

Expérimentation

E. Reyssat

Université de Caen, Laboratoire Nicolas Oresme

November 22, 2007

EXPÉRIMENTER

EXPÉRIMENTER

c'est

- Se laisser déconcerter

EXPÉRIMENTER

c'est

- Se laisser déconcerter
- Tâtonner dans le brouillard ou au clair de lune

EXPÉRIMENTER

c'est

- Se laisser déconcerter
- Tâtonner dans le brouillard ou au clair de lune
- Approcher la réalité (parfois illusoire).

EXPÉRIMENTER c'est

- Se laisser déconcerter
- Tâtonner dans le brouillard ou au clair de lune
- Approcher la réalité (parfois illusoire).
- Vérifier la théorie (solidité des preuves, optimalité, nécessité des hypothèses, ...)

EXPÉRIMENTER c'est

- Se laisser déconcerter
- Tâtonner dans le brouillard ou au clair de lune
- Approcher la réalité (parfois illusoire).
- Vérifier la théorie (solidité des preuves, optimalité, nécessité des hypothèses, ...)
- Fournir des bases à des conjectures, sources de nouveaux outils et théories.

EXPÉRIMENTER c'est

- Se laisser déconcerter
- Tâtonner dans le brouillard ou au clair de lune
- Approcher la réalité (parfois illusoire).
- Vérifier la théorie (solidité des preuves, optimalité, nécessité des hypothèses, ...)
- Fournir des bases à des conjectures, sources de nouveaux outils et théories.
- Se pencher sur les problèmes d'effectivité (factorialité, enveloppe convexe, équations diophantiennes,...)

Conjecture : énoncé dont on est convaincu qu'il est vrai mais qu'on ne sait pas prouver.

Elle devient théorème le jour où elle est prouvée.

A. Weil: *ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables*

Démarche ancienne (Euler, Gauss,...)

Matériel nouveau : ordinateurs et calculettes, internet

Explicité : épreuve bac, Experimental mathematics:

<http://www.expmath.org/>

COÏNCIDENCES

$$x \approx y$$

Y a-t-il égalité ? Pourquoi ?

COÏNCIDENCES

$$x \approx y$$

Y a-t-il égalité ? Pourquoi ?

$$\pi^4 + \pi^5 = 403.42$$

$$e^6 = 403.42$$

COÏNCIDENCES

$$x \approx y$$

Y a-t-il égalité ? Pourquoi ?

$$\pi^4 + \pi^5 = 403.428$$

$$e^6 = 403.428$$

COÏNCIDENCES

$$x \approx y$$

Y a-t-il égalité ? Pourquoi ?

$$\pi^4 + \pi^5 = 403.4287$$

$$e^6 = 403.4287$$

COÏNCIDENCES

$$x \approx y$$

Y a-t-il égalité ? Pourquoi ?

$$\pi^4 + \pi^5 = 403.42877\dots$$

$$e^6 = 403.42879\dots$$

$$x = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$y = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \\ &= 7.381\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} \\ &= 7.381\end{aligned}$$

$$x = y \quad ?$$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \\ &= 7.381\,175\,940\,89\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} \\ &= 7.381\,175\,940\,89\end{aligned}$$

$$x = y \quad ?$$

$$x = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$y = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

$$x = y \quad ?$$

Oui : même polynôme minimal $x^4 - 54x^2 - 40x + 269$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \\ &= 7.381\,175\,940\,89\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} \\ &= 7.381\,175\,940\,89\end{aligned}$$

$$x = y \quad ?$$

Oui : même polynôme minimal $x^4 - 54x^2 - 40x + 269$

Sûr ?

Autre exemple (Ramanujan) :

$$\sqrt{\sqrt[3]{28} - \sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{98} - \sqrt[3]{28} - 1 \right)$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$
$$=$$
$$163.00$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$
$$=$$
$$163.000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$
$$=$$
$$163.0000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 0

$$\log(-1) = i\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 0

contredit Schanuel ?

$$\log(-1) = i\pi \implies \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

C'est "la définition" de π

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 000

$$\log(-1) = i\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 000 000

$$\log(-1) = i\pi \implies \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 000 000 000

$$\log(-1) = i\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 000 000 000 000 000

$$\log(-1) = i\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

$$\log(-1) = i\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

$$\frac{\log^2(640320^3 + 744)}{\pi^2}$$

=

163.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 023 216 ...

$$\log(-1) = i\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log^2(-1)}{\pi^2} = -1.000$$

Explication : fonction modulaire j .

Le nombre 163 est spécial : L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ est principal.

Autres exemples (expérimentation de Gauss : Heegner).

Calculer

$$\left(\sum_{\mathbb{Z}} e^{-(n/100)^2} \right)^2$$

Calculer

$$\left(\sum_{\mathbb{Z}} e^{-(n/100)^2} \right)^2$$

=

31 415

$$\left(\sum_{\mathbb{Z}} e^{-(n/100)^2} \right)^2$$

=

31 415.9265 358 979

$$\left(\sum_{\mathbb{Z}} e^{-(n/100)^2} \right)^2$$

=

31 415.9265 358 979 323 846 264 338 327 950 288 419 716

$$\left(\sum_{\mathbb{Z}} e^{-(n/100)^2} \right)^2$$

=

31 415.9265 358 979 323 846 264 338 327 950 288 419 716
939 937 510 582 097 494 459 230 781 640 628 620 899 862
803 482 534 211 706 798 214 808 651 328 230 664 709 384
460 955 058 223 172 535 940 812 848 111 745 028 410 270
193 852 110 555 964 462 294 895 493 038 196 442 881 097
566 593 344 612 847 564 823 378 678 316 527 120 190 914
564 856 692 346 034 861 045 432 664 821 339 360 726 ...

$$\left(\sum_{\mathbb{Z}} e^{-(n/100)^2} \right)^2$$

=

31 415.9265 358 979 323 846 264 338 327 950 288 419 716
939 937 510 582 097 494 459 230 781 640 628 620 899 862
803 482 534 211 706 798 214 808 651 328 230 664 709 384
460 955 058 223 172 535 940 812 848 111 745 028 410 270
193 852 110 555 964 462 294 895 493 038 196 442 881 097
566 593 344 612 847 564 823 378 678 316 527 120 190 914
564 856 692 346 034 861 045 432 664 821 339 360 726 ...

= 10 000 π !!! ?

On calcule 10000 décimales pour être sûr : long mais OK.

On peut dormir tranquille

On calcule 10000 décimales pour être sûr : long mais OK.

On peut dormir tranquille

Pb : pas moyen de s'endormir

On calcule 10000 décimales pour être sûr : long mais OK.

On peut dormir tranquille

Pb : pas moyen de s'endormir

Il nous manque la preuve !

Explication : réviser son cours sur les fonctions modulaires ?

Explication :

$$\theta(q) = \sum_{\mathbb{Z}} q^{n^2}$$

vérifie (Poisson) : si $q = e^{-\pi}$ alors

$$\theta(q^{1/s}) = \sqrt{s} \theta(q^s).$$

Si s est grand, q^s est petit : la deuxième somme est presque réduite à son terme central $q^0 = 1$, avec erreur d'environ $2q^s$:

Explication :

$$\theta(q) = \sum_{\mathbb{Z}} q^{n^2}$$

vérifie (Poisson) : si $q = e^{-\pi}$ alors

$$\theta(q^{1/s}) = \sqrt{s} \theta(q^s).$$

Si s est grand, q^s est petit : la deuxième somme est presque réduite à son terme central $q^0 = 1$, avec erreur d'environ $2q^s$: si $s = 10\,000 \pi$ on obtient

$$\sum_{\mathbb{Z}} e^{-(n/100)^2} \approx 100\sqrt{\pi}$$

avec erreur $\approx 2 \cdot e^{-10\,000 \pi^2} \approx 10^{-42\,863}$

On peut dormir !

Un autre type de coïncidence : retrouver les mêmes nombres dans des contextes différents : formes modulaires et le monstre au clair de lune.

Un autre type de coïncidence : retrouver les mêmes nombres dans des contextes différents : formes modulaires et le monstre au clair de lune.

$$j(z) = 1/q + 744 + 196884q + 2149760q^2 + \dots \text{ où } q = e^{2i\pi z}$$

La plus petite représentation non triviale du "monstre" est de dimension 196883. Coïncidence ?

Déterminants

Déterminants

Quelle est la moyenne ?

Déterminants

Quelle est la moyenne ?

maxima

Déterminants

$$\det(|i - j|) \neq 0 ?$$

Le groupe "des commutateurs" $aba^{-1}b^{-1}$

Le groupe "des commutateurs" $aba^{-1}b^{-1}$

Les commutateurs forment-ils un groupe ?

Le groupe "des commutateurs" $aba^{-1}b^{-1}$

Les commutateurs forment-ils un groupe ?

Abélien : oui. S_3 : oui. D_8, H_8 : oui.

GAP

```
for n in [1..200] do L:=AllGroups( n );
  for G in L do
    e:=Elements(G); D:=DerivedSubgroup( G ); LL:=[];
    for a in G do for b in G do
      c:=Comm(a,b); if c in L then else Add(LL,c); fi;
    od; od;
    d:=Length(Elements(D)); l:=Length(Elements(LL));
    if d>l then Print("!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!\n");fi;
    Print(d/l," ",Length(e)," ",d,"/",l,"\n");
  od;
od;
```

Résultat : il existe un groupe d'ordre 96 avec exactement 29 commutateurs

Résultat : il existe un groupe d'ordre 96 avec exactement 29 commutateurs

Lagrange dit qu'ils ne forment pas un sous-groupe.

Résultat : il existe un groupe d'ordre 96 avec exactement 29 commutateurs

Lagrange dit qu'ils ne forment pas un sous-groupe.

Résultat théorique en parallèle sur un groupe infini

La conjecture *abc* (analogie polynômes-entiers)

Pb *abc* : si $a + b = c$ (étrangers) alors $c \leq r = \prod_{p|abc} p$

La conjecture *abc* (analogie polynômes-entiers)

Pb *abc* : si $a + b = c$ (étrangers) alors $c \leq r = \prod_{p|abc} p$

On relâche : $c \ll r$?

conjecture *abc* : si a, b, c étrangers et $a + b = c$ alors $c \ll_{\varepsilon} r^{1+\varepsilon}$.
ça entraîne facilement Fermat asymptotique

La conjecture *abc* (analogie polynômes-entiers)

Pb *abc* : si $a + b = c$ (étrangers) alors $c \leq r = \prod_{p|abc} p$

On relâche : $c \ll r$?

conjecture *abc* : si a, b, c étrangers et $a + b = c$ alors $c \ll_{\varepsilon} r^{1+\varepsilon}$.
ça entraîne facilement Fermat asymptotique

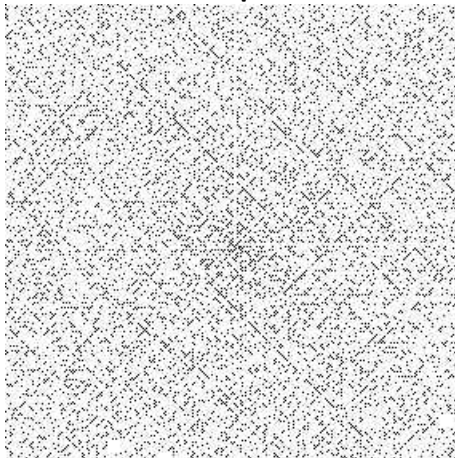
Expérience : calculer des exemples tels que $c = r^{\alpha}$ avec α grand
Record : $\alpha \approx 1,6299$ correspondant à $109 \cdot 3^{10} + 2 = 23^5$.

Combien y a-t-il de spirales sur une pomme de pin ?

Combien y a-t-il de spirales sur une pomme de pin ?

Maple

Nombres premiers



$x^2 + x + 41$ premier pour $0 \leq x \leq 6$

donc

$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right]$ est factoriel

$x^2 + x + 41$ premier pour $0 \leq x \leq 6$

donc

$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right]$ est factoriel

donc

$x^2 + x + 41$ premier pour $-40 \leq x \leq 39$

$x^2 + x + 41$ premier pour $0 \leq x \leq 6$

donc

$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right]$ est factoriel

donc

$x^2 + x + 41$ premier pour $-40 \leq x \leq 39$

Au fait, 163 ???

Hypothèse de Riemann :

$\zeta(s) = \sum n^{-s}$ a ses zéros non triviaux (négatifs pairs) sur
 $\Re(s) = 1/2$

Hypothèse de Riemann :

$\zeta(s) = \sum n^{-s}$ a ses zéros non triviaux (négatifs pairs) sur
 $\Re(s) = 1/2$

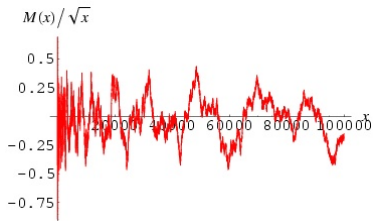
10^{13} zéros calculés, tous simples sur la droite.

Conjecture "de Mertens"

$$M(n) = \sum_1^n \mu(k) \text{ où } \mu(k) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } k = p_1 \dots p_r \text{ distincts} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Expérimentation sur 10000 valeurs :

$$|M(x)| < \sqrt{x} \quad ?$$



$$|M(x)| < \sqrt{x} \quad ?$$

Importante : H.R. $\iff M(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\epsilon})$

$$|M(x)| < \sqrt{x} \quad ?$$

Importante : H.R. $\iff M(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\epsilon})$

Mais la conjecture originale est **fausse** bien que vérifiée jusque 10^{14} .

Autres domaines d'expérimentation mathématique

Géométrie

Algorithmique : primalité, tresses, syracuse,

Résolution numérique approchée (eq. diff.)

Probabilités (Buffon)

Conjectures récemment résolues : 4 couleurs, empilements.

J'aurais voulu parler de

- "Integer sequences" et relations entières.
- Décimales de π , normalité, goutte à goutte
- Reconnaissance d'images : visages propres

On expérimente tous de fait, plus ou moins, sur machine ou non.
Essais, fausses routes, retours en arrière, hésitations.

On expérimente tous de fait, plus ou moins, sur machine ou non.
Essais, fausses routes, retours en arrière, hésitations.

Echecs inavoués avec guide, tracé hésitant de nouvelles voies.

On expérimente tous de fait, plus ou moins, sur machine ou non.
Essais, fausses routes, retours en arrière, hésitations.

Echecs inavoués avec guide, tracé hésitant de nouvelles voies.

C'est quand on a expérimenté que l'on devient expérimenté.

On expérimente tous de fait, plus ou moins, sur machine ou non.
Essais, fausses routes, retours en arrière, hésitations.

Echecs inavoués avec guide, tracé hésitant de nouvelles voies.

C'est quand on a expérimenté que l'on devient expérimenté.

On peut commencer à prouver.

