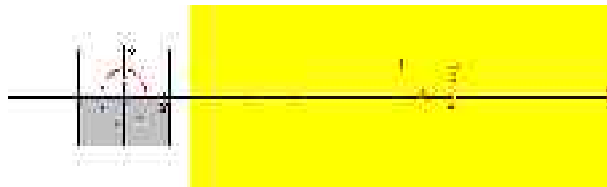
Dans le fichier qui suit la modification du nombre sur fond jaune (ici 0.61) qui représente une mesure de l'angle en radians, va provoquer le déplacement de M sur le cercle trigonométrique et les modifications des cosinus et sinus de cet angle qui représentent respectivement  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$



*definitionsccossin.fig*

### 2.2. Fonction cosinus

Un point symbolisant un réel  $x$  est créé sur l'axe des abscisses ; ce réel est reporté sur un cercle trigonométrique centré sur l'axe des abscisses (à partir du point unité de l'axe  $OX$ ). Le point M est créé comme sur la première figure ci dessous et son ordonnée est donc égale à  $\cos(x)$



*sinus.fig*

Le lieu des points M quand  $x$  varie sur l'axe des abscisses donne donc la courbe de la fonction cosinus qui est représentée ci-dessous



*sinus.fig*

### 2.3. Fonction sinus

Un travail analogue permet de représenter la courbe de la fonction sinus. Une petite astuce de construction permet d'obtenir cette courbe aussi simplement que la courbe précédente : cette astuce consiste en le positionnement du système d'axes (OX ;OY) attaché au cercle trigonométrique avec OX vertical et dirigé vers le haut.



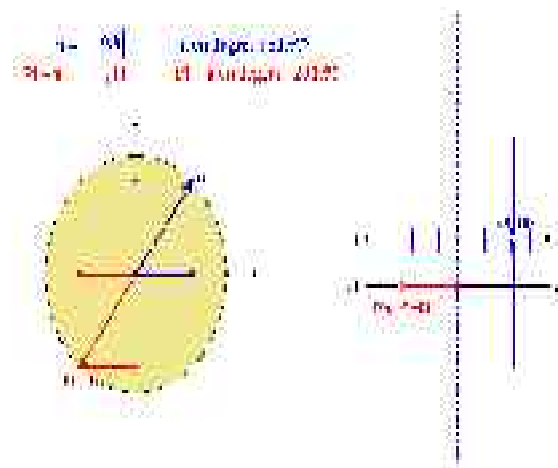
*cosinus.fig*



*cosinus.fig*

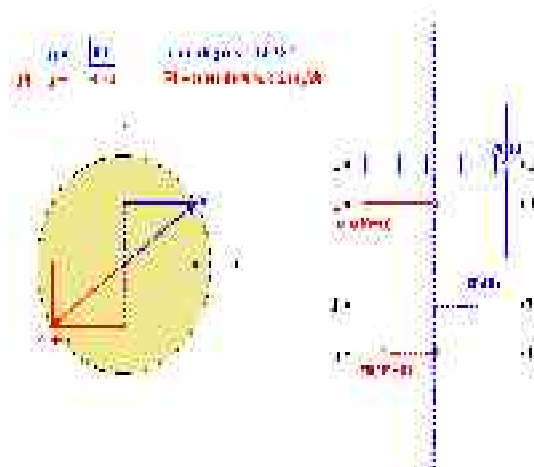
## 3. ILLUSTRATIONS DYNAMIQUES DE CERTAINES PROPRIÉTÉS

**3.1.  $\cos(\pi + u) = -\cos(u)$  :** la modification de la valeur de  $u$  sur le fichier suivant réactualise les positions des extrémités des arcs de mesures  $u$  et  $\pi + u$  sur le cercle trigonométrique. Le cadre vgraphique permet de visualiser la formule précitée en terme de symétrie. Sur la partie droite, les reports des deux cosinus envisagés sur deux droites graduées permet de conjecturer la même propriété dans le cadre numérique modélisé par la droite graduée.



*formules 1.fig*

**3.2.  $\sin(\pi + u) = -\sin(u)$  :** des constructions analogues permettent de compléter le fichier précédent comme suit. Celui-ci pourra être manipulé de manière analogue.



*formules 2.fig*

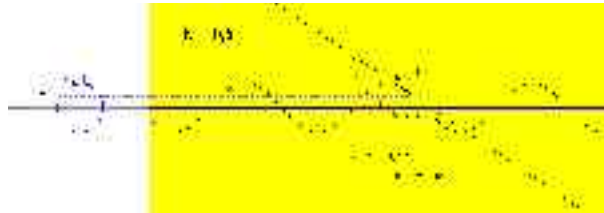
#### 4. DÉRIVATIONS DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

##### 4.1. Représentation d'une sécante à la courbe de la fonction sinus

(issue du point  $M(x ; \sin$

$(x))$ )

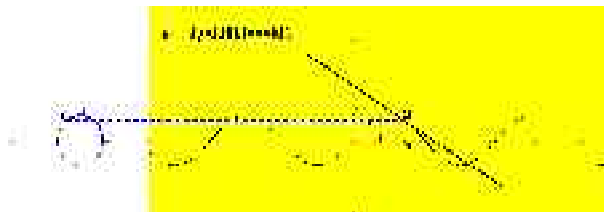
Si on utilise la construction initialement proposée pour les courbes des fonctions trigonométriques, on peut construire le point générique de la courbe  $M(x ; \sin(x))$  mais aussi le point de la courbe  $M(x+h ; \sin(x+h))$  où  $h$  est un réel qu'on peut modifier sur la page Cabri ci-dessous :



*sinder1.fig*

#### 4.2. Modélisation de la tangente et du nombre dérivée de la fonction sinus en un point

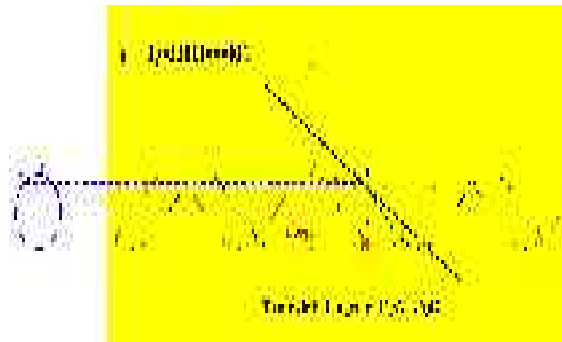
Si on choisit une très petite valeur de  $h$ , la sécante précédente modélise au mieux la tangente à notre courbe en son point d'abscisse  $x$  et la pente de cette sécante modélise donc le nombre dérivé de la fonction sinus en  $x$ .



*sinder2.fig*

#### 4.3 Courbe de la dérivée

Si on accepte notre sécante comme modèle de la tangente, sa pente sera un modèle du nombre dérivé et donc le point de coordonnées  $(x ; f'(x))$  sera le point générique de la courbe de la dérivée de la fonction sinus. Cette courbe apparaît ci-dessous en rouge ;



*sinder3.fig*

Il est aisé de conjecturer que cette courbe semble être la courbe de la fonction cosinus. Une validation dans l'environnement Cabri consistera à demander le tracer de la courbe de la fonction cosinus en utilisant les outils spécifiques de Cabri 2 Plus « Expression » et « Appliquer une expression »

Remarque : un travail analogue peut être fait pour la fonction cosinus.

## 5. PRIMITIVES DE LA FONCTION SINUS PAR LA MÉTHODE D'EULER

### 5.1. La macro « point suivant.mac » :

A partir d'un point M du plan on construit le point M' qui respecte les contraintes de la figure suivante



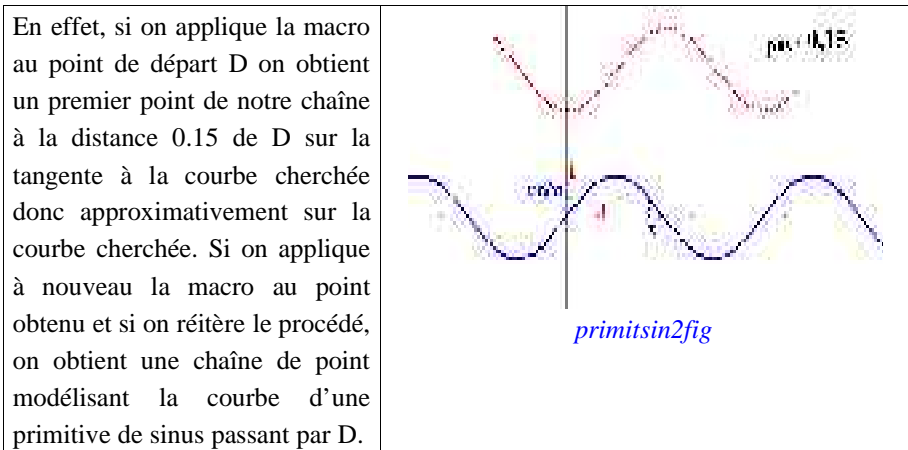
*primitsin1.fig*

Dans cette figure précédente le pas égal à 0.60, il représente la distance MM'.

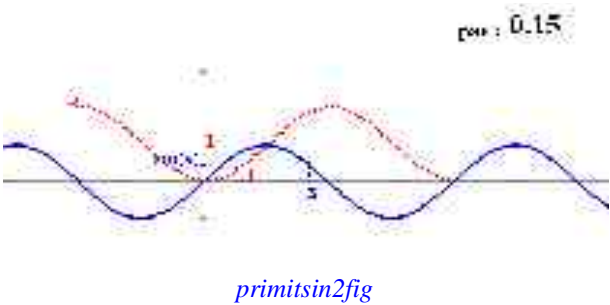
Lorsque le pas est choisi petit, on peut considérer que si M est un point situé sur la courbe d'une primitive de la fonction sinus, le point M' sera un point de cette même courbe (approximativement ! et l'approximation sera d'autant meilleure que ce pas sera petit). On enregistre la construction de M' à partir de M sous une macro appelée « Pt suivant.mac » qui est incluse dans le fichier *primitsin1.fig*.

L'application répétée de cette macro permettra de construire une chaîne de point modélisant une primitive de sinus d'autant mieux que le pas sera petit.

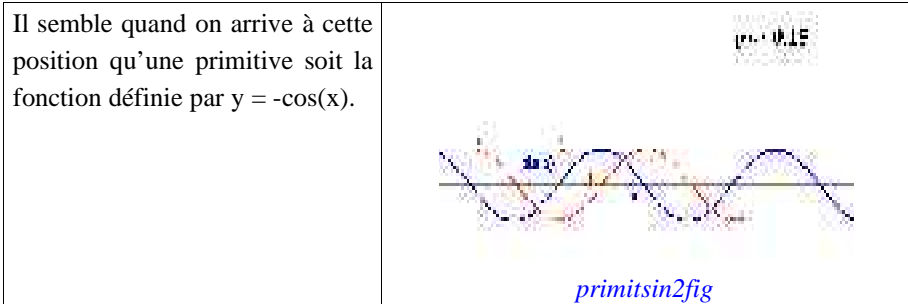
### 5.2. Modélisation d'une primitive par une chaîne de points (méthode d'Euler)

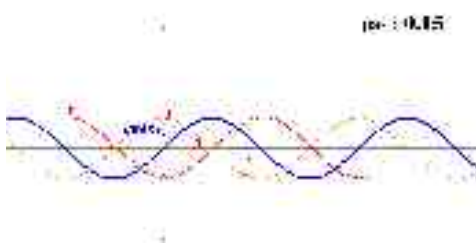


Ci-dessous, on s'est contenté de déplacer D et la chaîne a suivi ; on peut aisément conjecturer que toutes les primitives choisies se déduisent l'une de l'autre par l'addition d'une constante. On peut aussi constater que ces primitives semblent paires.



Si on continue l'exploration en tirant sur le point D, on peut obtenir une position de la chaîne qui peut être mise en relation avec une fonction trigonométrique connue.



<p>Cette conjecture est validée visuellement en construisant la courbe de la fonction cosinus et en remarquant que cette courbe semble bien être symétrique de notre chaîne de points.</p>	 <p><i>primitsin2fig</i></p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**NOTE :** chaque figure illustrative est accompagnée du nom du fichier Cabri d'où elle est issue ; chacun de ces fichiers est fournie avec des commentaires permettant de l'utiliser (utilisation par le professeur ou par les élèves

**IREM de Toulouse :** <http://www.irem.ups-tlse.fr> (aller ensuite sur la page du groupe de recherche de géométrie dynamique de Jean-Jacques Dahan puis visiter les conférences reliées par les boutons situés sur la droite de cette page)