∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2012 ∼

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Question liées :

3 à 8

9 et 10

11 à 15

PARTIE I

1. On considère le plan (P) d'équation $x+2y-z-4=0$ et le plan (Q) d'équation $2x+3y-2z-5=0$.
L'intersection des plans (P) et (Q) est

A. vide car ces deux plans sont parallèles

B. une droite car ces deux plans ne sont pas parallèles puisque le vecteur de composantes $(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$, normal à (P), et le vecteur de composantes $(2\ ;\ 3\ ;\ -2)$, normal à (Q), ne sont pas colinéaires

C. le point de coordonnées $(0\,;3\,;2)$

D. est la droite d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right.$ où t appartient à l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

PARTIE II

2. Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique établit que chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à $p=0,1$. Sachant qu'il rencontre cinq clients par matinée, en moyenne, chaque rencontre étant considérée comme une expérience identique et indépendante, on montre que

A. le nombre de produits vendus en une matinée définit une variable aléatoire discrète qui suit la loi binomiale de paramètres 5 et p,

B. le nombre de produits vendus en une matinée définit une variable aléatoire qui suit la loi uniforme de paramètre p,

C. la probabilité qu'il vende exactement trois produits dans une matinée est égale à $p^3(1-p)^2=0{,}000\,81$,

D. la probabilité qu'il vende exactement trois produits dans une matinée est égale à $10p^3(1-p)^2=0{,}008\,1$.

PARTIE III

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]-1\ ;\ ,+\infty[$ par

$$f(x)=x-\frac{\ln(1+x)}{(1+x)}$$

ln désignant la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et D celle représentant la droite d'équation $y=x$ dans un repère orthonormé.

3. La fonction f

A. a pour dérivée $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2}$ pour tout x appartenant à I

B. a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{1+x}$ pour tout x appartenant à I

C. est décroissante sur l'intervalle $]-1~;~1[$ et croissante sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ car la fonction $F(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$ est croissante sur I et nulle au point $x = 0$

D. est décroissante sur l'intervalle $]-1~;~0[$ et croissante sur l'inter vaIle $]O~;~+\infty[$ car la fonction $F(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$ est décroissante sur I et nulle au point $x = 0$

4. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et D

A. ne se coupent en aucun point

B. se coupent au moins en deux points

C. se coupent en un seul point car l'équation $\ln(1+x) = 0$ admet une solution unique

D. se coupent à l'origine du repère

5. Si x appartient à l'intervalle $[0~;4]$ aIors

A. $f(x)$ appartient à l'intervalle $[-4~;~0]$ car la fonction f est décroissante sur $[0~;4]$

B. $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0~;4]$ car la fonction f est croissante sur $[0~;4]$

C. $f(x)$ ne peut appartenir à l'intervalle $[0~;4]$

D. $f(x)$ appartient à l'intervalle $[4~;~+\infty[$

On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ \text{et} & & \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

6. On montre que

A. pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0~;~+\infty[$

B. pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[4~;~+\infty[$

C. pour tout entier naturel n non nul, u_n appartient à l'intervalle $[-4~;~0]$

D. u_n ne peut appartenir à l'intervalle $[0~;4]$ pour tout entier naturel n

7. La suite (u_n)

A. est décroissante et majorée par 0

B. est croissante et majorée par 4

C. est décroissante et minorée par 4

D. n'est ni croissante ni décroissante

8. La suite (u_n)

A. n'est pas convergente car elle est croissante non majorée

B. est convergente car elle est décroissante et minorée et elle a pour limite 0 car 0 est solution de l'équation $f(x) = x$

C. est convergente car elle est croissante et majorée et elle a pour limite 4 car 4 est solution de l'équation $f(x) = x$

D. n'est pas convergente car elle est décroissante non minorée

PARTIE IV

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin x \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x \cos x$$

où e désigne la fonction exponentielle.
On note L l'intégrale de la fonction f sur le segment $[O~;~\pi]$ et M l'intégrale de g sur ce même segment $[O~;~\pi]$:

$$L = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad M = \int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$$

9. On montre, en utilisant la formule d'intégration par parties, que

A. $M = L$ car $\cos x$ est la dérivée de $\sin x$

B. $M = -L$ car $\cos x$ est une primitive de $\sin x$

C. $-M = -L + 1 + \mathrm{e}^{\pi}$ car $\cos x$ est une primitive de $sinx$

D. $L = M + 1 + \mathrm{e}^{\pi}$ car $\cos x$ est une primitive de $(-\sin x)$

10. On obtient

A. $L = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{2} = M$

B. $L = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{2} - M$

C. $L = -\dfrac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{2} = -M$

D. $L = -\dfrac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{2} = M$

On considère l'équation

$$(E) \quad P(z) = z^3 - (4+\mathrm{i}) \; + (13+4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = 0$$

où z est un nombre complexe.

11. L'ensemble S des solutions de l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes est

A. $S = \{\text{i} ; 2-3\text{i}\}$ car i et $2-3\text{i}$ sont racines de $(z-\text{i})\left(z^2-4z+13\right)$

B. $= \{2-3\text{i} ; 2+3\text{i}\}$

C. $S = \{\text{i} ; 2-3\text{i} ; 2+3\text{i}\}$ car $P(z)$ peut s'écrire sous la forme $(z-\text{i})\left(z^2-4z+13\right)$

D. $S = \{\text{i} ; -\text{i} ; 2+3\text{i}\}$

PARTIE V

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives i, $2+3\text{i}, 2-3\text{i}$ et $-\text{i}$. On note r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

12. Soient z l'affixe d'un point M et z' l'affixe du point M', image du point M par la rotation r, on a

A. $z'-2-3\text{i} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}(z-2-3\text{i})$

B. $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(z-2-3\text{i})$

C. $z'-2-3\text{i} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}z$

D. $z'+2+3\text{i} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(z-2-3\text{i})$

13. L'affixe z'_{A} du point A', image du point A par la rotation r, est égaIe à

A. $z'_{\text{A}} = -2+\left(3-2\sqrt{2}\right)\text{i}$

B. $z'_{\text{A}} = 2+(3+2\sqrt{2})\text{i}$

C. $z'_{\text{A}} = 2-(3-2\sqrt{2})\text{i}$

D. $z'_{\text{A}} = 2+(3-2\sqrt{2})\text{i}$

14. On montre que les points

A. A, B et D sont alignés

B. A$'$, B et C sont alignés car leurs affixes ont même partie réelle égale à 2

C. A, B et C sont alignés

D. A, B et D ne sont pas alignés

15. On établit alors que

A. A$'$ est l'image du point C par une homothétie de centre B et de rapport $k = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

B. A$'$ est l'image du point C par une homothétie de centre B et de rapport $k = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

C. A$'$ est l'image du point C par une rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

D. A$'$ est l'image du point C par une rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$