

Le vingt et quelques voisins...

Daniel LIGNON

daniel.lignon@laposte.net

Congrès APMEP 2018

Bordeaux

Le vingt et quelques voisins...

20

20

C'est un nombre ***composé*** :

$$20 = 2^2 \times 5$$

Il admet 2 facteurs *premiers* et 6 *diviseurs*.

C'est un ***composé minimal*** :

aucun nombre *composé* ne peut être formé à partir de l'écriture décimale en ne gardant, dans le même ordre, que certains chiffres.

Il n'existe que 32 *composés minimaux* :

4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 27, 30, 32, 33, 35,
50, 51, 52, 55, 57, 70, 72, 75, 77, 111, 117, 171, 371,
711, 713 et 731.

20

20 est un ***nombre colombien*** : il n'est pas égal à la somme d'un autre nombre et des chiffres de cet autre nombre.

Par exemple : 19 n'est pas *colombien* car $19 = 14 + 1 + 4$.

Introduits en 1949 par le mathématicien indien
Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905-1988)
sous le nom d'***auto-nombres***.

Posé en 1973 dans une revue mathématique par un
enseignant colombien... d'où le nom...!

Il y a une infinité de *nombres colombiens*. Ceux inférieurs à 100 sont 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86 et 97.

Kaprekar

Dattatreya Ramachandra Kaprekar
(1905-1986).

Mathématicien indien qu'on peut qualifier d'amateur. Instituteur.

S'est intéressé à plusieurs problèmes de mathématiques récréatives :

nombres harshad, constantes de Kaprekar, nombres de Kaprekar, nombres colombiens...

Serait resté inconnu si **Martin Gardner** n'avait pas cité ses travaux en 1975. **Martin Gardner** (1914-2010) est l'auteur de la rubrique « *jeux mathématiques* » dans Scientific American.



20

20 est un ***nombre congruent*** :

Il est égal à l'aire d'un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels.

Les longueurs sont : $3, \frac{40}{3}$ et $\frac{41}{3}$!!

Après les travaux de **Diophante**, qui vécut à Alexandrie entre le I^{er} siècle av. J.-C. et le IV^e siècle, on trouve des exemples de *nombres congruents* dans les mathématiques arabes du Moyen Âge : **Al-Karaji** (953-1029) par exemple.

Leonardo Fibonacci (env. 1175-env. 1250) démontre que 5 et 7 sont *congruents*.

Pierre de Fermat (env. 1605-1665) montre en 1640 que 1 n'est pas un nombre *congruent*.

20

Il existe une infinité de *nombres congruents*.

On conjecture, entre autres, que le résultat suivant, vrai pour les nombres *premiers*, l'est pour tous les entiers :

si p est congru à 5 ou 7 modulo 8 (c'est-à-dire que le reste de p dans la division euclidienne par 8 est égal à 5 ou 7),
 p est un *nombre congruent*.

Cette conjecture est lié à la *conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer* sur les courbes elliptiques (résultat à 1 million de dollars...!)

Les premiers *nombres congruents* sont 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31...

On en connaît plus de 3 milliards...

20

Montrer qu'un nombre est *congruent*
est un problème difficile :

par exemple 157 est *congruent* car c'est l'aire du triangle
rectangle de côtés :

$$a = \frac{6803298487\ 8264350512\ 17540}{4113405192\ 2771614938\ 3203}$$

$$b = \frac{4113405192\ 2771614938\ 3203}{2166655569\ 3714761309\ 610}$$

$$c = \frac{2244035177\ 0433696992\ 4557513090\ 6748631609\ 48472041}{8912332268\ 9288595880\ 2553517896\ 7163570016\ 480830}$$

20

Il est *arithmétique* :

la moyenne arithmétique de ses *diviseurs* est un entier.

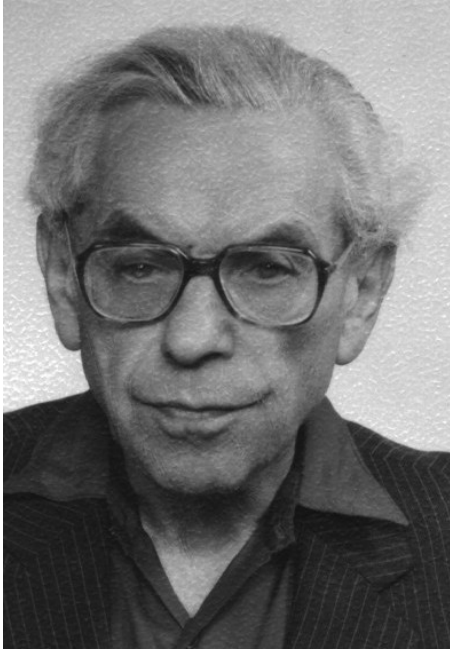
Les premiers *nombres arithmétiques* sont 1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37...

Il y en a beaucoup...

C'est le cas, par exemple, de tous les nombres premiers $\neq 2$.

D'après un résultat prouvé en 1980 par **Paul Bateman** (1919-2012), **Paul Erdős**, **Carl Pomerance**, né en 1944 et **Ernst Gabor Straus** (1922-1983), la densité asymptotique des *entiers arithmétiques* est égale à 1.

Paul Erdős



Hongrois (1913-1996), né à Budapest dans une famille d'origine juive.

Il disait de lui : « *Depuis mon plus jeune âge, j'ai toujours résisté automatiquement à la tentation de ressembler aux autres.* »

C'est le prince des « résolveurs de problèmes » et le monarque absolu des « poseurs de problèmes ».

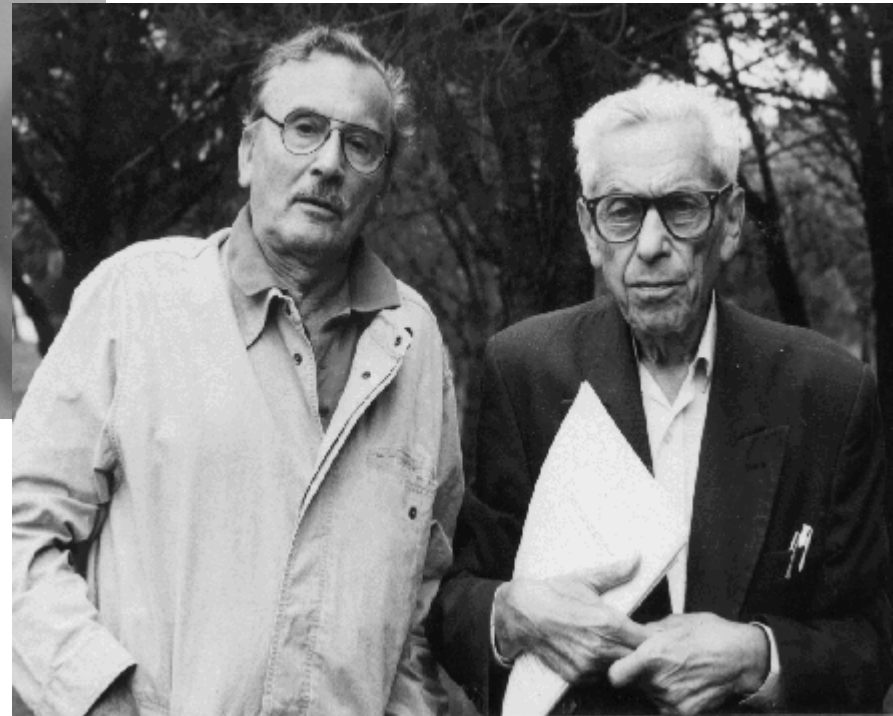
Désarmé devant les contraintes matérielles de la vie, il a parcouru le monde, muni d'une petite valise, et allait de congrès en séminaire, hébergé et aidé par ses amis mathématiciens avec qui il a écrit plus de 1500 articles.

Paul Erdős



À gauche, avec
Fan Graham

Avec Claude Berge



Pour approfondir :

- *Erdős, l'homme qui n'aimait que les nombres* de Paul Hoffman, éditions Belin – 2000
- Le film *Paul Erdos - N is a Number (1993)* sur Youtube.

Paul Erdős

Vu le nombre de collaborateurs d'**Erdős**, on a développé la notion de *nombre de Erdős* :

- si une personne a écrit un article de recherche avec **Erdős**, son *nombre de Erdős* vaut 1 ;
- si elle a écrit un article avec quelqu'un qui a un *nombre de Erdős* égal à 1, son *nombre de Erdős* est égal à 2 ;
- et ainsi de suite...

Nombre de Erdős = 1 : 504 personnes

Nombre de Erdős = 2 : 6593 personnes

Nombre de Erdős = 3 : 33 605 personnes

Plus de 270 000 personnes ont un *nombre* fini de *Erdős*...!!

Toutes les *médailles Fields* ont un *nombre de Erdős* ≤ 5

20

20 est un nombre ***abondant***...

Il est $<$ à la somme de ses *diviseurs stricts*.

Notion introduite (avec *parfait* et *déficient*) par **Nicomaque de Gérase**, mathématicien grec (I^{er}-II^e siècle).

Il y a une infinité de nombres *abondants* (densité $\approx 25\%$).

Les nombres *abondants* ≤ 100 sont 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96 et 100.

Le premier nombre *abondant* impair est 945.

Tout entier ≥ 20 peut s'écrire
comme une somme de deux nombres *abondants*.

20

20 est même *hautement abondant* :
la somme de ses *diviseurs* est supérieure à la somme des
diviseurs de n'importe quel entier inférieur à lui.

Notion introduite en 1943 par **Subbayya S. Pillai**,
mathématicien indien (1901-1950).

Elle a été reprise par **Leonidas Alaoglu**, mathématicien
canadien (1914-1981), et **Paul Erdős**.

Les premiers nombres *hautement abondants* sont 1, 2, 3, 4, 6,
8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 42, 48, 60, 72, 84, 90, 96,
108, 120, 144, 168, 180, 210, 216, 240...

20

Il y a une infinité de nombres *hautement abondants* mais leur densité dans l'ensemble des entiers est nulle.

Parmi les entiers $< 100\,000\,000$, il y a seulement 434 nombres *hautement abondants*.

Aussi bizarre que cela puisse paraître,
un nombre *hautement abondant*
(référence aux diviseurs)
n'est pas toujours *abondant*
(référence aux diviseurs stricts).

C'est le cas de 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 16.
Ce sont les seuls.

20

C'est un *nombre pratique* :
tout entier inférieur à lui peut s'écrire comme
une somme de ses *diviseurs stricts*.

Les premiers nombres *pratiques* sont 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18,
20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72...

Ils ont été introduits en 1948
par le mathématicien indien **A. K. Srinivasan**.
Néanmoins, leurs propriétés ont été utilisées en 1202 par
Leonardo Fibonacci (1180-1250) dans son livre *Liber Abaci*
à propos des « *fractions égyptiennes* ».

20

Il existe une infinité de *nombres pratiques*.
Mais **Paul Erdős** a démontré en 1950
que leur densité est nulle.

Ils partagent certaines propriétés avec les *nombres premiers*,
mais avec des démonstrations plus simples. Par exemple :
tout nombre pair est la somme de deux nombres pratiques
(identique à la **conjecture de Goldbach**)
il existe une infinité de couples de nombres pratiques de la
forme $(n, n + 2)$ (identique à la **conjecture des**
nombres premiers jumeaux).

Ces deux résultats ont été démontrés en 1996.

20

C'est le plus petit nombre qui, en ajoutant un chiffre à gauche ou à droite de son écriture en base 10, ne permet pas d'obtenir un *nombre premier*.

Les suivants sont 32, 62, 84, 114, 126, 134, 135, 146, 150, 164, 168, 176, 185, 192, 196, 204,...

C'est un ***nombre harshad*** :

il est divisible par la somme de ses chiffres.

En effet, 20 est divisible par $2+0 = 2$

Cette notion dépend, bien sûr, de la *base de numération*.

Si on ne précise pas, c'est la base 10.

20

Le mot *harshad* signifie « *donnant de la joie* » en sanscrit. Ces nombres ont aussi été introduits par le mathématicien indien **Dattatreya Ramachandra Kaprekar**.

Ils sont aussi appelés ***nombres de Niven***, du nom du mathématicien **Ivan Niven** (1915-1999) qui les a étudiés.

Les premiers *nombres harshad* sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102...

Ils semblent relativement nombreux...
mais leur densité est nulle.

20

On a démontré (en 1991) qu'on ne peut pas trouver plus de 20 *nombres harshad* consécutifs (en base b , plus de $2b$ *nombres harshad* consécutifs).

Par contre (en 1997), il existe une infinité de suites de 20 *nombres harshad* consécutifs (en base b , de $2b$ *nombres harshad* consécutifs).

La plus petite commence avec un nombre possédant 44 363 342 786 chiffres...!

Un nombre qui est *harshad* pour toutes les bases de numération est appelé un ***nombre harshad complet***.

Il n'en existe que quatre : 1, 2, 4 et 6.

20

C'est un nombre *brésilien* :

$$20 = \overline{22}_9$$

Un nombre n est *brésilien* si il existe une base de numération b , $1 < b < n-1$, dans laquelle il s'écrit en n'utilisant qu'un seul chiffre.

Ces nombres ont été introduits en 1994 lors de la neuvième Olympiade de mathématiques qui se déroulait au Brésil.

La condition $b < n-1$ est importante :

Pour n quelconque, si $b = n-1$, alors $n = \overline{11}_b$

20

Tout nombre pair $2p \geq 8$ est brésilien :

$$2p = 2(p-1) + 2 = \overline{22}_{(p-1)}$$

En conséquence, il existe une infinité
de nombres *brésiliens*...

mais on ne sait pas s'il existe une infinité
de nombres *premiers brésiliens*.

Il existe une infinité de nombres *non brésiliens* :
en effet, si p est un nombre *premier* $\neq 11$,
 p^2 n'est jamais *brésilien*.

De plus, si $n > 8$ n'est pas *brésilien*, c'est un nombre *premier*
ou le carré d'un nombre *premier*.

20

Le carré de la somme de ses chiffres est égal à la somme des chiffres de son carré :

$$(2 + 0)^2 = 4 + 0 + 0 \text{ avec } 20^2 = 400$$

Il y a une infinité de nombres vérifiant cette propriété.

Le cube de la somme de ses chiffres est égal à la somme des chiffres de son cube :

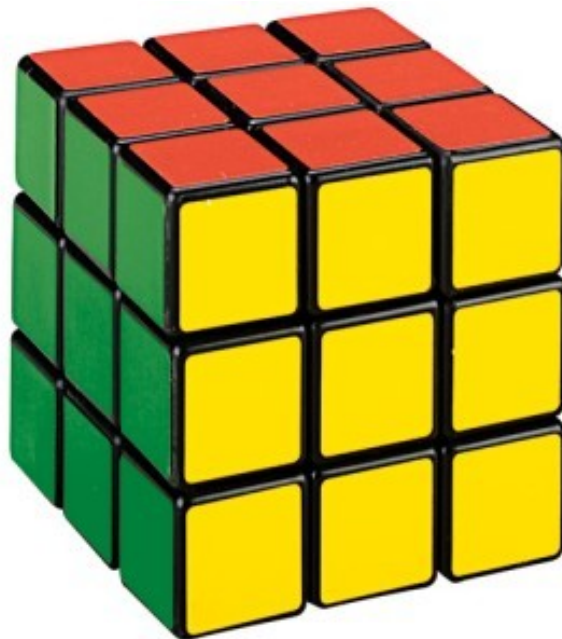
$$(2 + 0)^3 = 8 + 0 + 0 + 0 \text{ avec } 20^3 = 8\,000$$

Il y a une infinité de nombres vérifiant cette propriété.

Pour $n \geq 5$, à part les puissances de 10, il n'y a pas d'autre nombre tel que la puissance n^e de la somme de ses chiffres est égale à la somme des chiffres de sa puissance n^e .

20

C'est la valeur du « **nombre de Dieu** » pour le *Rubik's cube*, c'est-à-dire le *nombre maximal de mouvements* nécessaires avec l'algorithme le plus efficace pour retrouver la configuration initiale après mélange quelle que soit la position de départ.



Le Rubik's cube est un casse-tête inventé en 1974 par **Ernő Rubik**, commercialisé en 1980.

20

Auparavant, pour ce nombre de Dieu noté D ,
on avait l'encadrement :
 $20 \leq D \leq 25$

$D = 20$ est un résultat obtenu en 2010
après un calcul exhaustif de plusieurs semaines
sur des ordinateurs de Google
(équivalent de 35 ans de calculs sur un PC).

Il y a 43 252 003 274 489 856 000 = $4,3 \times 10^{19}$
configurations possibles...

Peu nécessitent 20 mouvements...

La moyenne est de 17,7 mouvements.

20

En utilisant une méthode relativement simple et avec de l'entraînement, on peut reconstituer la configuration d'origine en moins d'une minute...

Des compétitions sont organisées : les meilleurs sont capables de rétablir un cube en moins de dix secondes.

Le record officiel est de **4,22 secondes** : détenu par un australien **Feliks Zemdegs**, né en 1995, obtenu lors d'une compétition à Melbourne le 6 mai 2018

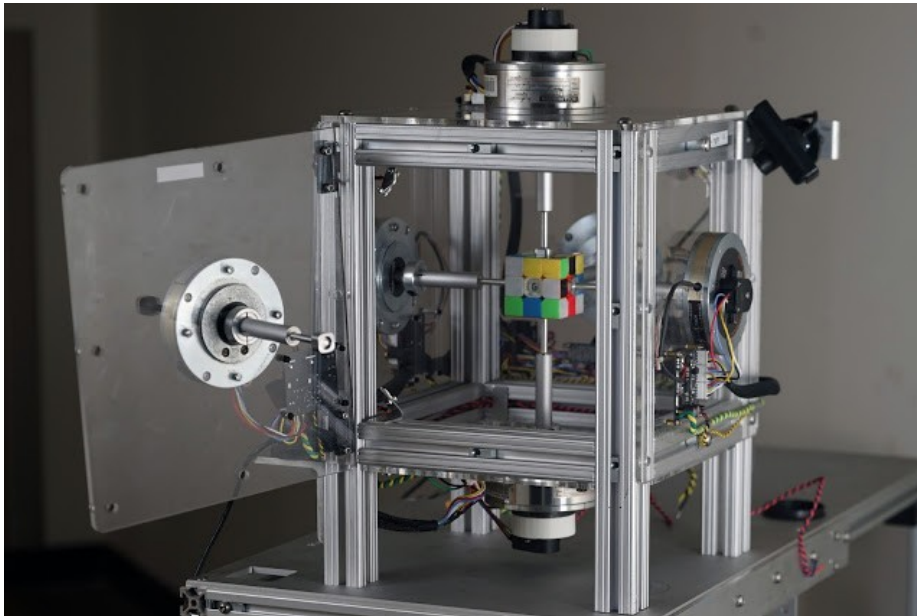


(<https://www.youtube.com/watch?v=NevGDFBfQGw>)

20

Mais il y a plus fort :

le 7 mars 2018, un robot a mis
0,33 secondes pour reconstituer le cube.



Le robot et l'interface
ont été mis au point par
deux étudiants du MIT,
Ben Katz et Jared Di Carlo.

Au pays des nombres entiers...

19

19

C'est un ***nombre premier***.

Les *nombre premiers* sont les briques de base pour construire tous les entiers d'après le ***théorème fondamental de l'arithmétique*** :

tout nombre entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers de manière unique, à l'ordre près des facteurs.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

où $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et α_i entier > 0 pour $1 \leq i \leq k$

19

Par exemple, on a :

$$4\ 154\ 781\ 481\ 226\ 426\ 191\ 177\ 580\ 544\ 000\ 000 \ (\approx 4,155 \times 10^{33}) \\ = 2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$$

Depuis quand connaît-on les *nombres premiers* ?

Sur un os trouvé au bord d'un lac au Zaïre (20000 ans av. J.-C.),
l'os d'Ishango, on trouve des entailles représentant les nombres
11, 13, 17 et 19.

Un hasard ?

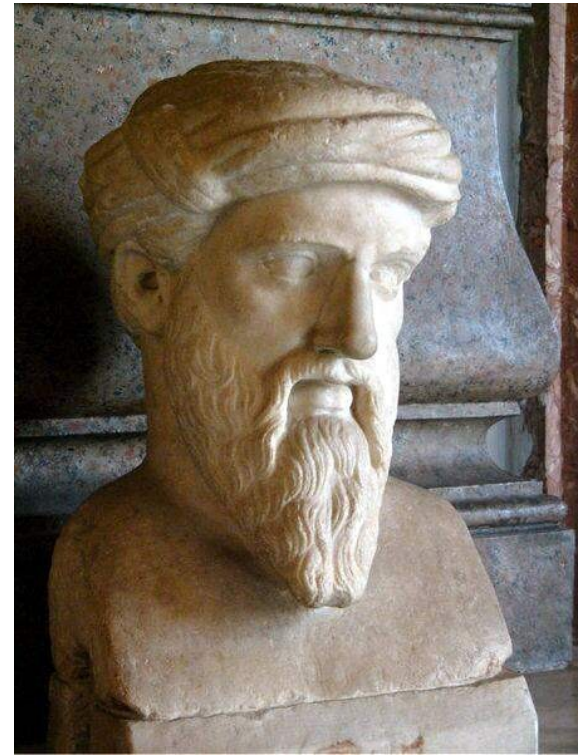


19

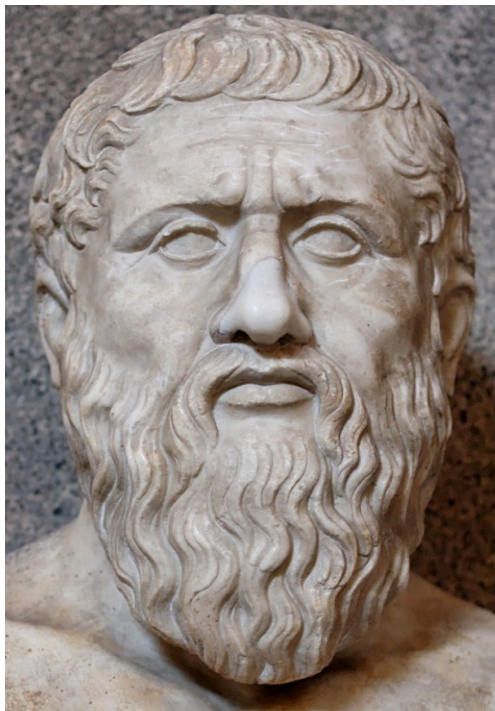
Aucune référence chez les Égyptiens ou les Babyloniens...

Chez **Pythagore** (env. 569-500 av. J.-C.) et son école, rien d'explicite sur les *nombres premiers*... mais les notions de *nombre composé*, de *diviseur*,... leur sont familières.

Tout porte à croire que ce sont les pythagoriciens qui ont développé la théorie des *nombres premiers*.



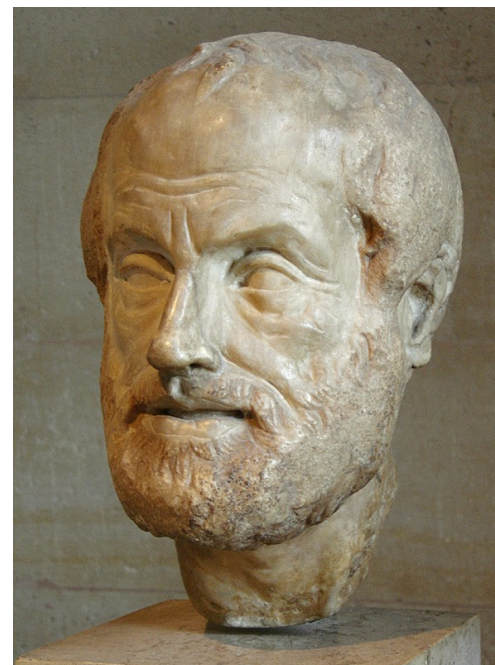
19



Platon

Chez **Platon** (428-348 av. J.-C.) et surtout chez **Aristote** (384-322 av. J.-C.), les notions de *nombre premier* et de *nombre composé* sont évoquées.

et Aristote



19

La théorie des *nombre premiers* (avec énoncés et démonstrations) apparaît avec **Euclide** (env. 325- env. 265 av. J.-C.) dans ses *Éléments*.

Il y a une infinité de *nombre premiers*.

Euclide : si p_1, p_2, \dots, p_k sont des *nombre premiers* distincts, alors un *diviseur premier* de $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ est nécessairement différent de p_1, p_2, \dots, p_k .

Actuellement, on en connaît plus de 20 démonstrations différentes...

La question de *leur distribution* se pose...

19

Le théorème des nombres premiers,
démontré par **Jacques Hadamard** (1865-1963)
et **Charles-Jean de La Vallée Poussin** (1866-1962),
donne des réponses :

au voisinage de $+\infty$:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \text{ ou } \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = Li(x)$$

où $\pi(x)$ est la fonction de compte des nombres premiers :
 $\pi(x)$ = nombre de nombres premiers $\leq x$

Une démonstration plus simple de ce théorème a été donnée
par **Paul Erdős** (1913-1996) et **Atle Selberg** (1917-2007)

19

au voisinage de $+\infty$:

on déduit du théorème des *nombres premiers* :

$$p_n \approx n \ln n$$

Mais on a un résultat plus précis :

$$p_n \approx n \ln n + n (\ln(\ln(n)) - 1) \quad (\text{arrondi noté } p'_n)$$

Avec cette deuxième approximation, on a :

n	p_n	p'_n	% d'erreur
1000	7919	7840	1,00
2000	17 389	17 258	0,75
3000	27 449	27 260	0,69
4000	37 813	37 338	0,46
5000	48 611	48 296	0,65

19

Les calculs effectifs semblent montrer que l'on a toujours

$$\pi(x) < Li(x)$$

mais **John Edensor Littlewood** (1885-1977) a démontré en 1914 que *le signe de $\pi(x) - Li(x)$ changeait une infinité de fois.*

Selon un résultat de 2000, il y a au moins 10^{153} entiers au voisinage de $1,398 \times 10^{316}$ tels que $\pi(x) > Li(x)$.

On sait depuis 2015 qu'il n'y aucun changement de signe avant 10^{19} !!

19

Le nombre de *nombres premiers* $\leq n$ est :

n	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\pi(n)$	4	25	168	1229	9592	78 498	664 579	5 761 455	50 847 534

Ce nombre est connu pour $n \leq 10^{27}$

En 1919, **George Pólya** (1887-1985) a émis la conjecture :
pour tout entier n , il y a davantage de nombres entiers $m \leq n$ ayant un nombre impair de facteurs premiers que de nombres entiers $m \leq n$ ayant un nombre pair de facteurs premiers.

C'est faux (prouvé en 1958) :
le plus petit contre-exemple (trouvé en 1980)
est 906 150 257 !!

19

Les *nombres premiers* sont de la forme $4k+1$ ou $4k+3$.

que dire de chacune de ces familles ?

en $+\infty$, il y a équivalence du nombre d'éléments de chacune d'entre elles.. Mais...

Pour $n < 26\,861$, parmi les *nombres premiers* $\leq n$, il y en a davantage de la forme $4k + 3$ que de la forme $4k + 1$.

Pour cette valeur, il y a égalité.

Pour $n = 26\,863$, la forme $4k + 3$ reprend la tête.

Il faut attendre $n = 616\,841$ pour que la famille $4k + 1$ reprenne la tête pour une courte série...

Théorème (Littlewood – 1914) :

il existe une infinité de n telles que, parmi les nombres premiers $\leq n$, il y en a davantage de la forme $4k + 1$ que de la forme $4k + 3$.

19

N'étant pas divisibles par 2 et 5, les *nombre premiers*, à l'exception de 2 et 5, se terminent par 1, 3, 7 ou 9.

S'ils sont distribués selon le hasard, la probabilité qu'un *nombre premier* se terminant par 1 soit suivi d'un autre se terminant par 1, 3, 7 ou 9 doit être **exactement la même**.

Or (mars 2016), parmi le premier milliard de nombres, le chiffre terminal du *nombre premier* qui suit un *nombre premier* se terminant par 1 est :

- dans 18% des cas, le chiffre 1,
- dans 30% des cas pour chacun, les chiffres 3 ou 7
- dans 22% des cas, le chiffre 9.

Pourquoi ??

19

Record de *nombres premiers* :

n	Nombre chiffres	Année	Auteur	Particularité
$2^{17}-1$	6	1588 ?	Cataldi	
$(2^{148}+1)/17$	44	1951	Ferrier	Plus grand sans ordinateur
$180 \cdot (2^{127} - 1)^2 + 1$	79	1951	Miller-Wheeler	Premier avec ordinateur
$10223 \cdot 2^{31172165} + 1$	9 383 761	2016	Szabolcs	Non de Mersenne
$2^{77232917} - 1$	23 249 425	2017	Pace	GIMPS

Références sur les *nombres premiers* :

le site <https://primes.utm.edu/>

Merveilleux nombres premiers de Jean-Paul Delahaye (Belin)

19

D'après un théorème démontré en 1874
par le polonais **Franz Mertens** (1840-1927) :

La série $\sum_{q \text{ premier}} \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ diverge...

mais très, très lentement... !

Si p_k est le plus petit nombre p tel que $\sum_{q \text{ premier} \leq p} \frac{1}{q} > k$, on a :

k	1	2	3	4
p_k	5	277	5 195 977	1 801 241 230 056 600 523

Au-delà, on ne sait pas...

19

19 est un nombre *premier minimal*.

aucun nombre *premier* ne peut être formé à partir de son écriture décimale en ne gardant, dans le même ordre, que certains chiffres.

Il n'y a que 26 nombres *premiers minimaux* : 2, 3, 5, 7, 11, 19, 41, 61, 89, 409, 449, 499, 881, 991, 6469, 6949, 9001, 9049, 9649, 9949, 60 649, 666 649, 946 669, 60 000 049, 66 000 049 et 66 600 049

Ce résultat a été démontré en 1983 par un groupe de spécialistes en combinatoire français.

19

C'est un ***nombre premier long*** :

le développement décimal du rationnel $1/19$ admet une période maximale, c'est-à-dire égale à $19 - 1 = 18$

$$1/19 = 0.\underline{052631578947368421}0526315789473684210\dots$$

Cette propriété est, bien sûr, liée à la base 10.

Les *nombre premiers longs* < 100 sont
7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61 et 97.

On conjecture (**Emil Artin** – 1927)
qu'il y a environ 37% de *nombre premiers longs*
parmi les *nombre premiers*.

En conséquence, il y en aurait une infinité.

19

19 est un *nombre premier jumeau* avec 17
mais aussi *cousin* avec 23 et *sexy* avec 13.

Nombres *premiers jumeaux* : distance = 2

Nombres *premiers cousins*: distance = 4

Nombres *premiers sexy* : distance = 6

Conjectures : infinité de *nombres premiers jumeaux*,
infinité de *nombres premiers cousins*,
infinité de *nombres premiers sexy*.

En 2016 : pas de démonstration...

19

Les plus grands *nombres premiers jumeaux* connus sont :

$$2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} \pm 1$$

388 342 chiffres. Découvert en septembre 2016.

On a le théorème suivant (**Viggo Brun** – 1919) :

La série $\sum_p \frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}$ converge

(avec p premier tel que $p+2$ est premier aussi).

Sa somme vaut $B_2 \approx 1.902160583104$ (**Pascal Sebah** – 2002) :

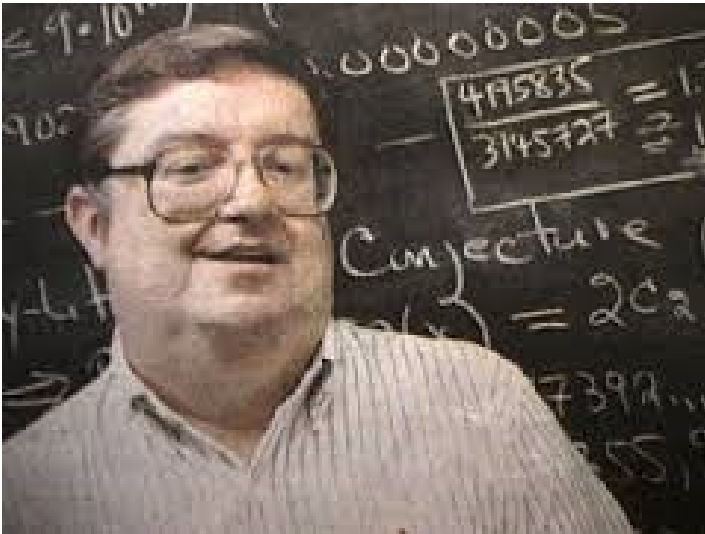
On n'en connaît que 13 décimales

(en extrapolant un calcul fait jusqu'à 10^{16}) !!

19

C'est, lors d'une tentative pour calculer B_2 que **Thomas Nicely** a détecté le bug du *Pentium* en 1994 : un mauvais résultat en arithmétique flottante multiprécision pour la division 1/824 633 702 441.

Thomas Nicely rendit public ce bogue le 30 octobre 1994. D'autres erreurs furent alors détectées.



Origine : erreur de conception dans l'algorithme de division utilisé.

INTEL s'était engagé à remplacer tous les processeurs concernés... mais peu le demandèrent.

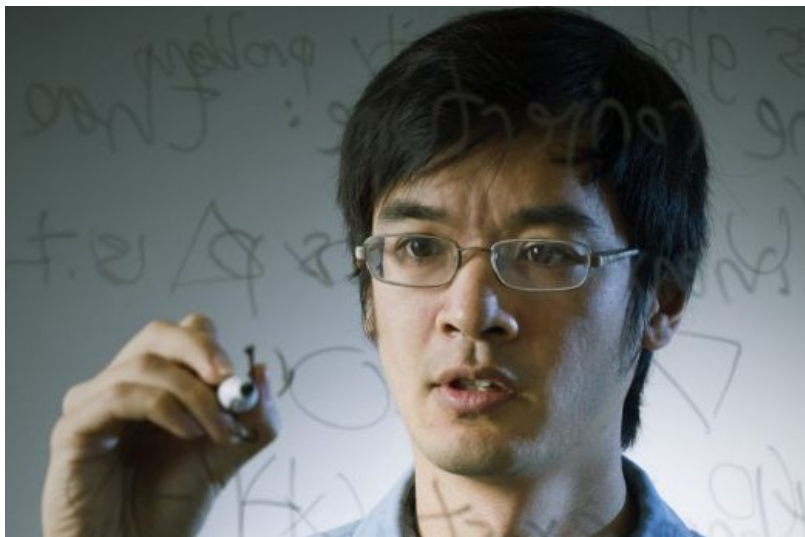
19

En 1966, **Jingrun Chen** (1933-1996) montre l'existence d'une infinité de nombres *premiers* p tels que $p+2$ est *premier* ou produit de 2 *premiers*.

En mai 2013, **Yitang Zhang** (né en 1955) : infinité de *nombres premiers* dont la distance est $< 70\,000\,000$.

Depuis, avec le projet *Polymath8* autour de **Terence Tao** (né en 1975)
puis **James Maynard** (né en 1987) :
distance < 246

Terence Tao



Terence Tao (né en 1975),
australien.

Médaille Fields en 2006

Prix du roi Fayçal en 2010

Prix Nemmers en 2010

Prix Crafoord en 2012

Prix de l'Avancée en 2014

Professeur à l'UCLA (États-Unis)
Travaux en analyse, théorie des
nombres, combinatoire...

Enfant prodige : ici à 10 ans
avec **Paul Erdős**.

Surnommé le *Mozart des maths*



Yitang Zhang – James Maynard

Yitang Zhang,
étudiant à l'université de Pékin,
il obtient son doctorat à l'université
Purdue (Indiana aux Etats-Unis).
Chercheur isolé, il a des petits boulots...
Maintenant, professeur à l'Université
Santa Barbara (Californie)



Daniel Lignon



James Maynard,
étudiant puis chercheur
à l'Université d'Oxford
(Grande-Bretagne)

19

C'est un ***nombre premier super-singulier*** :

Il intervient dans la décomposition en facteurs *premiers* de l'ordre du groupe ***Monstre*** ($\approx 8,080 \times 10^{53}$, c'est-à-dire le nombre d'atomes de 10000 planètes Terre !).

Les autres facteurs sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 41, 47, 59 et 71.

Conjecturé en 1973, le ***groupe fini simple*** appelé *Monstre* est construit en 1982 par **Robert Griess** comme groupe de rotations d'un espace à 196 883 dimensions :

C'est le plus gros *groupe fini simple* connu.

John Conway et **Simon Norton**
ont beaucoup travaillé sur ce groupe.

John Conway



John Conway, né en 1937.
Professeur à Cambridge
puis, depuis 1986, sur la chaire
John von Neumann à Princeton.

Prix *Nemmers* en 1998.

Extrêmement prolifique :
théorie des groupes (classification des groupes finis
simples), nœuds, polyèdres en dimension >3 , réseaux,
combinatoire des jeux (jeu de la vie...)...

Simon Norton

Simon Norton, né en 1952.

Étudiant extrêmement brillant.

Élève et collaborateur de **Conway**.

Co-auteur de *l'atlas des groupes finis*.



A abandonné les mathématiques au départ de **Conway** pour Princeton.
« Spécialiste des transports publics anglais »...

19

Ce n'est pas un *nombre McNugget*.

Un *nombre McNugget* est un nombre qui peut s'écrire comme combinaison de 6, 9 et 20 (nombre de beignets dans les boîtes de chicken McNuggets aux USA).

19 ne peut pas s'écrire ainsi...



Il y a qu'un nombre fini de nombres qui ne sont pas *McNugget*, 22 pour être exact.

Ce sont :

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 31, 34, 37 et 43.

19

C'est parce que 6, 9 et 20 sont *relativement premiers entre eux* qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres qui ne sont pas combinaison linéaire de 6, 9 et 20.

Au-delà de ce problème « anecdotique »,
existe de vrais problèmes...

Par exemple : étant donné un système de monnaie (pièces et billets), comment obtenir une somme donnée de façon optimale, c'est-à-dire avec le nombre minimal de pièces et billets ?

C'est un problème en général difficile...

Avec le système euro, il existe des algorithmes efficaces.

19

Autre problème :
quel système de monnaie faut-il adopter
pour qu'il y ait un nombre minimal de pièces et de billets
pour obtenir une somme donnée ?

Par exemple, quelles pièces de monnaie
faut-il dans le système pour obtenir
n'importe quelle somme inférieure à 1 euro,
c'est-à-dire 100 centimes d'euros,
avec, en moyenne, un minimum de pièces ?

19



Les résultats
sont surprenants !



Nombre de pièces	1	2	3	4	5	6
pièces	1	1, 10	1, 12, 19	1,5,18,29	1,5,16,23,33	1,4,6,21,30,37

Le résultat pour 6 pièces est bien loin des pièces habituelles :
1, 2, 5, 10, 20 et 50.

19

C'est un nombre *heureux* :

En prenant la somme des carrés de ses chiffres ($1^2 + 9^2 = 82$)
puis en poursuivant suffisamment :
 $8^2 + 2^2 = 68$, $6^2 + 8^2 = 100$, $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$),
on arrive sur le nombre 1.

En fait, deux cas peuvent se produire :
en répétant ce processus
(somme des carrés des chiffres) en partant de l'entier n ,
on arrive sur 1 (auquel cas n est *heureux*)
ou on arrive sur le cycle (4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20).

Il existe une infinité de nombres *heureux*.
Leur densité est comprise entre 0,113 et 0,186.

19

On peut aussi se poser la question du nombre d'étapes nécessaires pour atteindre la valeur 1.

Le tableau suivant donne le plus petit nombre *heureux* h_n nécessitant n étapes pour atteindre 1 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
h_n	10	13	23	19	7	356	78999	$3789 \times 10^{973} - 1$

Les 2 premiers nombres *heureux* consécutifs sont 31, 32.

Les 3 premiers consécutifs sont 1880, 1881, 1882.

Et ensuite ?

Pour tout k , il existe k nombres *heureux* consécutifs (démonstré en 2000).

19

Tout nombre entier peut s'écrire comme la somme d'au plus 19 puissances quatrièmes.

Ce résultat date de 1986 et est dû à plusieurs mathématiciens :
**Ramachandran Balasubramanian,
Jean-Marc Deshouillers et François Dress.**

79 est le nombre le plus petit qui nécessite
19 puissances quatrièmes :

$$79 = 15 \cdot 1^4 + 4 \cdot 2^4$$

C'est un cas particulier du ***problème de Waring.***

19

Suite au ***théorème des quatre carrés*** de Lagrange
(*tout nombre entier est la somme de 4 carrés*),
le mathématicien britannique **Edward Waring** (1736-1798)
a posé en 1770 le problème suivant :

*un entier n étant donné, tout entier peut-il s'écrire comme une
somme de puissances n^e d'entiers? Si oui, quel est le
nombre de puissances nécessaires?*

David Hilbert (1862-1943) a donné une réponse positive à la
première question en 1909.

Restait à calculer, pour tout exposant n , le nombre minimal de
puissances nécessaires. Il est noté $g(n)$.

19

Si, pour tout exposant n , $g(n)$ est le nombre minimal de puissances nécessaires et x_n est le plus petit entier nécessitant $g(n)$ puissances, on a :

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(n)$	4	9	19	37	73	143	279	548
x_n	7	23	79	223	703	2175	6199	19 455

Pour $n \leq 6$, les résultats ont été trouvés par différents mathématiciens.

Pour $n > 6$, des formules donnant $g(n)$ et x_n ont été démontrées en 1936 par **Eugene Dickson** (1874-1954) et **Subbaya S. Pillai** (1901-1950) puis complétées par **Ivan Morton Niven** (1915-1999).

19

Si une certaine expression E est strictement positive,
la formule est :

$$g(n) = 2^n + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^n \right\rfloor - 2$$

où $\lfloor \ \rfloor$ désigne la partie entière

Cette formule est vraie aussi pour $n \leq 6...$

De même, on a une formule pour x_n .

Si $E \leq 0$, on a d'autres formules...

On a démontré que
le cas $E \leq 0$ n'arrive qu'un nombre fini de fois
et jamais quand $n \leq 471\,600\,000$!!

19

Le nombre formé avec 19 chiffres « 1 » consécutifs est *premier*.

C'est le deuxième *répunit premier* en base 10.

Le *répunit* noté R_n est le nombre formé avec n chiffres « 1 ». On ne considérera que ceux en base 10.

On conjecture qu'il y a une infinité de *répunits premiers* mais on en connaît très peu...

R_n est premier pour

$n = 2, 19, 23, 317, 1031, 49\ 081, 86\ 453, 109\ 297, 270\ 343.$

À partir de 49 081, ce ne sont que des *premiers probables*.

Les tests ont été faits jusqu'à $n = 2\ 500\ 000$.

19

19 est le plus petit nombre de ***persistance additive 2*** : en calculant la somme des chiffres, il faut 2 itérations pour obtenir un nombre à un chiffre.

Si n_k désigne le plus petit entier de *persistance* = k :

k	n_k
1	10
2	19
3	199
4	19 999 999 999 999 999 999 999

Théorème : la *persistance* n'est pas bornée.

Si n est de *persistance* p , le nombre qui s'écrit avec n chiffres 1 est de *persistance* $p+1$... mais ce n'est pas le plus petit.

19

C'est le plus petit entier n tel que a_n ne soit pas entier pour la suite définie par

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{k=0}^n a_k^6 \right) \quad \text{avec } a_0 = 1$$

Les premiers termes sont 1, 2, 33, 430 489 345, ...

La croissance est très rapide :

$$a_{19} \approx 8,96 \times 10^{24\ 007\ 102\ 799\ 099}$$

De manière générale, **Fritz Göbel** a défini les suites d'ordre p :

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{k=0}^n a_k^p \right) \quad \text{avec } a_0 = 1$$

19

Les termes de ces suites, appelées **suites de Göbel d'ordre p** , semblent être tous entiers... sauf que, pour tout p , il existe n tel que le terme a_n ne soit pas entier.

Si, pour p donné, on note n_p le plus petit de ces entiers, on a :

p	n_p	p	n_p	p	n_p
2	43	5	214	8	37
3	89	6	19	9	79
4	97	7	239	10	83

Selon **Don Bernhard Zagier**, professeur au Collège de France, on n'a pas, à l'heure actuelle, d'explication satisfaisante de ce phénomène.

19

Dans *l'axiomatique actuelle* permettant de définir la *géométrie euclidienne de l'espace* (3 dimensions), il y a 19 axiomes.

L'axiomatique proposée par **Hilbert** en 1899 en comprenait 21 :

- L'un est la conséquence des autres,
- Deux axiomes sont actuellement réunis.

Ces axiomes définissent les relations entre trois types d'objet : point, droite et plan.

Bien sûr, *l'axiome des parallèles* est un de ces axiomes : soient une droite d et un point A non sur d ; dans le plan déterminé par d et A , il existe au plus une droite passant par A qui n'a aucun point commun avec d .

David Hilbert

Mathématicien allemand (1862-1943)

Chef de file des mathématiciens formalistes :
une théorie se construit sur la base d'un système d'axiomes s'appliquant à des notions premières.

Travaux en :

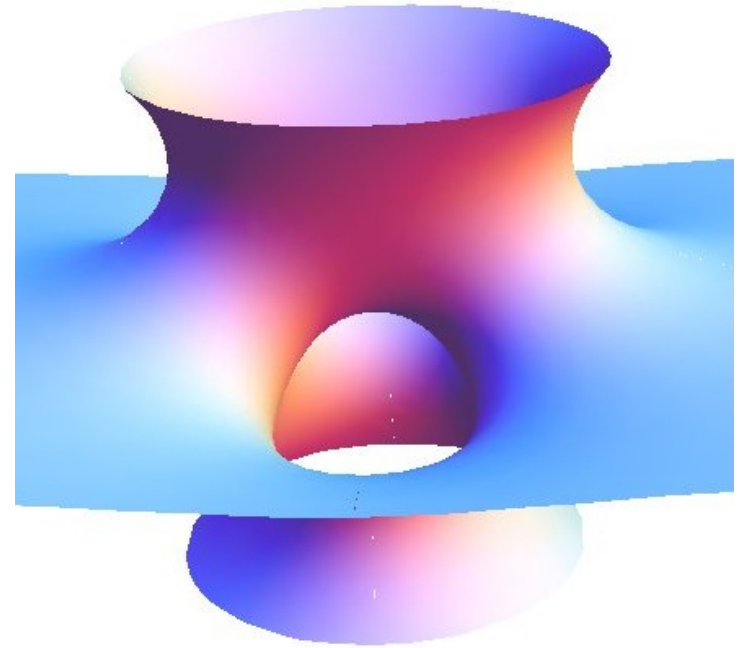
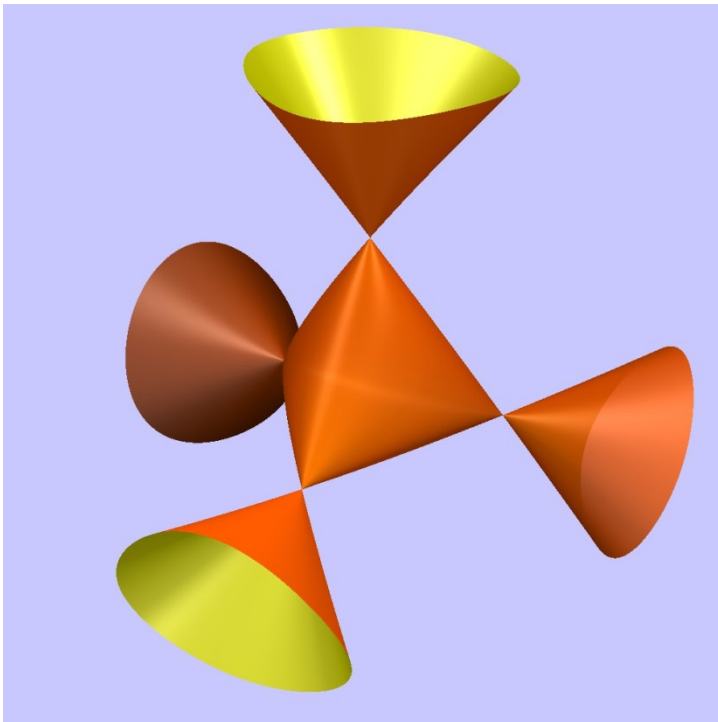
- logique (programme de Hilbert),
- équations différentielles et intégrales,
- analyse fonctionnelle,
- théorie des nombres,
- physique théorique...



Un des derniers, avec **Henri Poincaré** (1854-1912), à dominer toutes les branches des mathématiques.

19

Par *19 points en position générique* dans l'espace projectif complexe,



Il passe en général une *unique surface cubique*, c'est-à-dire une surface algébrique de degré 3.

C'est vrai aussi en géométrie réelle.

19

Pour d entier, quand elle existe,
la seule surface algébrique de degré d
passant par N points en position générale
correspond aux valeurs suivantes :

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	3	9	19	34	55	83	119	164	219	285

On sait classer les surfaces algébriques de degré 2 et 3.
La classification des surfaces algébriques
de degré ≥ 4 reste à faire...

Au pays des nombres entiers...

27

27

C'est un *nombre composé* :

$$27 = 3^3$$

Il admet 1 facteur premier et 4 diviseurs.

C'est un *composé minimal*.

Il est *arithmétique et brésilien*.

C'est un *nombre de Smith* et un *nombre harshad*.

Il est ***puissant*** :

pour tout diviseur *premier* p , p^2 le divise aussi.

Cette notion a été introduite par **Paul Erdős**
et **George Szekeres** (1911-2005).

27

Les nombres *puissants* < 500 sont 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100, 108, 121, 125, 128, 144, 169, 196, 200,...

Il en existe une infinité.

La somme des inverses des nombres *puissants* est convergente :

$$\sum_{n \text{ puissant}} \frac{1}{n} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \approx 1,944$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre n soit puissant est qu'il soit de la forme $n = p^2 q^3$ avec p et q entiers.

27

Il existe une infinité de paires de nombres *puissants* consécutifs :
par exemple 8 et 9, 288 et 289...

Erdős a conjecturé qu'il n'existe pas de triplets de nombres
puissants consécutifs : le problème est toujours ouvert...

Tout entier assez grand est la somme
d'au plus trois nombres *puissants* :

démontré en 1987 par le britannique
Roger Heath-Brown,
né en 1952, professeur à Oxford.



27

Il est égal à la somme des chiffres de son cube :

$$27^3 = 19\ 683 \text{ et } 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$$

Seuls 6 nombres entiers > 0 possèdent cette propriété.

Les autres sont 1, 8, 17, 18 et 26.

Ce résultat date de 1879 et est dû

à **Claude Moret-Blanc** (1819-1886), enseignant de lycée.

Il est égal à la somme des chiffres de sa puissance septième :

$$27^7 = 10\ 460\ 353\ 203 \text{ et } 1+0+4+6+0+3+5+3+2+0+3 = 27$$

9 nombres entiers > 0 possèdent cette propriété.

Les autres sont 1, 18, 31, 34, 43, 53, 58 et 68.

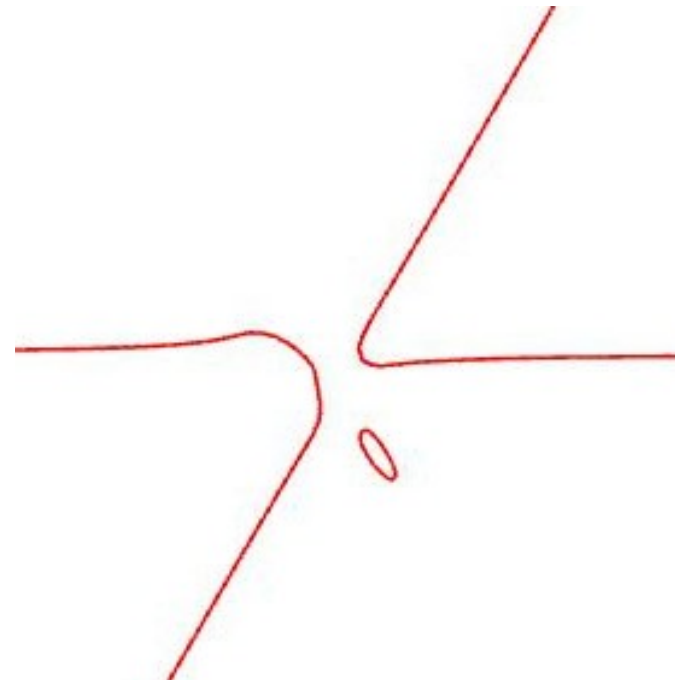
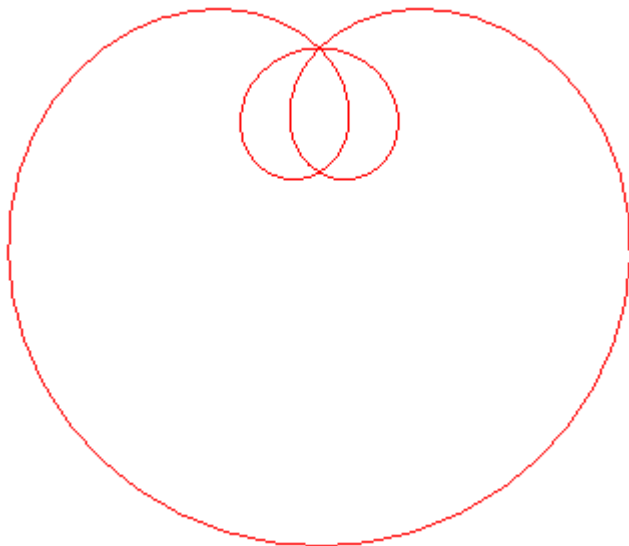
Il est égal à 3 fois la somme de ses chiffres.

C'est le seul nombre entier > 0 possédant cette propriété.

27

En géométrie projective, complexe ou réelle, par 27 points génériques (en position générale), il passe une seule courbe algébrique de degré 6.

Deux exemples de courbes de degré 6 :



27

Par N points génériques du plan projectif complexe, passe une seule courbe algébrique de degré d :

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	2	5	9	14	20	27	35	44	54

En fait
$$N = \frac{d(d+3)}{2}$$

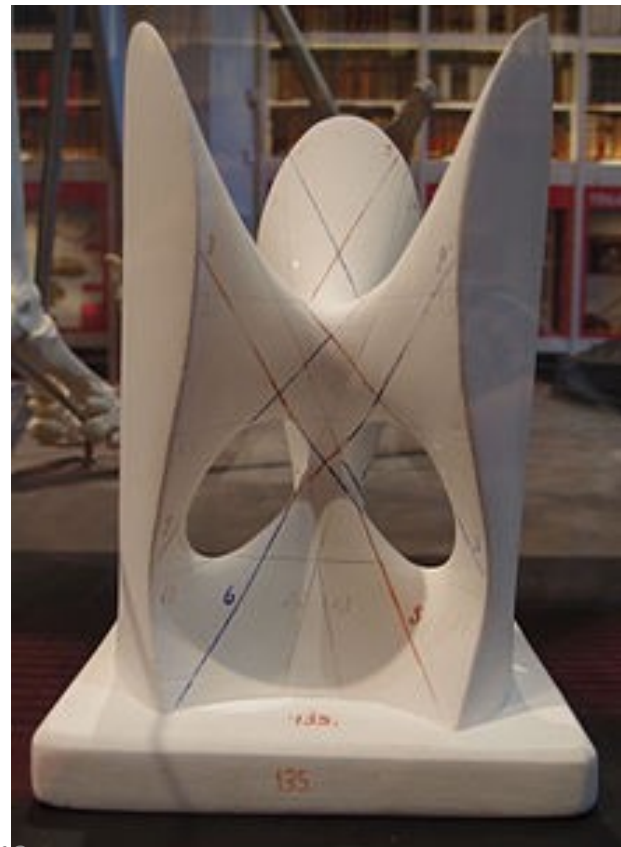
Puisque les points sont génériques, la courbe est sans point double.

27

Dans l'espace projectif complexe, une surface cubique régulière contient exactement 27 droites.

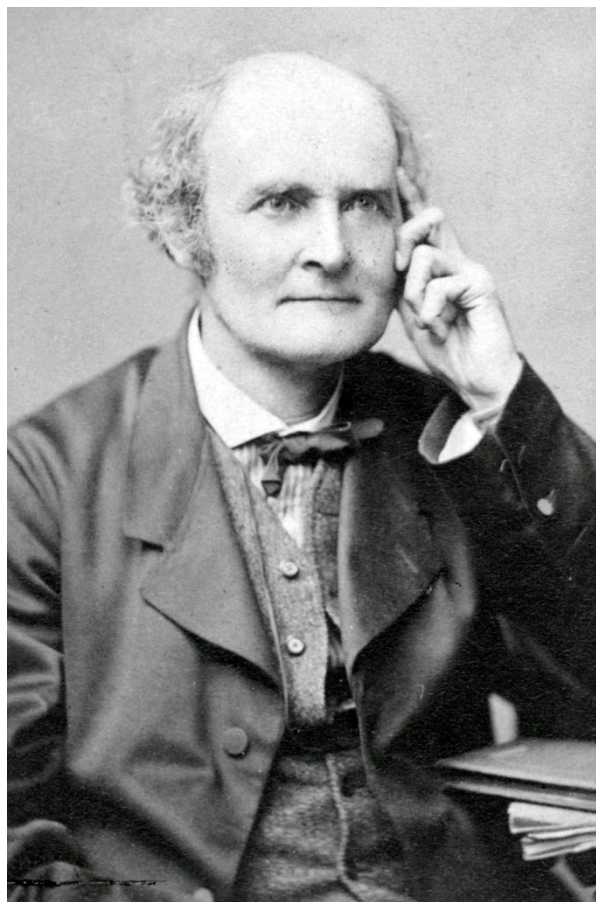
Dans le cas où la surface est réelle, c'est un maximum : il y a 27, 15, 7 et 3 droites réelles incluses...

Ce résultat, démontré par **George Salmon (1819-1904)** et **Arthur Cayley (1821-1895)** ***est exceptionnel.***



Arthur Cayley

Arthur Cayley (1821-1895), mathématicien anglais.



Professeur à Cambridge... mais a été pendant 14 ans avocat.

Ses travaux concernent tous les domaines, mais plus spécialement l'algèbre et la géométrie : il est, avec **Euler** et **Cauchy**, l'un des mathématiciens les plus prolifiques : 900 articles, plus de 8000 pages...

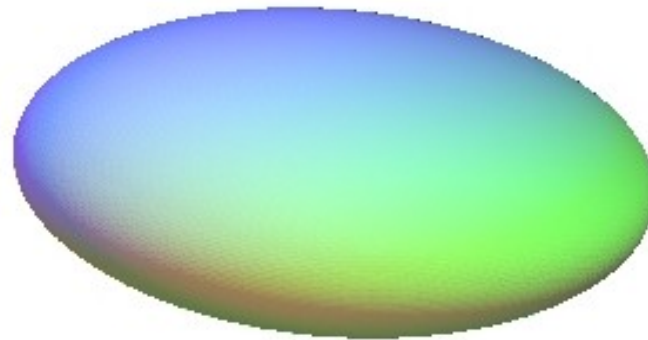
Considéré comme l'inventeur des matrices...

27

En effet, en ***géométrie projective complexe***, toute surface ***algébrique régulière de degré 2***, appelée aussi quadrique, est réglée donc ***contient une infinité de droites***.



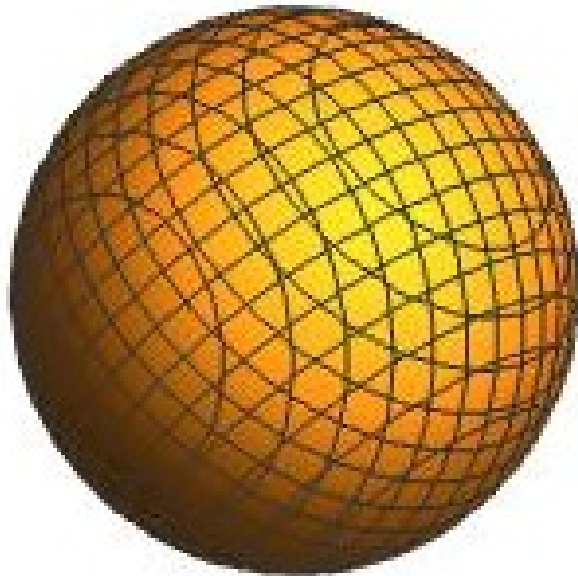
Ce n'est pas le cas en géométrie réelle où il existe des quadriques non réglées...



27

Étonnant : comment sur une sphère en géométrie complexe, peut-il y avoir des droites ?

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Par exemple, elle contient la « droite » d'équations paramétriques :

$$x = 1$$

$$y = \lambda$$

$$z = i\lambda$$

C'est la droite passant par le point $(1,0,0)$ et de vecteur directeur $(0,1,i)$.

27

Puisque tout cela est si loin
de notre « intuition »,
pourquoi étudier ces objets en géométrie complexe ?

***parce que c'est
plus simple...!***

***C'est aussi une
première étape
vers le réel...***



(Dessin de Denis Pessin)

27

Prenons un exemple en algèbre :

Équation du second degré :

$$a x^2 + b x + c = 0$$

Combien de solutions ?

Dans les nombres complexes, c'est simple :

2 solutions, distinctes ou non.

Dans les nombres réels :

2 solutions réelles, distinctes ou non, si $b^2 - 4ac \geq 0$

0 solution si $b^2 - 4ac < 0$

27

Et ensuite, qu'est-ce que cela devient :
équation du troisième degré :

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

Combien de solutions ?

Dans les nombres complexes, c'est simple :
3 solutions, distinctes ou non.

Dans les nombres réels :

3 solutions, distinctes ou non, si

$$18 a b c d + b^2 c^2 - 4 a c^3 - 4 b^3 d - 27 a^2 d^2 \geq 0$$

1 seule solution réelle dans le cas contraire.

Reprenons : *en géométrie projective complexe, toute surface algébrique régulière de degré 2 contient une infinité de droites.*

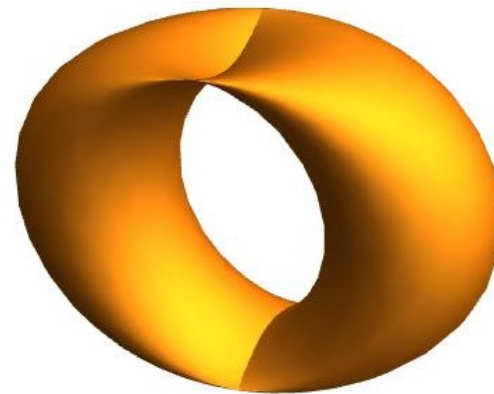
D'autre part, dans la même géométrie, une surface algébrique régulière de degré ≥ 4 ne contient pas, en général, de droite.

Le *dôme de Bohème* :

surface de degré 4

d'équation :

$$(x^2+y^2+z^2-5)^2=4(1-x^2)(4-y^2)$$

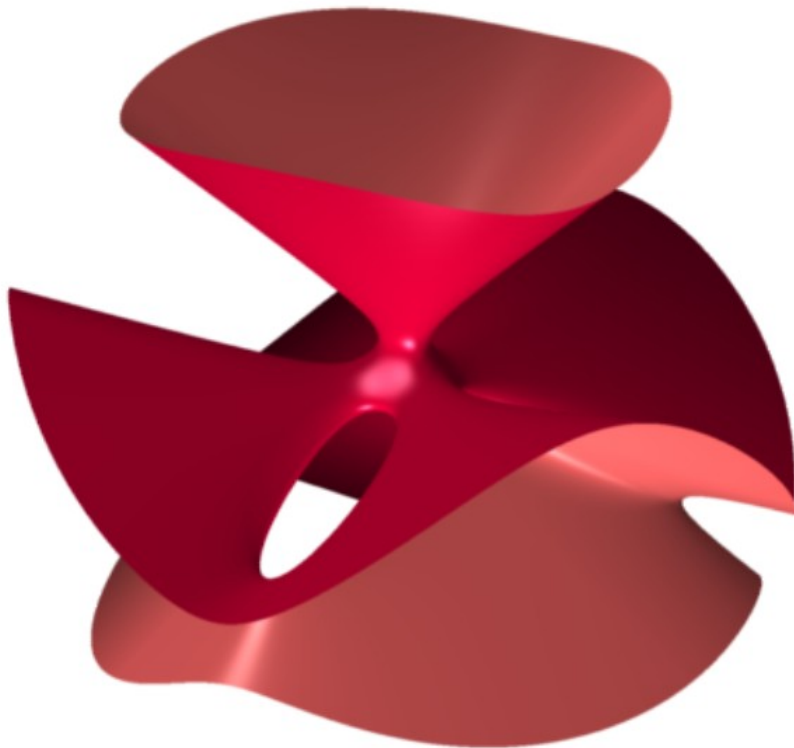


D'où le cas exceptionnel pour les surfaces de degré 3 !

27

La **surface de Clebsch** a pour équation :

$$81 (x^3+y^3+z^3)-9 (x^2+y^2+z^2)-189 (x^2 y+x^2 z+x y^2+x z^2+y^2 z+y z^2) \\ +54 x y z-9 (x+y+z)+126 (x y+x z+y z)-1 = 0$$



*C'est **la seule** surface cubique réelle possédant 27 droites...*

Elle a été étudiée par **Alfred Clebsch** (1833-1872).



27

Le nombre 27 est un point de départ de la *suite de Syracuse* donnant *une altitude record* et *un vol record*.

La *suite de Syracuse* est définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 3x + 1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

On conjecture que la suite aboutit toujours à la valeur 1, quelle que soit la valeur de départ.

On a vérifié jusqu'à $5,764 \times 10^{18}$

27

À la fin des années 1920, **Lothar Collatz** (1910-1990) s'intéressait aux itérations de fonctions :
il inventa alors la suite précédente.

Dans les années 1950, **Collatz** en parle à **Helmut Hasse** (1898-1979). Ce dernier le répandit aux États-Unis à l'université de Syracuse, près de New-York.

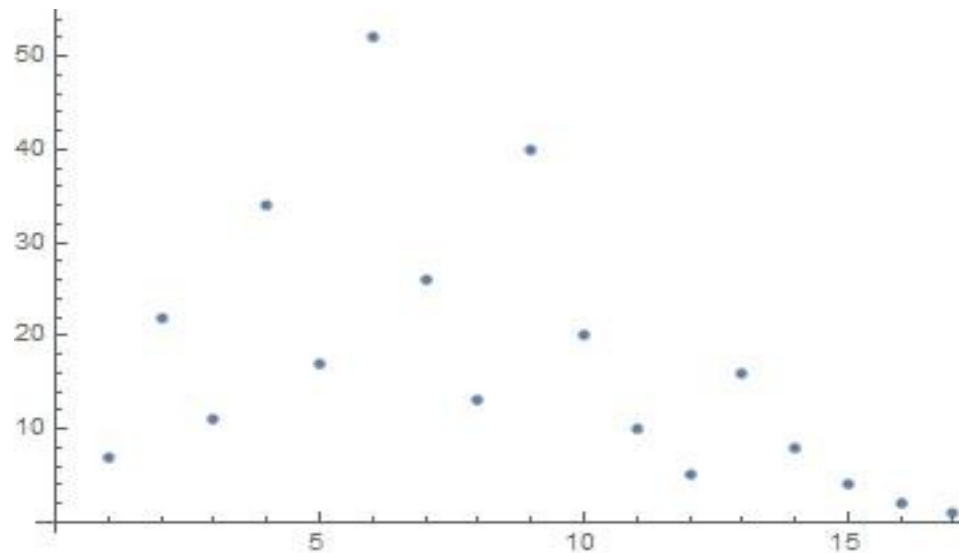
Stanislas Ulam (1909-1984) en entend parler et le répand au sein du Laboratoire national de Los Alamos.

Dans les années 1960, il est repris par **Shizuo Kakutani** (1911-2004) qui le diffuse dans d'autres universités au cours de ses séjours aux États-Unis.

27

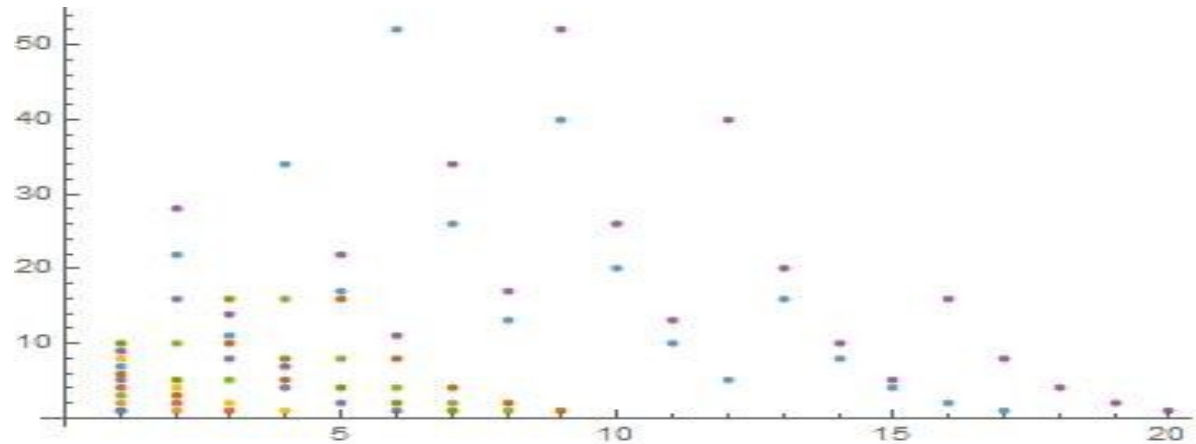
Ce problème porte donc différents noms :
« *conjecture de Syracuse* », « *conjecture de Collatz* »,
« *problème de Kakutani* » ou « *conjecture $3x + 1$ ou $3n + 1$* ».

Par exemple, à partir de 7, on a :
7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1



27

Pour les valeurs jusqu'à 10 :



Erdős a déclaré à propos de cette conjecture :
« *Les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes* ».

Les ***altitudes record*** sont :

Départ	2	3	7	15	27	255	447	639	703	1819
Altitude	2	16	52	160	9232	13120	39364	41524	250504	1276936

27

Les *durées de vol record* sont :

Départ	2	3	6	7	9	18	25	27	54	73
Durée de vol	1	7	8	16	19	20	23	111	112	115

Sous l'hypothèse qu'un vol n'atterrisse pas en 1, deux éventualités pourraient se produire :

- on tombe sur des entiers de plus en plus grands, le vol est une suite tendant vers $+\infty$;
- on tombe sur une valeur déjà prise : il y a donc un cycle et il ne contient pas 1.

Dans le cas d'une incapacité à démontrer cette conjecture, il est possible qu'elle soit *indécidable* dans le cadre de la théorie usuelle des ensembles.

Quelques références...

Côté Internet :

Le site des suites entières **OEIS** créé par **Neil Sloane** :
<http://oeis.org/>

Le site de **Giovanni Resta** :
<http://www.numbersaplenty.com/>

Le site **NumberGossip** de **Tanya Khovanova** :
<http://www.numbergossip.com/>

Quelques références...

Côté livres :

Les nombres remarquables (1983)
de **François Le Lionnais**

Le dictionnaire Penguin des nombres curieux (1995) de **David Wells**

Ces nombres qui nous fascinent (2008) de **Jean-Marie de Konninck**

Le dictionnaire de (presque) tous les nombres entiers (2013)
de **Daniel Lignon**

Tous les livres de **Jean-Paul Delahaye**

