Techniciens supérieurs de l'aviation 2008

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Question liées :

1 à 5

6 à 15

PARTIE I

Le plan affine (P) est rapporté à un repère orthonormé. z est un élément de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes que l'on écrira sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
On appelle M le point de (P) d'affixe le complexe z.
On considère la transformation F qui au nombre complexe z associe, lorsqu'elle existe, le complexe Z défini par

$$Z = F(z) = \frac{z^2}{z+\mathrm{i}}.$$

Question 1 : F(z) est défini

A. pour tout z réel

B. pour tout z imaginaire pur

C. pour tout nombre complexe z différent de i

D. uniquement pour z réel

Question 2 : Les parties réelle X et imaginaire Y du nombre complexe $Z = F(z)$ s'écrivent

A. $X = \dfrac{x\left(x^2+y^2+2x\right)}{x^2+(y+1)^2}$

B. $X = \dfrac{x\left(x^2+y^2+2y\right)}{(x^2-(y+1)^2}$

C. $Y = \dfrac{x\left(x^2+y^2+2y\right)}{x^2+(y+1)^2}$

D. $Y = \dfrac{y\left(x^2+y^2\right)+y^2-x^2}{x^2-(y+1)^2}$

Question 3 : L'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = F(z)$ soit imaginaire pur

A. ne contient aucun point

B. est constitué uniquement de la droite d'équation $x = 0$ privé du point i

C. contient la droite d'équation $x = 0$

D. contient le cercle de centre le point $(0\,;\,-1)$ et de rayon 1

Question 4 :
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = F(z)$ soit réel

A. contient le cercle de centre le point $(0\,;\,-1)$ et de rayon 1

B. est l'ensemble des points qui vérifient l'équation $y\left(x^2+y^2\right)+y^2-x^2 = 0$

C. contient la droite d'équation $x = 0$ privé du point $-\mathrm{i}$

D. ne contient aucun point

Question 5 : Les coordonnées polaires, module et argument, $(r\ ;\ \theta)$ des points M d'affixe z tels que $Z = F(z)$ soit réel vérifient

A. $r = \dfrac{1}{\sin\theta} - 2\sin\theta$
B. $r = 1$ et θ réel
C. $r = \dfrac{1}{\sin\theta} - \sin(2\theta)$
D. $r = \sin\theta - \sin(2\theta)$

PARTIE II

On considère la fonction f qui à x réel associe le réel

$$y = f(x) = \frac{3x^2+6x-1}{x^2+2x-3}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Question 6 : La fonction polynôme x^2+2x-3

A. n'admet qu'une seule racine $x = -3$
B. admet deux racines de même signe
C. n'admet pas de racine réelle
D. admet une seule racine positive

Question 7 : La fonction f est définie sur

A. l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$
B. l'intervalle $]1\ ;\ +\infty]$ uniquement
C. les intervalles $]-\infty\ ;\ -3[$, $]-3\ ;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$
D. l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$

Question 8 : La dérivée f' de la fonction f, lorsqu'elle existe, est définie par

A. $f'(x) = \dfrac{3x+3}{x+1}$
B. $f'(x) = \dfrac{-(6x+6)(2x+2)}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$
C. $f'(x) = \dfrac{-16(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}$
D. $f'(x) = \dfrac{16(x+1)}{x^2+2x-3}$

Question 9 : La fonction f

A. est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ et décroissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$

B. est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$

C. est croissante sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -3[$ et $]-3\ ;\ 1[$ et décroissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$

D. est décroissante sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -3[$ et $]-3\ ;\ 1[$ et croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$

Question 10 : La fonction f a pour limite

A. 3 lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$

B. lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$

C. $-\infty$ lorsque x tend vers 1 sur l'intervalle $]-3\ ;\ 1[$

D. $-\infty$ lorsque x tend vers 1 sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$

Question 11 :
La courbe représentative $\mathscr{C}$

A. est tangente à la droite d'équation $y = 3$ au point d'abscisse $x = -1$

B. coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ et $\dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}$

C. coupe l'axe des ordonnées Oy au point d'ordonnée $y = 3$

D. est tangente à la droite d'équation $y = 1$ au point d'abscisse $x = -1$

Question 12 : La courbe représentative $\mathscr{C}$

A. n'admet pas d'asymptote

B. n'admet que des asymptotes verticales

C. admet la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote horizontale et les droites d'équation $x = 1$ et $x = -3$ comme asymptotes verticales

D. admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale

Question 13 : Le réel $y = f(x)$, lorsqu'il est défini, peut s'écrire

A. $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$ où a et b sont des constantes

B. $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-3} + c$ où a, b et c sont des constantes

C. $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3} + c$ où les constantes a, b et c vérifient le système $\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 3,\\ a+b+c & = & 6\\ 3a-b-3c & = & -1\end{array}\right.$

D. $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-3} + c$ où les constantes a, b et c vérifient le système $\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 3,\\ a+b+2c & = & 6\\ 3a-b-3c & = & -1\end{array}\right.$

Question 14 : On note F une primitive de la fonction continue f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ et on note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f et son asymptote parallèle à l'axe des abscisses, si elle existe, et les droites d'équation $x = 2$ et $x = \lambda$, où λ est un réel strictement supérieur à 2. On a

A. $F(x) = \ln\left[\dfrac{(x+1)}{(x+3)}\right]^2 + 3x$ pour tout x appartenant à $]1\ ;\ +\infty[$

B. $F(x) = \ln(x-1)(x+3)^2$ pour tout x appartenant à $]1\ ;\ +\infty[$

C. $\mathscr{A}(\lambda) = F(\lambda) - F(2) = \ln\left[\dfrac{(\lambda-1)}{(\lambda+3)}\right]^2 + \ln(25)$

D. $\mathscr{A}(\lambda) = \ln[(\lambda-1)(\lambda+3)]^2 - \ln(25)$

Question 15 : $\mathscr{A}(\lambda)$

A. tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$

B. tend vers $\ln(25)$ lorsque λ, tend vers $+\infty$

C. tend vers $-\ln(25)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

D. est égale à $2(\ln 5 - \ln 2)$ lorsque $\lambda = 5$