DEVOIR MAISON n° 11 : *Travailler avec des valeurs exactes* 3ème A

Attention : ce devoir est à effectuer sans utiliser la calculatrice, sauf dans la question 3 f)

Partie 1 : des valeurs exactes

ABC est un triangle équilatéral de côté 1. Soit H le pied de la hauteur issue de A.

a) Fais un schéma

b) Calcule la **valeur exacte** de la valeur AH à l'aide du théorème de Pythagore.

c) A l'aide de la question b) démontre que $\cos\widehat{ACH} = \frac{1}{2}$ et $\sin\widehat{ACH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) En utilisant ton cours, la méthode et les résultats précédents, effectue sur ta copie les **calculs nécessaires** pour trouver les **valeurs exactes** permettant de compléter le tableau suivant.

(tu recopieras le tableau complété sur ta copie après avoir écrit les calculs)

x	0°	30°	60°	90°
$\cos x$				
$\sin x$				
$\tan x$				

Partie 2 : hauteur et côté

a) Soit un triangle équilatéral DEF de côté c et de hauteur h.

Démontre que la hauteur h vérifie l'égalité suivante $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

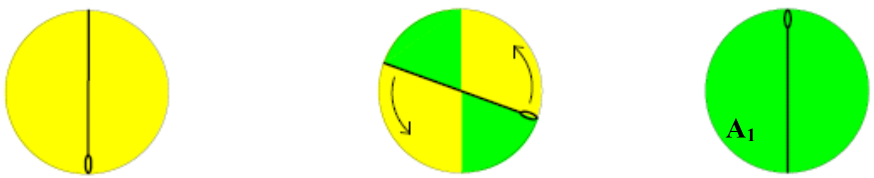
b) Déduis-en l'expression de a en fonction de h : $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$

Partie 3 : la question de Kakeya

Partie 3 : la question de Kakeya. Cette question a été posée pour la 1ère fois au début du XX^{ème} siècle par le mathématicien japonais Sôichi Kakeya :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

● **) LE DISQUE** : La première réponse qui vient à l'esprit est le disque dont l'aiguille serait le diamètre et qu'une simple rotation suffirait alors à renverser complètement.



a) Exprime l'aire A_1 **en fonction de a** pour une aiguille de longueur a cm.

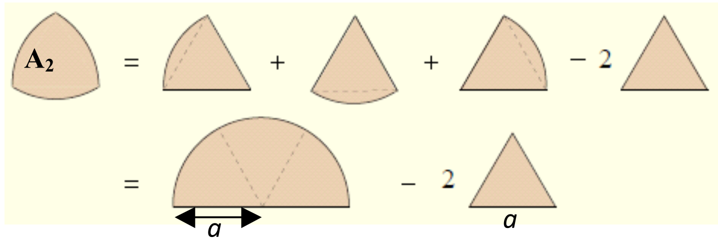
●**LE TRIANGLE DE REULEAUX** : Il existe d'autres façons de déplacer l'aiguille qui balaient de plus petites surfaces. Par exemple, au lieu de faire tourner l'aiguille autour de son centre, on lui fait effectuer des rotations successives de 60 ° autour de ses extrémités. Une figure se dessine alors d'elle-même : on l'appelle le triangle de Reuleaux.

b) Dessine le triangle de Reuleaux correspondant à une aiguille de 10 cm.

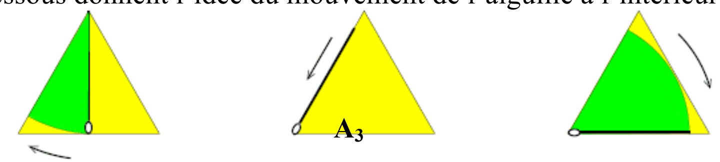
c) En utilisant la décomposition proposée ci-dessous, démontre que l'aire A_2 d'un triangle de Reuleaux construit à partir d'une aiguille de longueur a cm est égale à :

$A_2 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}a^2$

Utilise le résultat de la question a) de la partie 2)



● **LE TRIANGLE EQUILATERAL** : On peut aussi retourner une aiguille dans un triangle équilatéral dont **la hauteur** est de la même taille que l'aiguille. Les dessins ci-dessous donnent l'idée du mouvement de l'aiguille à l'intérieur d'un tel triangle.



d) Construis aux instruments le triangle équilatéral de hauteur 10 cm en expliquant brièvement ta méthode *(tu pourras utiliser les mesures de ses angles)*.

e) Exprime l'aire A_3 d'un triangle équilatéral de **hauteur a cm en fonction de a** (*utilise le résultat de la question b) de la partie 2*).

f) Application numérique : En utilisant les formules établies en a), c) et e), calcule une valeur approchée à l'unité des aires A_1, A_2 et A_3 pour a = 10 cm.

g) En conclusion, parmi ces trois surfaces A_1, A_2 ou A_3 , quelle est celle qui répond le mieux à la question de Kakeya ?