

Mais qu'est-ce qu'un polyèdre?



Deux questions en préambule :

- Quelle définition donnez-vous d'un polyèdre?

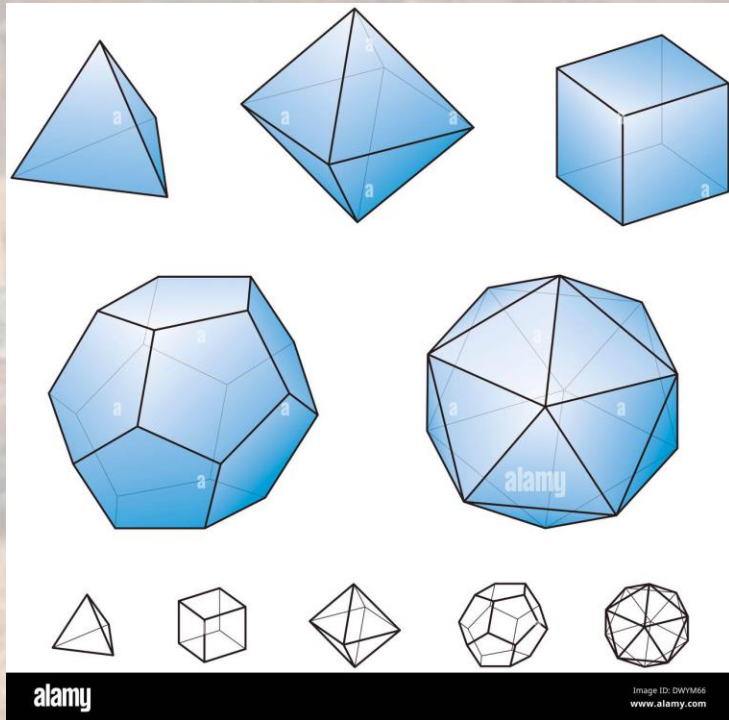
- Combien y a-t-il de polyèdres réguliers?

Etat des lieux



Venise : Ucello vers 1430

Rappels sur l'histoire des polyèdres réguliers



The Kepler-Poinsot Polyhedra



$\{5/2, 5\}$
Small stellated
dodecahedron
Face: pentagram



$\{5/2, 3\}$
Great stellated
dodecahedron
Face: pentagram



$\{3, 5/2\}$
Great
icosahedron
Face: triangle



$\{5, 5/2\}$
Great
dodecahedron
Face: pentagon

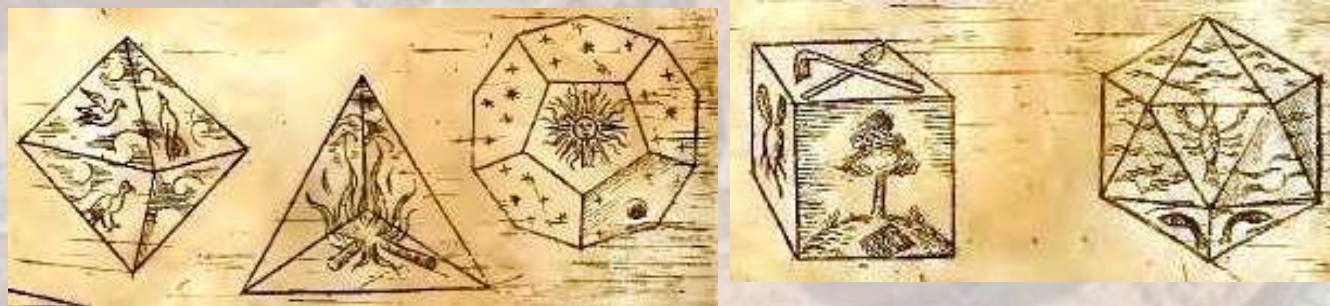
Les 5 polyèdres réguliers **convexes** sont connus depuis l'antiquité comme le résume l'article de *Wikipedia* :

Il semble que Pythagore lui-même (vers 530 av. J.-C.) ou le pythagoricien Archytas de Tarente (vers 360 av. J.-C.), ait découvert les trois premiers des cinq : le tétraèdre (la pyramide), l'hexaèdre (le cube), le dodécaèdre. Ensuite, Théétète d'Athènes (mort en 395 ou en 369 av. J.-C.) découvrit les deux autres : l'octaèdre et l'icosaèdre.

Platon les utilise dans le Timée, qui date de 358 av. J.-C.

Euclide les étudie dans ses Éléments (vers 300 av. J.-C.).

https://fr.wikipedia.org/wiki/Poly%C3%A8dre_r%C3%A9gulier



Tétraèdre : le feu; **cube** (lourd et difficile à mouvoir): la terre, **octaèdre**: l'air, **icosaèdre** (relativement rond et fluide) : l'air . Ce sont les éléments du monde sublunaire, celui des planètes par opposition au monde supralunaire éternel et invariable.

- le **dodécaèdre**: frontière entre les 2 mondes.

Euclide

[Euclide d'Alexandrie](#) (-320? ; -260?) démontre que ces polyèdres (*convexes*) sont **exactement au nombre de cinq**. Pour cela, Il procède de la manière suivante, en remarquant qu'il faut au moins 3 polygones réguliers pour avoir un sommet : pour les triangles équilatéraux il en faut 3, 4, ou 5 car à 6 on a un hexagone qui est plan ; pour 3 cela donne le tétraèdre etc. Et il fait de même avec les carrés : il ne peut pas y avoir plus de 3 carrés car 4 carrés en un sommet forment une figure plane. Et ainsi de suite.

SCHOLIE.

Or outre les cinq figures solides cy-dessus declarées, on n'en peut pas trouver d'autres comprises de superficies planes equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou de deux autres superficies planes, on ne comprendra aucun solide, ne pouvant iceux constituer un angle solide. De trois triangles equilateraux, est constitué l'angle de la pyramide ; de quatre, l'angle

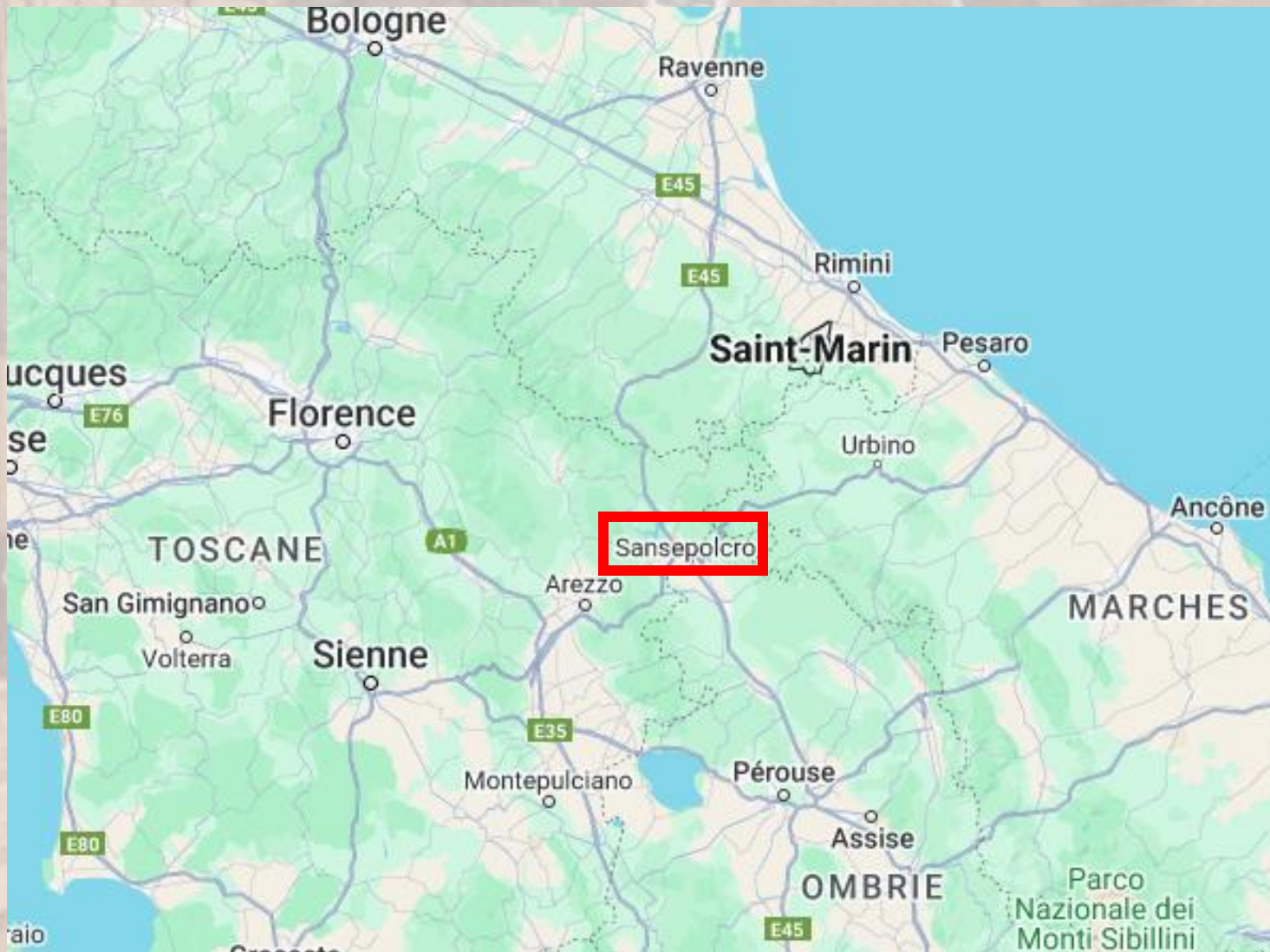
Euclide consacre son 13^e livre à la construction à la règle et au compas des 5 solides de Platon, inscrits dans une sphère de diamètre donné.

PROB. 5. PROP. XVII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn dodecaedre: Et monstrier que son costé est ligne irrationele, appellee residu.

Soit le cube AB inscriptible en la sphere donnee, duquel les deux plans extérieurs AC & DB, se rencontrent à angles droicts à la ligne de commune section DC: & d'iceux plans tous les costez soient coupeez en deux également, sçavoir AC, par les deux lignes EF, GH se couppans au point I; & DB, par les lignes KL & HM se couppans au point N. Item les trois lignes KN, NL, HI soient coupees en la moyenne & extreme raison aux points O, P, Q, desquelles les plus grands segmens soient NO, NP, IQ: Et par la 12. prop. 11. soient leuees les deux lignes OR, PS perpendiculaires au plan DB: mais QT au plan AC, lesquelles soient posees egales aux trois segmens ON, NP, IQ: Puis soient menees les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Je dis que DRST est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan, & equiangle.

La Renaissance



Polyptych of the
Misericordia
Piero della Francesca

Sansepolcro actuellement 16380 habitants.

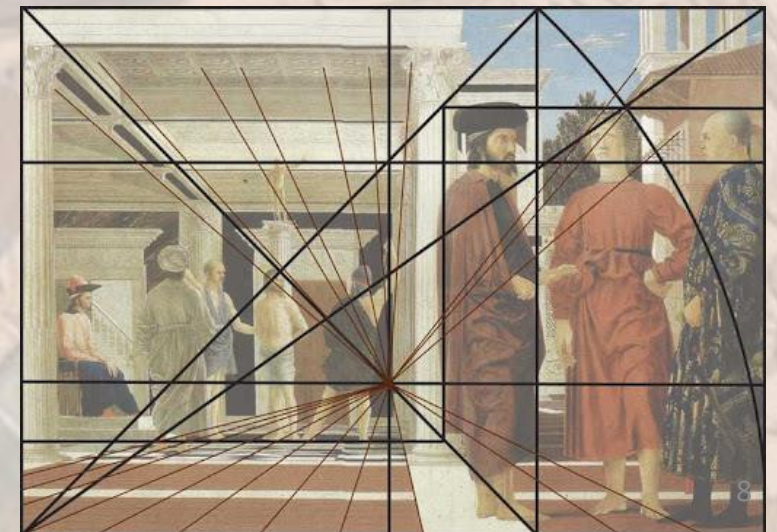
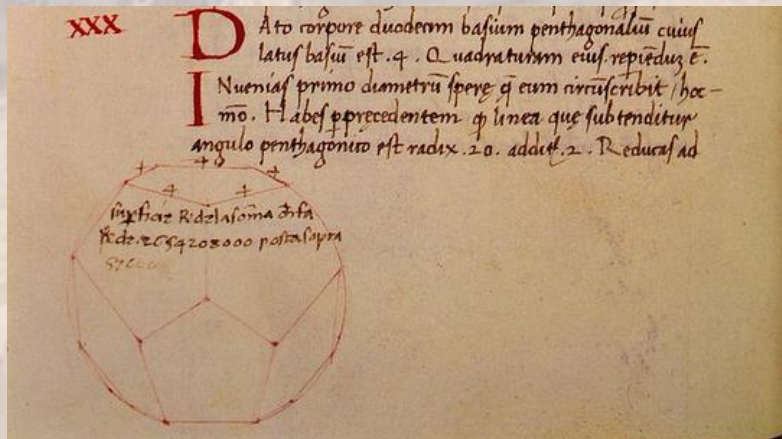
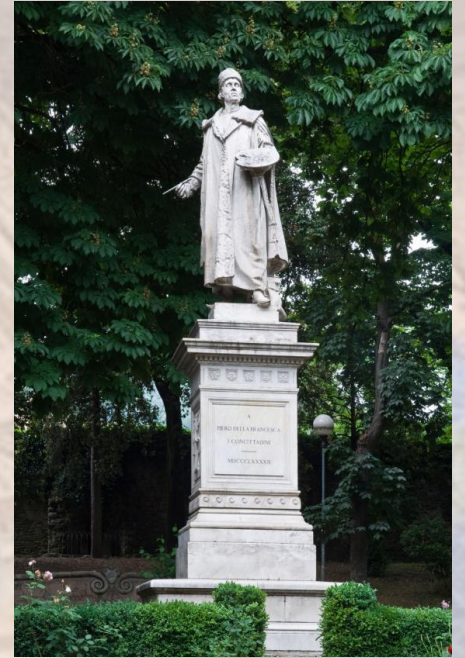
Piero della Francesca (vers 1415-1492)

Il naît à *Sansepolcro* en Ombrie. Il est connu surtout comme artiste et théoricien de la perspective. Mais ce fut aussi un mathématicien qui a écrit deux traités :

- *Trattato d'abaco*, qui est loin d'être une liste d'exercices d'arithmétique commerciale. Piero traite les équations du 3^e, 4^e et 5^e degrés ; les [polyèdres réguliers](#) et le calcul de volumes complexes ;
- *Libellus de quinque corporibus regularibus*, que Piero considérait comme son monument, est une extension de son *Trattato d'abaco* avec l'étude des polyèdres réguliers et [semi-réguliers](#).

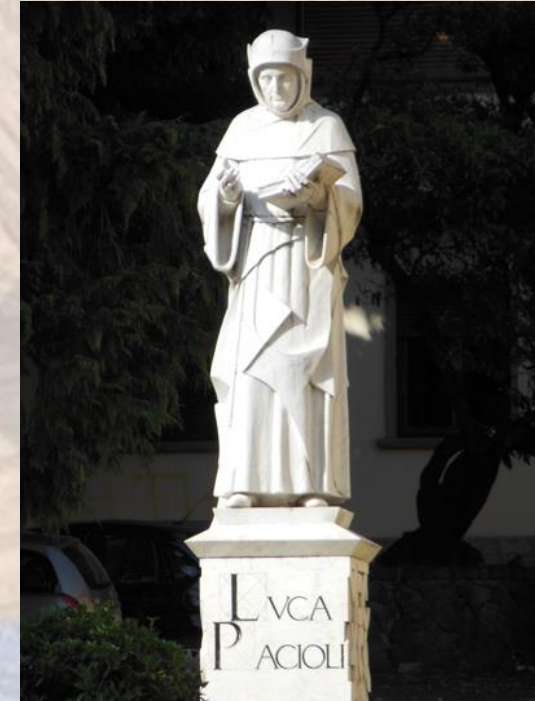
Ses oeuvres (codex) ont été oubliées et retrouvées dans les années 1900.

Source https://fr.wikipedia.org/wiki/Piero_della_Francesca

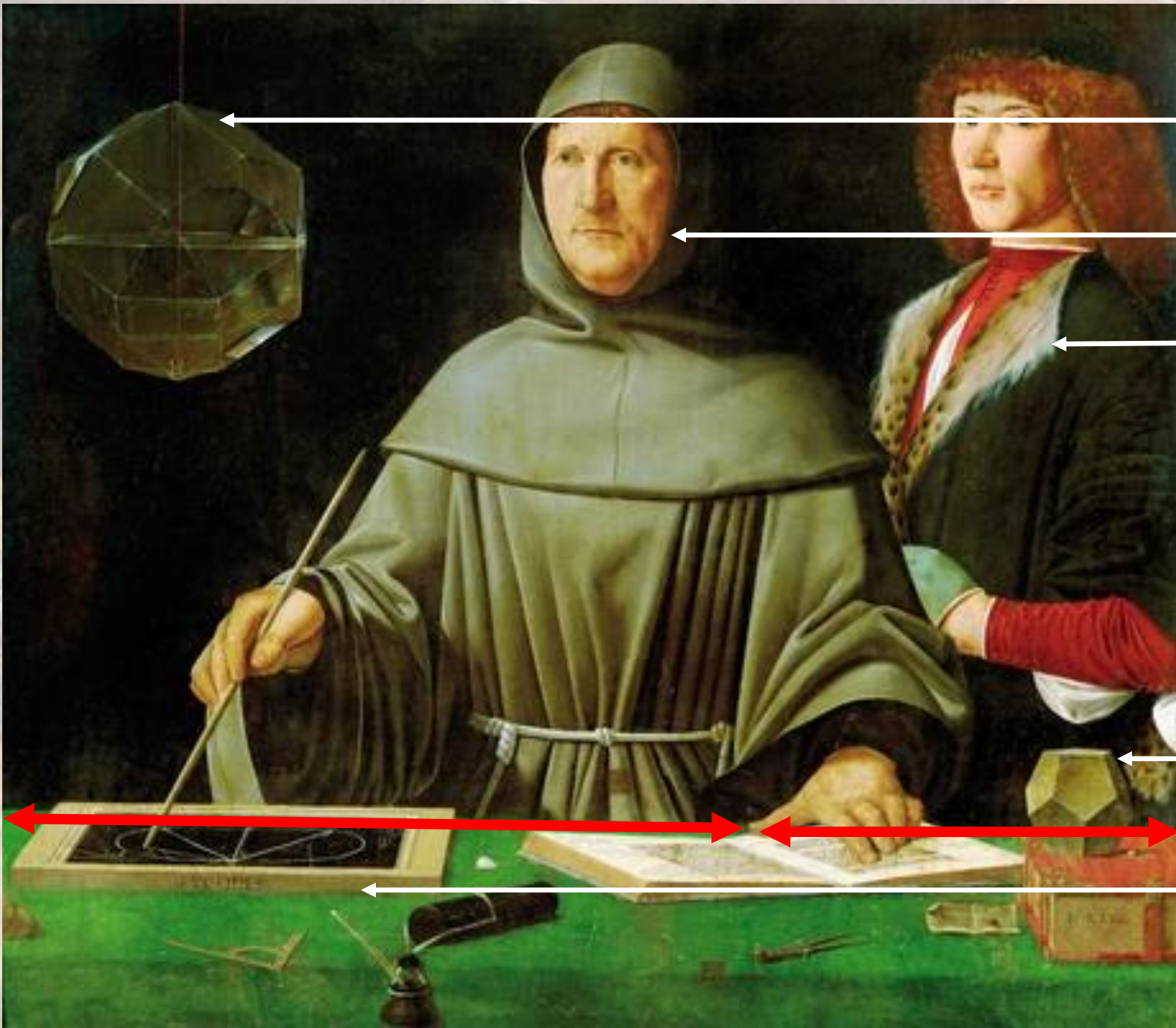


Luca Pacioli (1445-1517)

Il nait aussi à *Sansepolcro*, fait une partie de ses études à Venise, a été élève d'Alberti, de Piero della Francesca, puis va enseigner les mathématiques dans de nombreuses villes du nord de l'Italie dont Milan où il se lie avec Léonard de Vinci qu'il initiera aux mathématiques, et à Venise où il enseignera les *Eléments* d'Euclide.



Angelo Tricca (XIXe siècle), *Piero della Francesca enseignant les mathématiques à Luca Pacioli*. musée de Sansepolcro



Petit rhombicuboctaèdre
(terre, air, eau, feu)

Luca Pacioli

Guidobaldo de Montefeltro fils
du duc d'Urbino

Dodécaèdre (divine proportion)

Présence du de la divine
proportion

Référence aux anciens :
Platon, Euclide, règle compas

On doit à Luca Pacioli plusieurs ouvrages :

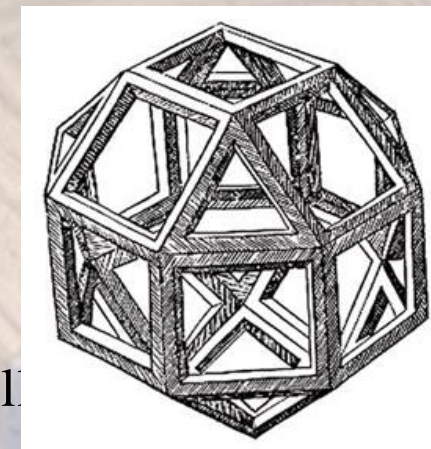
Summa de arithmetica, geometria, de proportioni et de proportionalita,

De divina proportione (la dénomination *nombre d'or* date du XIXe siècle).

Les dessins de ce dernier ouvrage sont les oeuvres de Léonard de Vinci.

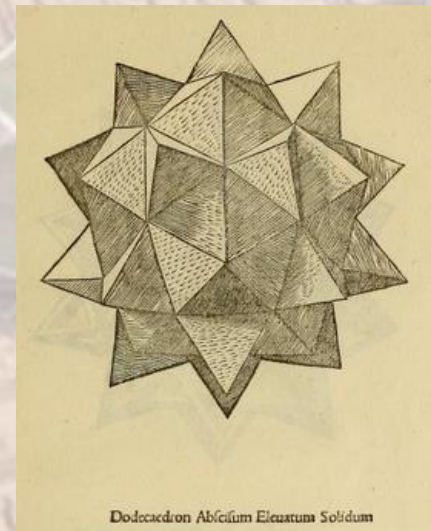
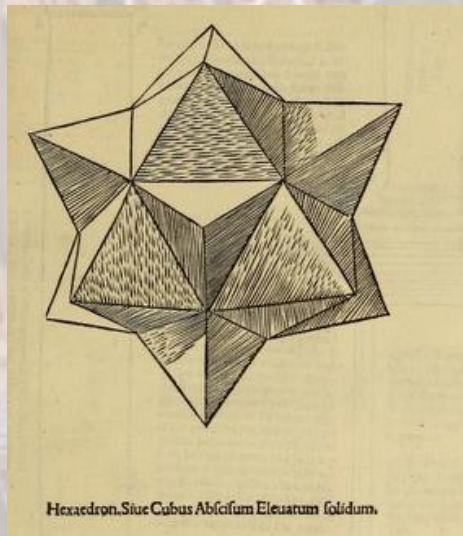
<https://archive.org/details/de-divina-proportione/page/n11/mode/2up>

Quant au premier ouvrage, les historiens semblent s'accorder que Pacioli a plagié del Franscesca sans jamais le citer.



*Hommage de la société Abbocca de Sansepolcro (homéopathie)
à ces deux mathématiciens célèbres ...*

Dans son ouvrage *La Divine Proportion* (écrit entre 1496 et 1498), on retrouve de nombreuses perspectives de solides parmi lesquelles celles des polyèdres réguliers, semi réguliers et étoilés (stellations) dont on pense qu'elles sont de la main de Léonard de Vinci.



Mais pas de trace du petit dodécaèdre étoilé fait en mosaïque par Ucello (1397-1475) vers 1430.

Ucello rejoint en [1424](#) la *Compagnie des peintres de San Luca* et sera appelé un an plus tard à refaire les mosaïques de la [basilique de San Marco](#) ([Venise](#)) détruites par un incendie.

Ucello reproduit ce dodécaèdre étoilé et d'autres solides en mosaïque dans une des chapelles de l'église *san Pantalon* de Venise.

Or Luca Pacioli est à Venise de 1464 à 1470 et y retournera de nombreuses fois. Sans pouvoir remarquer la particularité de ce polyèdre (?).



Mosaïques de san Pantalon



Bataille San Romano 1432

Le solide d'Ucello a donc été vu comme une stellation parmi d'autres et complètement ignoré durant deux siècles. Cette hypothèse semble corroborée par Jean-Jacques Dupas qui dans son blog affirme :

C'est Siegmund Günther qui dans un ouvrage de 1876 remarqua le premier cette instance du petit dodécaèdre étoilé à Saint-Marc de Venise.

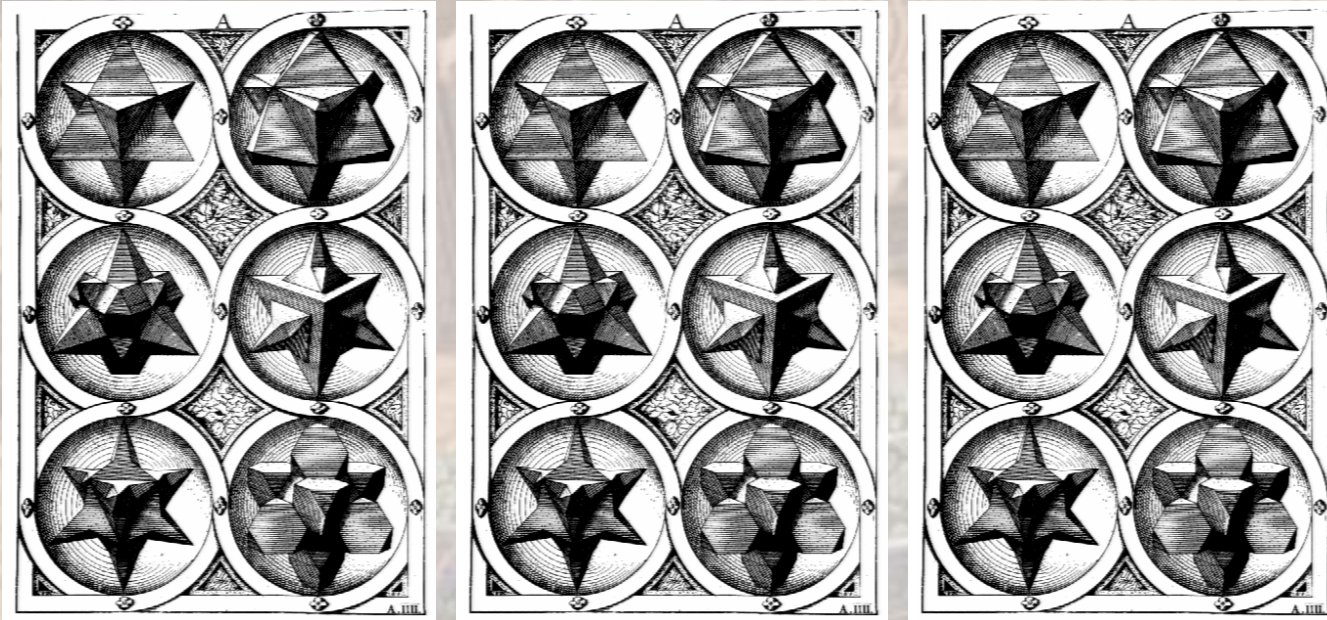
Lucio Saffaro, aurait découvert dans la chapelle San Pantalon, de l'église San Pantalon à Venise deux autres pavages représentant la deuxième étoile de Kepler, ces pavages auraient soufferts de la réfection de l'église depuis, mais auraient pu être l'œuvre d'Ucello.

Pourant Luca Pacioli a longtemps vécu et enseigné à Venise. Pourquoi ne l'a-t-il pas remarqué? Faut-il en conclure que les mathématiciens de passage à Venise ne regardaient que vers le ciel (ou les magnifiques voûtes de la basilique San Marco) ?

<https://playmaths.blog4ever.com/les-polyedres-a-la-renaissance>

Wentzel Jamnitzer (1507-1585)

C'est un orfèvre et graveur allemand ayant surtout œuvré à Nuremberg. Il semble avoir été en contact avec Dürer. Il est célèbre pour avoir publié *Perspectiva Corporum Regularium* (*Perspective des solides réguliers*) en 1568, dont sont tirées les illustrations suivantes. Il semble que le petit dodécaèdre apparaît, ainsi qu'un solide pouvant ressembler à grand dodécaèdre étoilé.



https://archive.org/details/gri_3312501288960_2/page/n17/mode/2up

Kepler (1571-1630)

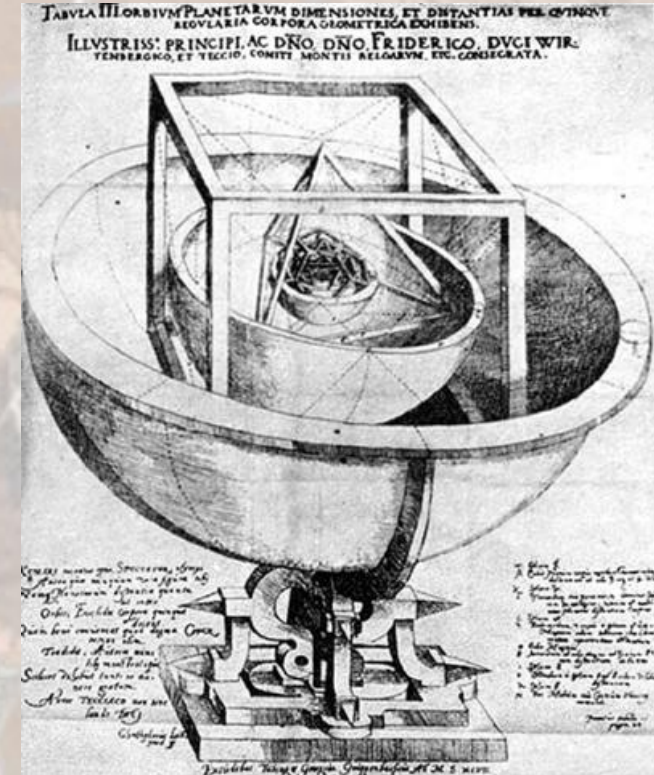
Il s'est intéressé aux solides réguliers pour construire sa première cosmologie : il y a 6 planètes car il y a 5 solides parfaits écrit-il en 1595. Et ces solides peuvent s'emboîter comme on le voit sur la gravure ci-dessus.

« Il y a six planètes parce qu'il y a cinq solides parfaits, un solide parfait s'intercalant exactement entre deux planètes »

Selon Kepler:

- Vénus correspond à l'octaèdre,
- la Terre à l'icosaèdre,
- Mars au Dodécaèdre,
- Jupiter au tétraèdre
- Saturne au cube.

Il pense donc que les distances entre les planètes et le Soleil dans le système héliocentrique (Copernic 1473-1543) sont déterminées en fonction des cinq solides réguliers (établis par Platon), si on suppose que l'orbite d'une planète est circonscrite à un solide et déterminée par un autre solide (il croit encore, à l'époque, que les orbites sont circulaires).



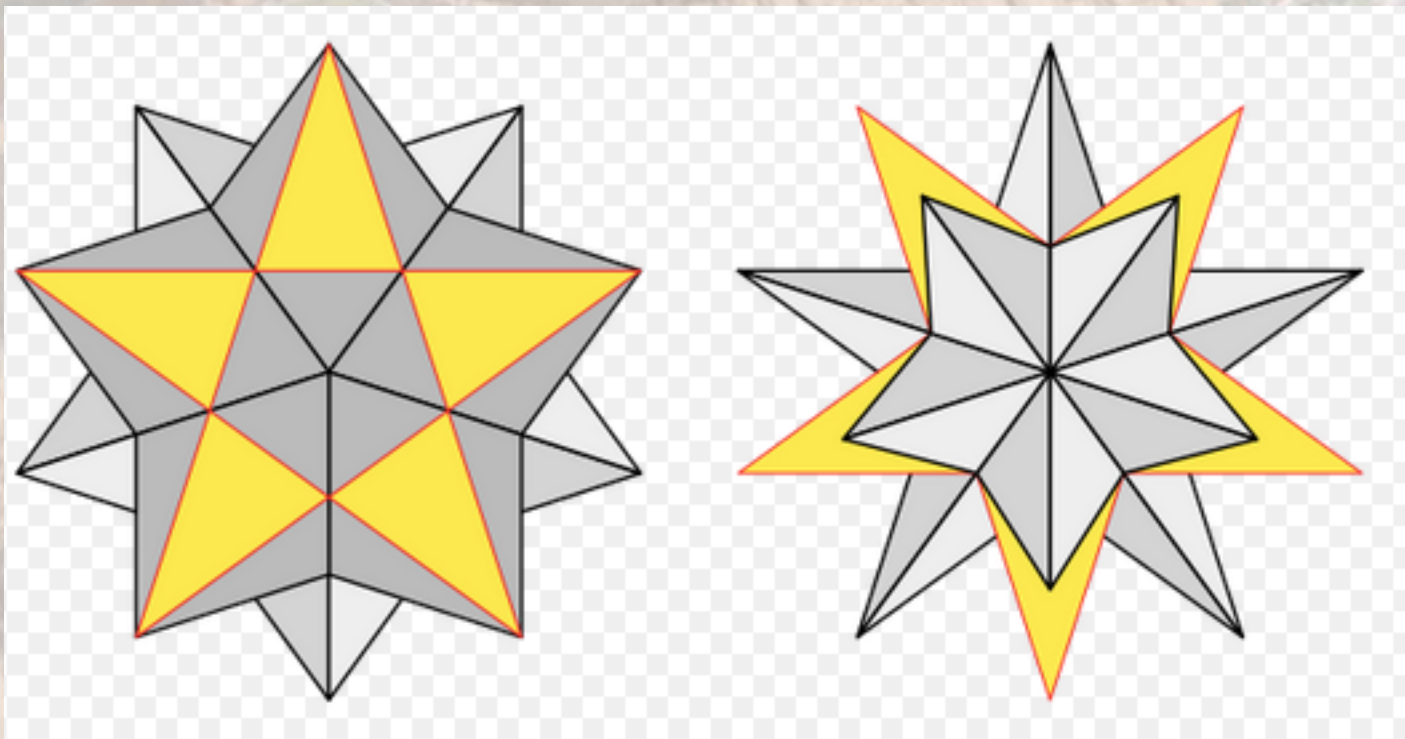
La théorie des solides emboîtés, qui amènera plus tard Kepler à découvrir deux nouveaux solides réguliers

- Le [petit dodécaèdre étoilé](#) a été découvert en [1619](#). Il a 12 faces qui sont des pentagones étoilés, 12 sommets et 30 arêtes. C'est une stellation du dodécaèdre.

En chaque sommet se réunissent cinq faces

- Le [grand dodécaèdre étoilé](#), découvert par Kepler, formé des mêmes 12 pentagones étoilés, qui a 20 sommets et aussi 30 arêtes.

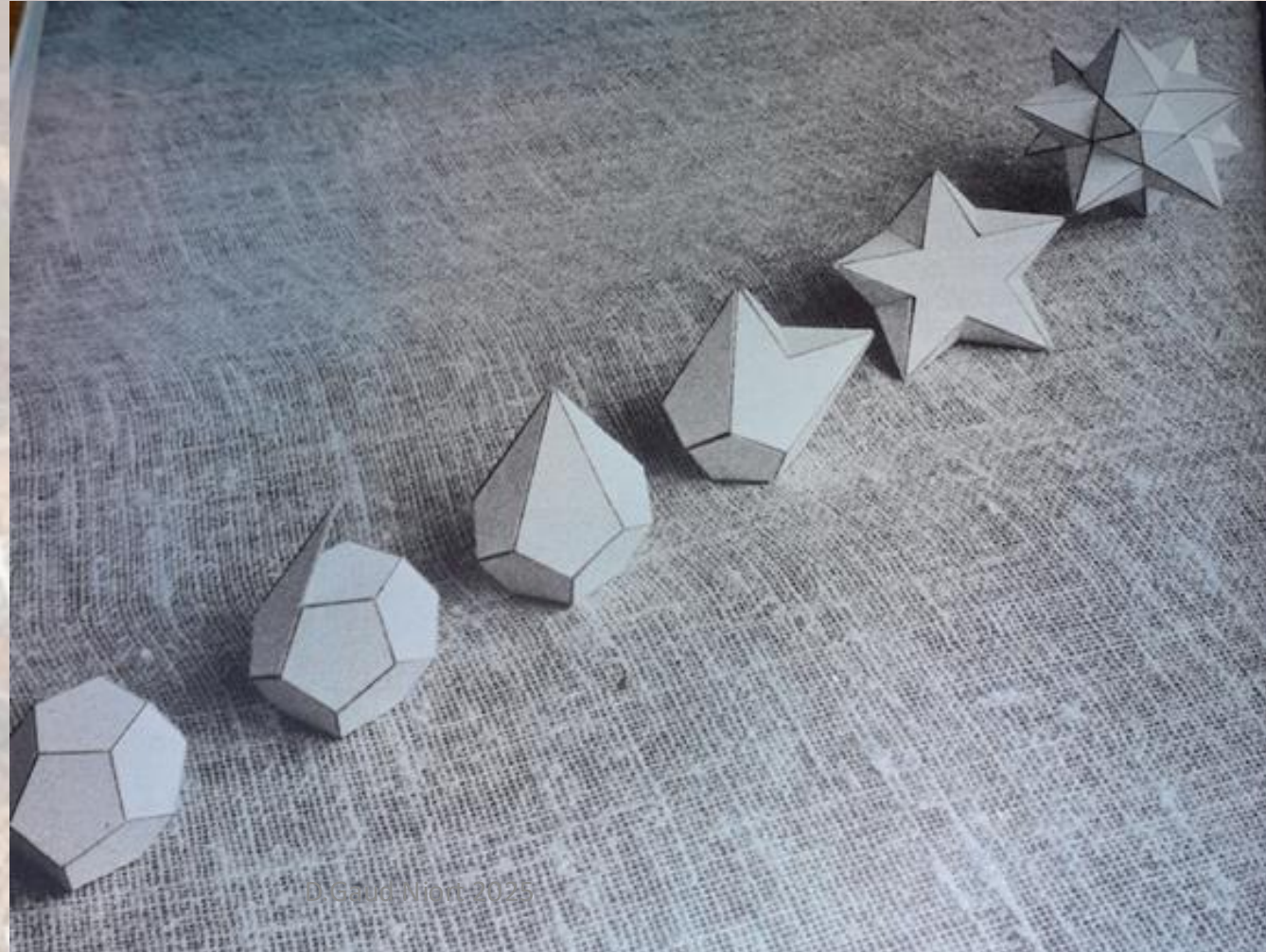
Et, dans son *Harmonices Mundi*, il l'a présenté comme une stellation du dodécaèdre

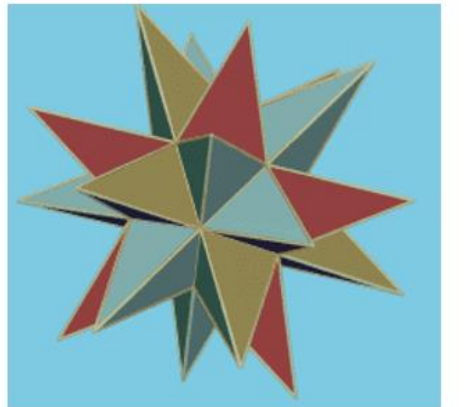
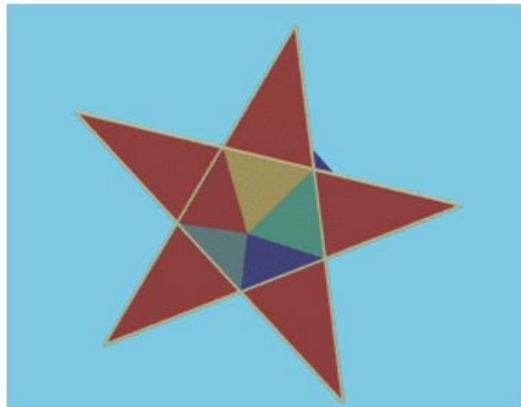
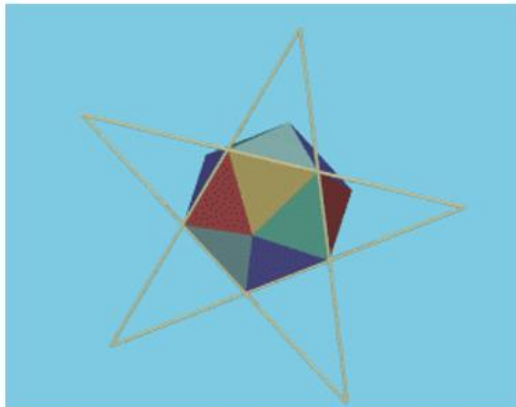
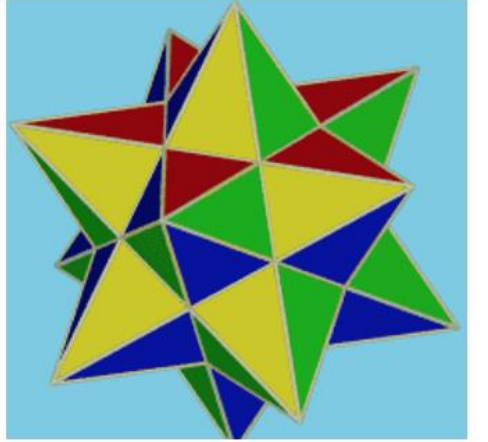
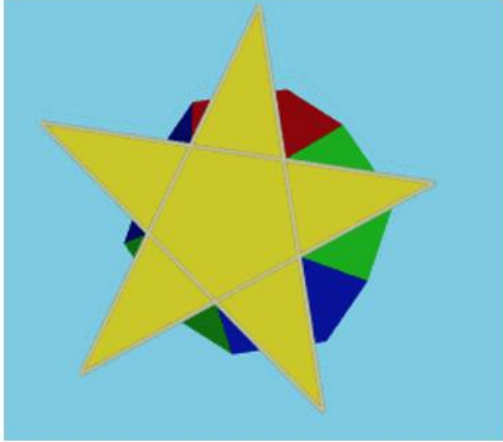
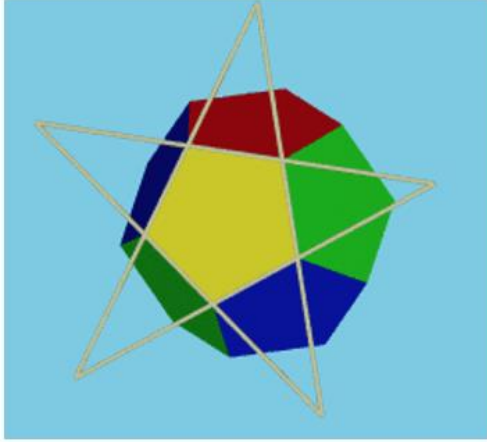
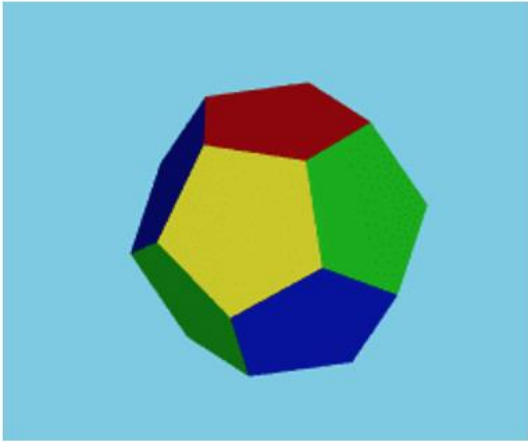


Les solides étoilés de Kepler sont obtenus par stellations.

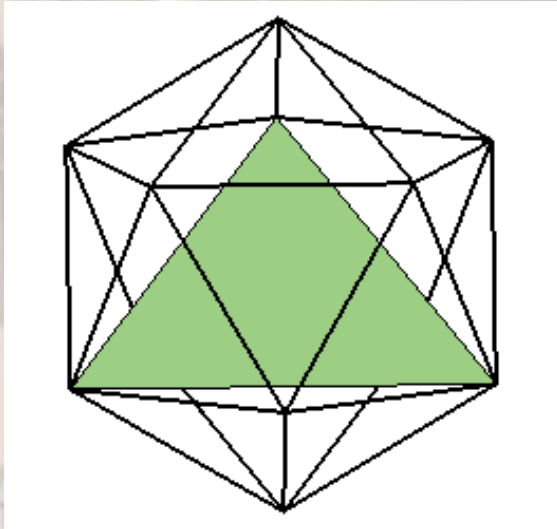
En géométrie, la **stellation** est un procédé de construction de nouveaux polygones (en dimension 2), de nouveaux polyèdres (en dimension 3), ou, en général, de nouveaux polytopes en dimension n , en étendant les arêtes ou faces planes, généralement de manière symétrique, jusqu'à ce que chacune d'entre elles se rejoignent de nouveau. La nouvelle figure, avec un aspect étoilé, est appelée une *stellation* de l'original.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Stellation>

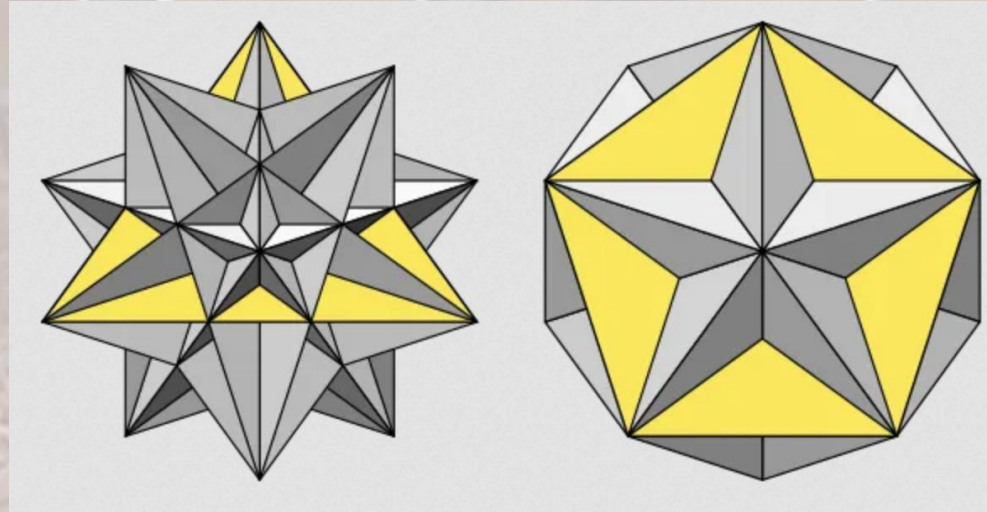




Poinsot en 1809 découvre ces deux solides réguliers

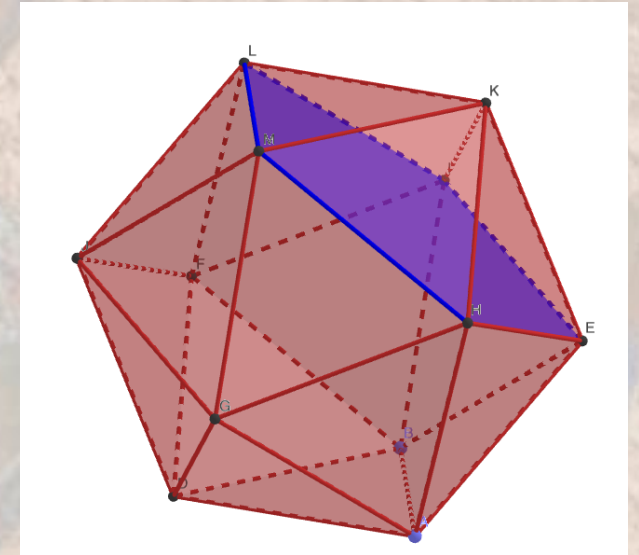


30 triangles équilatéraux
inscrits dans l'icosaèdre



Grand icosaèdre.

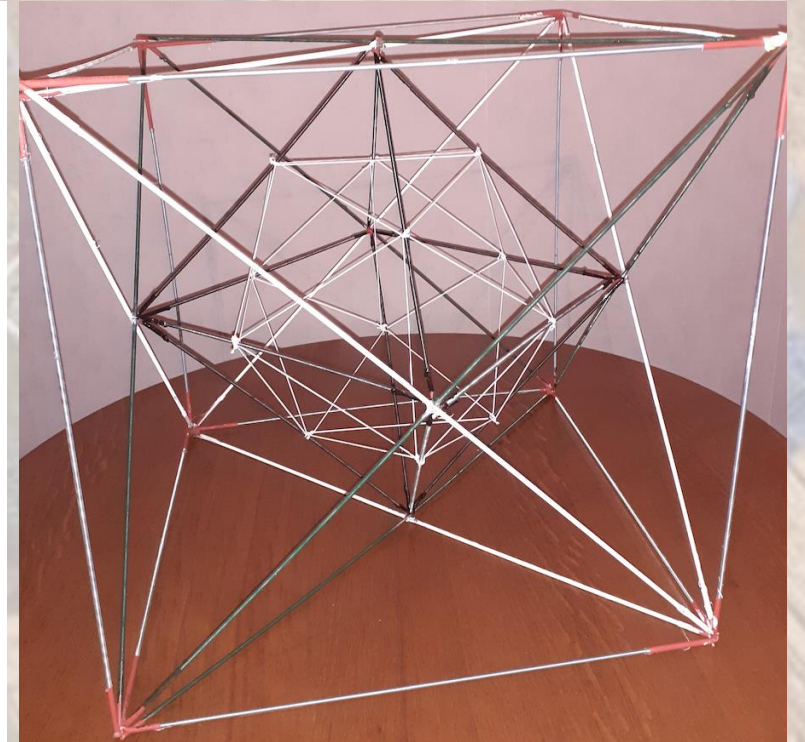
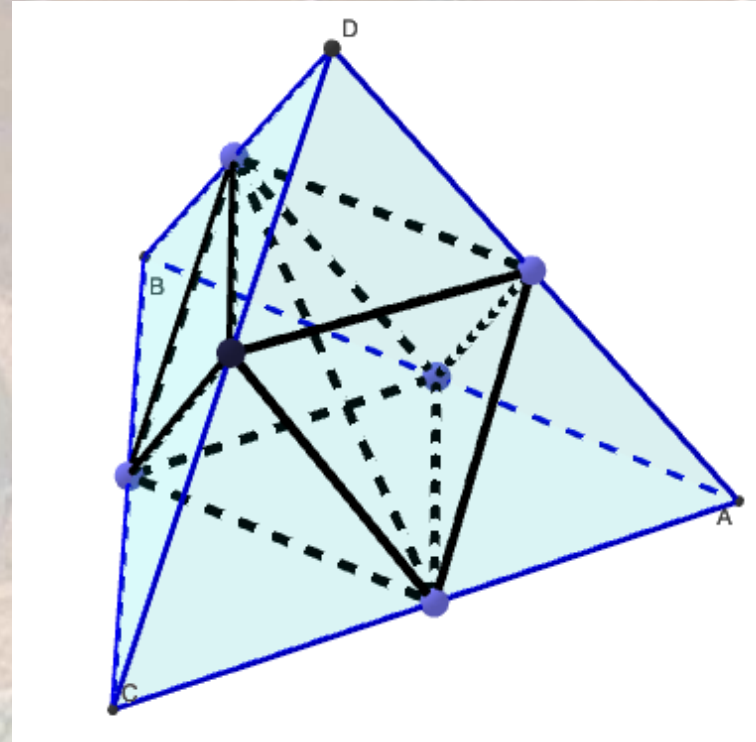
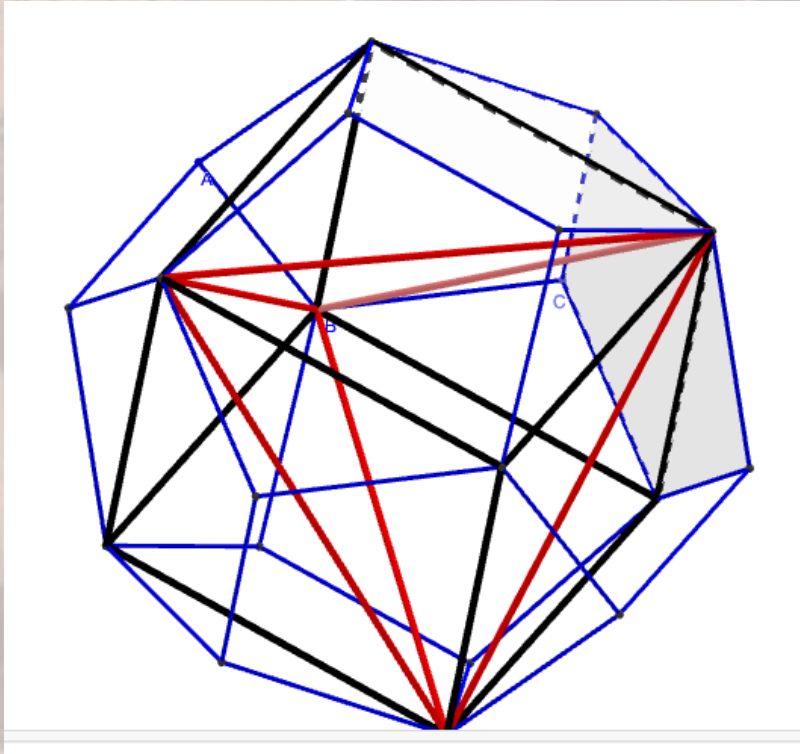
Grand dodécaèdre



12 pentagones inscrits
dans l'icosaèdre

Trois ans plus tard, [Augustin Cauchy](#) démontra que la liste était complète, et presque un demi-siècle plus tard [Bertrand](#) fournit une démonstration plus élégante en [facettant](#) les [solides de Platon](#).

Tous ces polyèdres sont liés



Tout va bien dans le meilleur des mondes des polyèdres mais trois grains de sable...

La formule d'Euler Descartes

La classification des polyèdres

Le problème de stellations

- Qu'est-ce qu'un polyèdre? Qu'est-ce qu'une face, une arête et un sommet?

- Qu'est-ce qu'un polyèdre régulier?

Dans un polyèdre qui a s sommets, f faces et a arêtes la formule d'Euler-Descartes s'énonce : $s + f = a + 2$.

Repères chronologiques

- 1750 année de la « découverte » de relation par Euler,
- 1813 on découvre qu'elle ne s'applique pas à tous les polyèdres
- 1847 Von Staudt donne les hypothèses sous lesquelles peut s'appliquer le théorème.
- 1850 Schläfli *Ludwig Schläfli (1814-1895) mathématicien suisse* la généralise pour les espaces à n dimensions
- 1860 redécouverte des travaux de Descartes
- Généralisation Euler-Poincaré.

Pas si simple

Euler ne savait pas que cette relation avait été *plus ou moins trouvée* par *Descartes* (1596-1650). Dans une communication faite le 10 février 1890, *De Jonquières* fait état d'une note de *Descartes* restée longtemps inédite qui n'est réapparue qu'en 1860 grâce à *Foucher de Careil*.

Résumons :

- *Descartes* meurt en 1650 en Suède.
- 1653 : Les affaires de *Descartes* sont rassemblées et rallient Paris par bateau.
- Malheureusement, le débarquement à Paris se passe mal et les malles de *Descartes* tombent à l'eau où elles resteront trois jours causant des dommages très importants aux manuscrits.
- 1676 *Leibniz* de passage à Paris prend connaissance de ce manuscrit et en fait une copie.
- Le manuscrit original de *Descartes* disparaît et n'a jamais été retrouvé à ce jour.
- 1860 : *Foucher de Careil*, diplomate, (1826-1891) retrouve la copie faite par *Leibniz* parmi d'autres écrits de ce dernier.
- 1890 *De Jonquières* fait une communication pour attribuer à *Descartes* la paternité de la formule.

Mais... on ne retrouve pas explicitement la formule dans les écrits de *Descartes*.

A quels polyèdres s'applique cette relation?

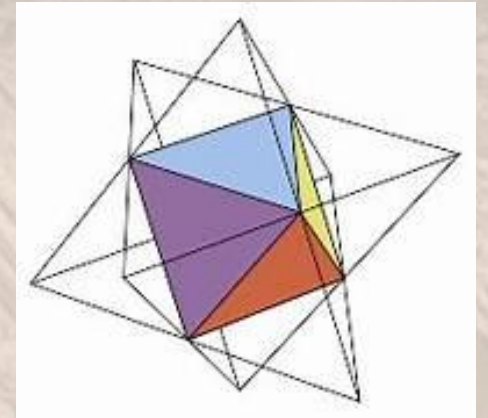
Elle s'applique aux 5 solides de Platon.

Tétraèdre régulier	4	4	6
Cube	8	6	12
Octaèdre	6	8	12
Dodécaèdre	20	12	30
Icosaèdre	12	20	30

Mais pour les solides de Kepler ? Comment doit-on définir une face, un sommet et une arête ?

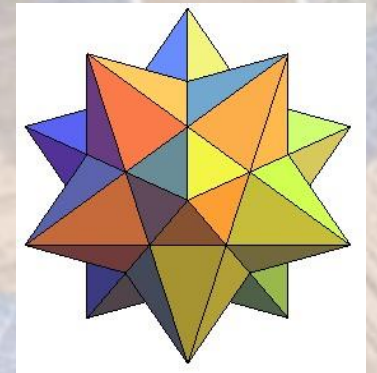
Cas du stella octangula?

- Si on admet qu'il a 8 faces, 12 arêtes et 8 sommets, le compte n'y est pas.
- Si on le voit comme assemblage 8 petits tétraèdres : 30 arêtes, 18 faces, 14 sommets, ça marche.



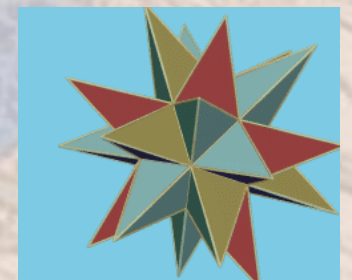
Cas du petit dodécaèdre étoilé :

- Considéré avec 12 faces étoilées, il a 12 sommets 30 arêtes, **le compte n'y est pas.**
- considéré comme formé de 12 pyramides: 60 faces, 90 arêtes, 32 sommets **ça marche...**



Cas du grand dodécaèdre étoilé:

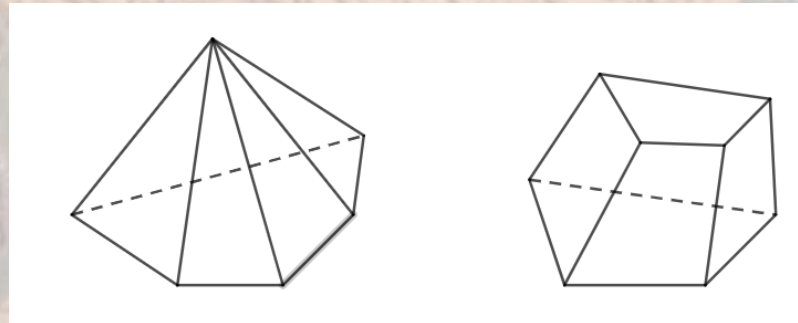
- avec des faces étoilées :12 étoiles: 12 faces, 20 sommets, 30 arêtes ; **ça marche!**
- avec des faces triangulaires : 90 arêtes, 32 sommets, 60 faces **ça marche aussi !**



Classification des polyèdres

Euler (1707-1783) s'intéresse à la classification des polyèdres.

Il constate que si la classification des polygones dans le plan est facile suivant le nombre de côtés, cela s'avère beaucoup plus compliqué dans l'espace *car le nombre de faces ne suffit pas.*(1)



Il invente les mots *faces*, *arêtes* et *sommets* et *présente une relation entre les nombres de faces, arêtes et sommets.*

La topologie algébrique, des origines à Poincaré, JC Pont, PUF, 1974

Mais qu'est-ce qu'un polyèdre ?



Grand goule pictave

La question va animer le monde mathématique du XIXe siècle et va tourner autour de la formule Euler-Descartes : si cette formule marche bien avec les solides platoniciens, marche-t-elle pour les autres polyèdres et comment la démontrer ?

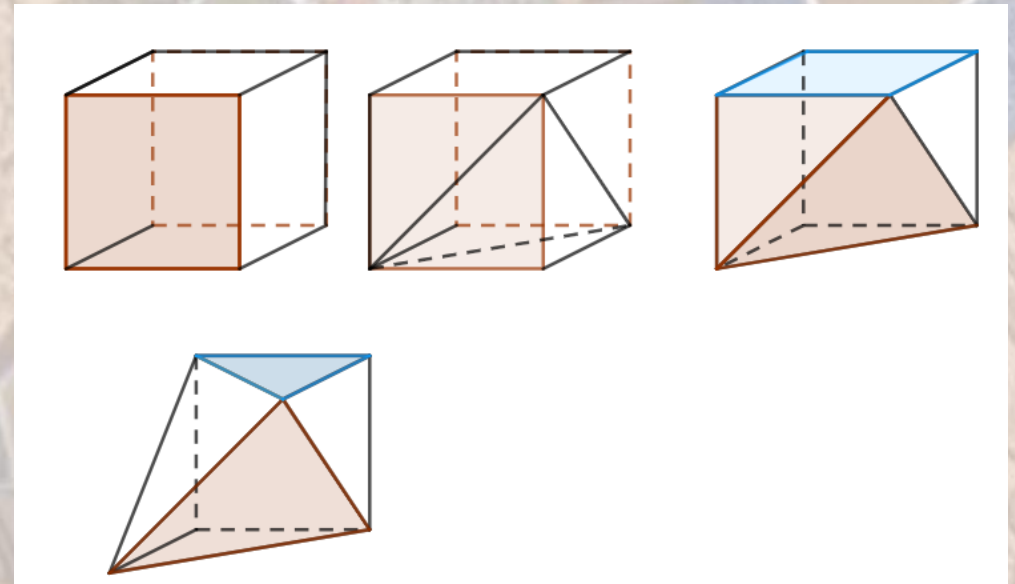
Des **monstres** vont surgir mettant en doute la définition « basique » d'un polyèdre : dès qu'une définition est donnée, paraissant plausible un mathématicien la met à mal avec un « monstre » ne vérifiant pas la formule d'Euler.

Démonstration d'Euler

La démonstration d'Euler, bien qu'inexacte, est intéressante : elle consiste à détruire par étapes le polyèdre initial en lui enlevant des parties de telle sorte que la quantité $s + f - a$ soit conservée avec le nouveau polyèdre.

Le dernier polyèdre obtenu est une pyramide pour laquelle $s + f - a = 2$.

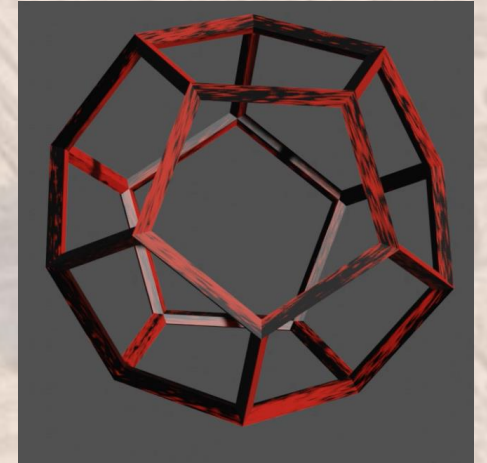
Il suppose le premier polyèdre convexe mais au cours des étapes le nouveau polyèdre peut ne plus être convexe.



Démonstration de la formule par Legendre (1752-1833) paru dans ses *Eléments de géométrie* en 1794



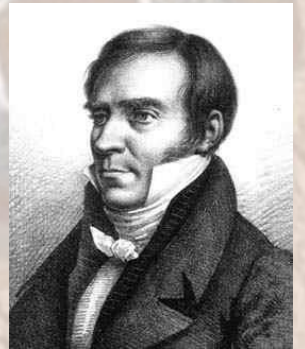
- Inscrire le polyèdre dans une sphère puis effectuer la projection centrale du polyèdre sur la sphère depuis le centre de celle-ci.
- Chaque face devient un polygone sphérique
- Somme des angles d'un polygone sphérique : $(n-2)\pi + \text{aire}$
- Somme pour toutes les faces : $\sum(n_i-2)\pi + \sum \text{aires}$
 - $= 2\pi s$ en regroupant les angles autour des sommets
 - $= \sum n_i \pi - 2f \pi + 4\pi = 2a \pi - 2f \pi + 4\pi$ car $\sum n_i = 2a$ (chaque arête compte deux fois)
- $2\pi a - 2\pi f + 4\pi = 2\pi s$ soit $a - f + 2 = s$
- $a - f = f - 2$
- $a + 2 = s + f$ (en utilisant $2a = \sum n_i = 4s$ pour un polyèdre)



Tous les polyèdres que nous considérons sont des polyèdres à angles saillants ou polyèdres convexes. Nous appelons ainsi ceux dont la surface ne peut être rencontrée par une ligne droite en plus de deux points. (Legendre)

Poinsot (1777-1859) en 1810 fait la remarque suivante :

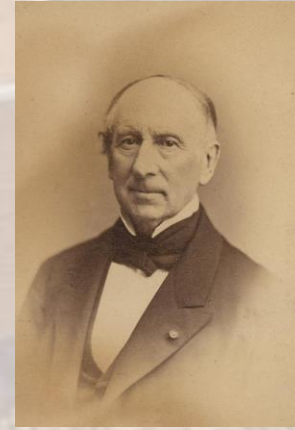
Je ferai d'abord observer que l'équation précédente n'a pas seulement lieu pour les solides convexes ordinaires, c'est-à-dire, pour ceux dont la surface ne peut être coupée par une droite en plus de deux points : elle subsiste encore pour tout polyèdre qui a des angles solides rentrants, pourvu qu'on puisse trouver, dans l'intérieur du solide, un point qui soit le centre d'une sphère telle que les faces du solide y étant projetées par des lignes menées au centre, il n'y ait sur la sphère aucune duplication de ces projections ; je veux dire, pourvu qu'aucune face ne se projette, en tout ou en partie, sur la projection d'une autre ; ce qui convient, comme on voit, à une infinité de polyèdres à angles solides rentrants. On reconnaîtra facilement la vérité de cette proposition par la démonstration même de M. Legendre, à laquelle il n'y aura rien à changer.



Variante sur l'idée de projection centrale

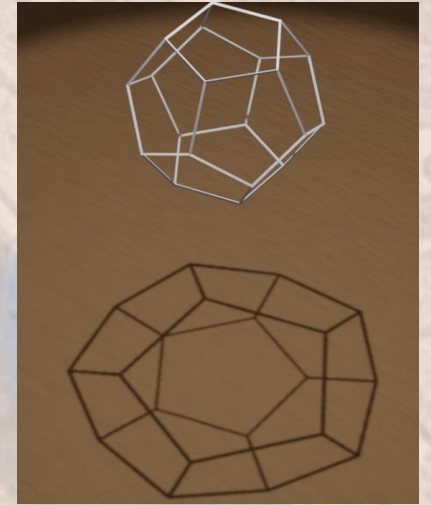
- On peut supposer que toutes les faces du polyèdre sont des triangles.
 - on effectue par un point intérieur du polyèdre une projection centrale sur une sphère le contenant dont on posera que son rayon est 1. On obtient un pavage par des triangles sphériques,
 - L'aire d'un triangle sphérique est $a+b+c-\pi$
 - le pavage a f faces, s sommets et a arêtes comme le polyèdre. L'aire de la sphère est $4\pi = \Sigma(a + b + c) - f\pi = 2\pi s - f\pi$
- Pour chaque triangle, chaque face a 3 arêtes et chaque arête est partagée par 2 faces donc $2a = 3f$. D'où la formule.

Démonstration (1811) de Cauchy (1789-1857)



• *Méthode : Déformation continue du polyèdre en un plan*

- Retirer une face du polyèdre (f diminue de 1)
- Étirer le polyèdre sur un plan sans changer f , a , s
- Supprimer les arêtes une par une :
 - Si l'arête relie deux sommets distincts : $a-1$, $f-1$
 - Si l'arête forme une boucle : $a-1$, $s-1$
- À la fin, il reste un seul sommet ($s=1$, $s=0$, $f=1$)
- Les changements se compensent : $s-1 + f-1 = a-0$
- Donc $s + f = a + 2$ pour le polyèdre original



Bien sûr il faut que le polyèdre puisse être mis sous forme d'un graphe plan.

Démonstration (1847) de von Staudt (1798-1867)

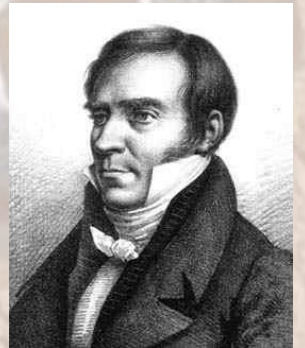
Méthode : Induction sur le nombre de faces

1. Vérifier pour un tétraèdre ($s=4$, $a=6$, $f=4$)
2. Hypothèse d'induction : Supposer vrai pour n faces
3. Étape inductive : Ajouter une pyramide à une face
 - . Nouveaux éléments : 1 sommet, k arêtes, $k-1$ faces
 - . Nouvelle relation : $(s+1) + (f+k-1) = (a+k) + 2$
4. Simplifier : $S + F + k = A + k + 2$
5. Par hypothèse d'induction : $s + f = a + 2$
6. Donc vrai pour $n+1$ faces



Démonstration de Poinsot 1858

- On peut supposer que toutes les faces sont triangulaires. Prenons un polygone de n sommets: partant d'un sommet, on lui adjoint $n-3$ diagonales, ce qui crée $n-3$ nouvelles arêtes, $n-2$ nouvelles faces tout en supprimant 1. Donc la relation est inchangée.
- Prenons un polyèdre et supprimons un sommet. On supprime h faces qui le reliait au h sommets. On crée un polygone éventuellement gauche et on en trace les diagonales issues d'un même sommets.
- Bilan: sommets: -1 , arêtes: $-h+h-3$, faces $-h+h-2$. la formule est encore vraie-
- De proche en proche on arrive au tétraèdre $f=4$; $s=4$, $a=6$.



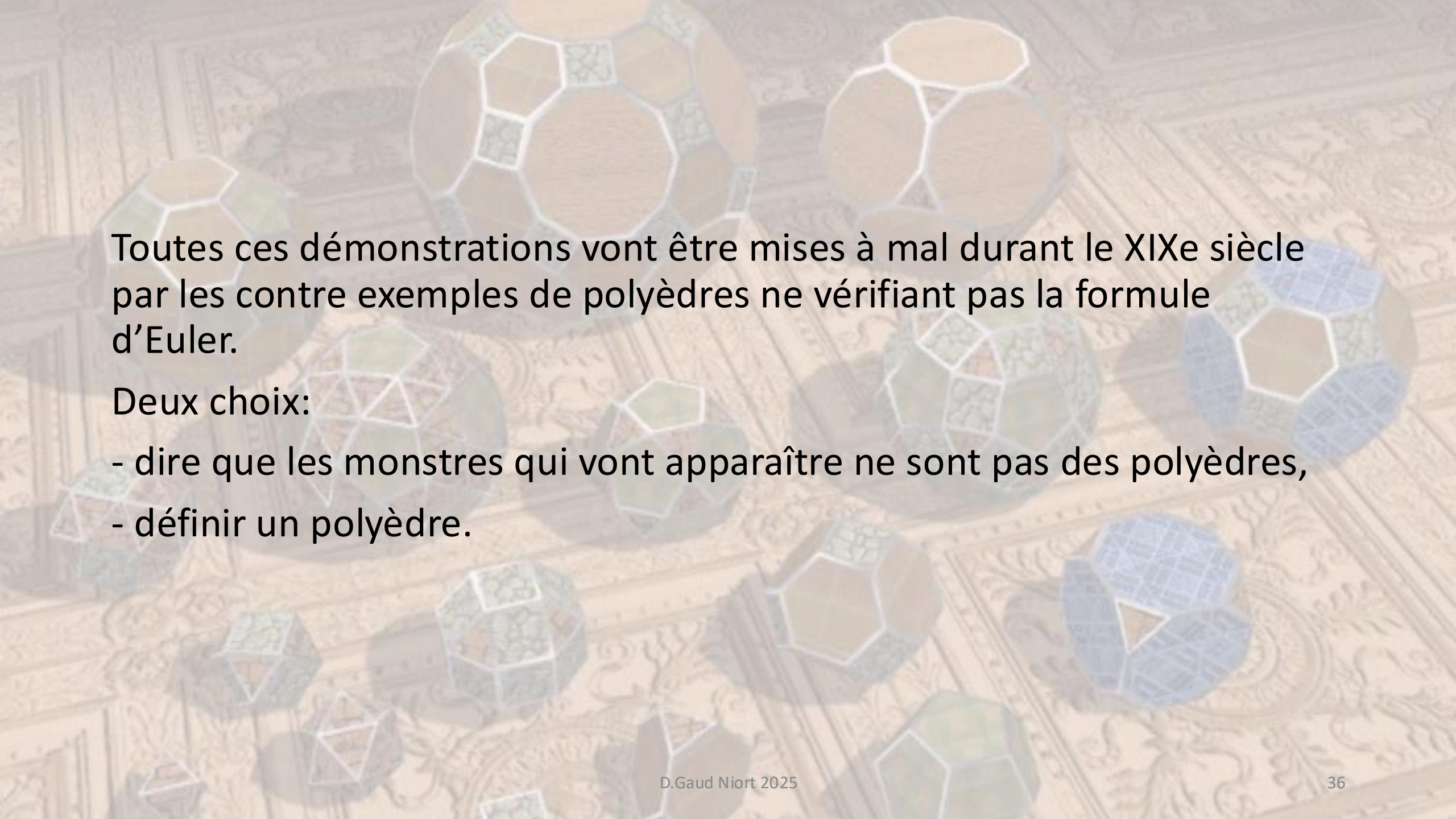
Von Staudt (1798-1867) va enfin présenter le théorème d'Euler muni d'hypothèses correctes.

On suppose que :

- On peut joindre chaque sommet du polyèdre à tout autre par une ligne formée d'arêtes,
- Si toute ligne fermée composée d'arêtes passant au plus une fois par un même sommet partage en 2 parties le polyèdre,

Alors $s + f = a + 2$



The background of the slide is a repeating pattern of various polyhedra, including cubes, octahedrons, and dodecahedrons, rendered in a light, semi-transparent style. The polyhedra are arranged in a grid-like fashion, creating a textured, geometric background.

Toutes ces démonstrations vont être mises à mal durant le XIXe siècle par les contre exemples de polyèdres ne vérifiant pas la formule d'Euler.

Deux choix:

- dire que les monstres qui vont apparaître ne sont pas des polyèdres,
- définir un polyèdre.

Mais qu'est-ce qu'un polyèdre ?

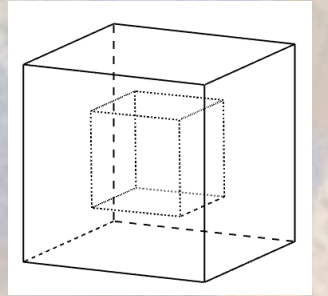
Définition 1 (Legendre, français 1752-1833) :

On appelle polyèdre tout solide terminé par des plans ou des surfaces planes.

Cubes emboîtés

Définition 2 : De Jonquières (français 1850-1919) précise : un polyèdre ne mérite ce nom que si un point peut se mouvoir avec continuité sur sa surface (1).

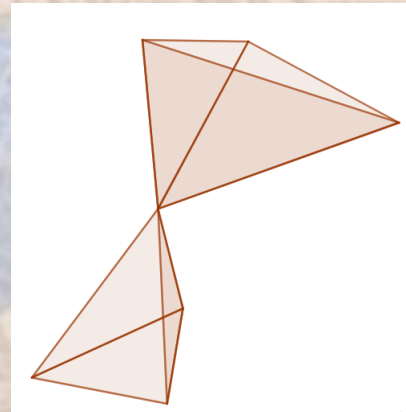
(une femme enceinte n'est pas un contre exemple à la thèse que les êtres humains n'ont qu'une tête).



Tétraèdres reliés par le sommet

Définition 3 : Möbius (allemand 1790-1868): Un polyèdre est un système de polygones tel que:

- deux polygones et deux seulement sont adjacents à chaque arête,
- il est possible d'aller de l'intérieur d'un polygone à l'intérieur d'un autre polygone par un chemin qui ne coupe jamais une arête par un sommet.



Mais qu'est-ce qu'un polyèdre ?

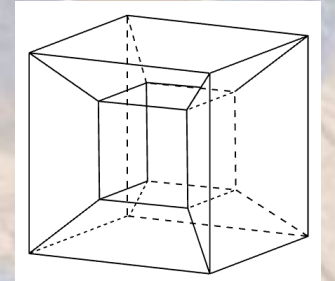
Définition 4 : on appelle polyèdre tout solide terminé par des plans ou des surfaces planes qui vérifie la formule d'Euler.(Schläfli suisse 1814- 1895)

Le petit dodécaèdre étoilé n'est pas un polyèdre mais le grand icosaèdre en est un!



Définition 5 : Par chaque point de l'espace, il passe au moins un plan dont l'intersection avec le polyèdre est constituée d'un seul polygone (De Jonquières)

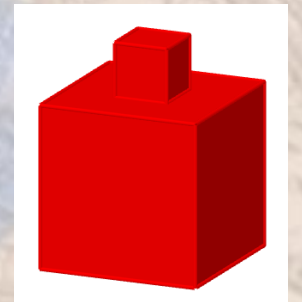
On évite le cadre et l'arche de la défense qui ne sont pas alors des polyèdres



Définition 6 : un polyèdre doit pouvoir être gonflé jusqu'à le rendre sphérique.

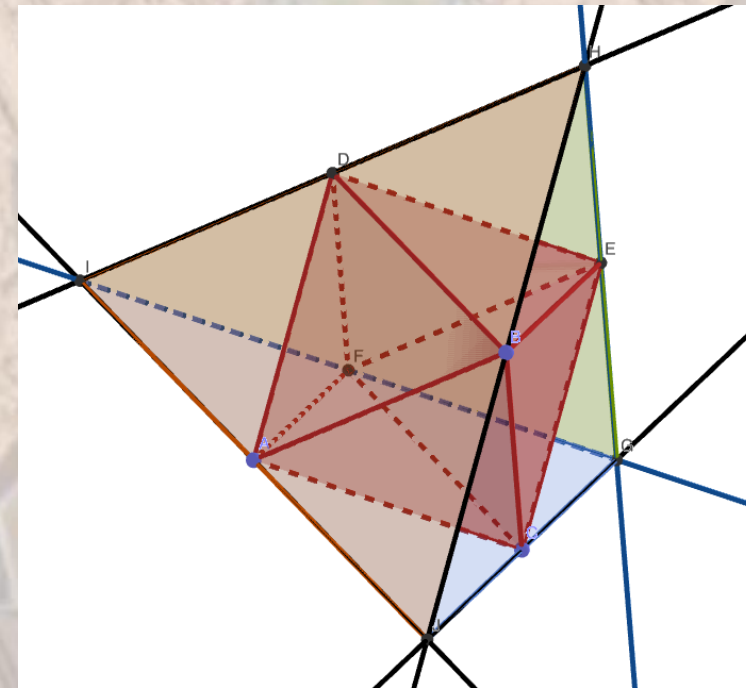
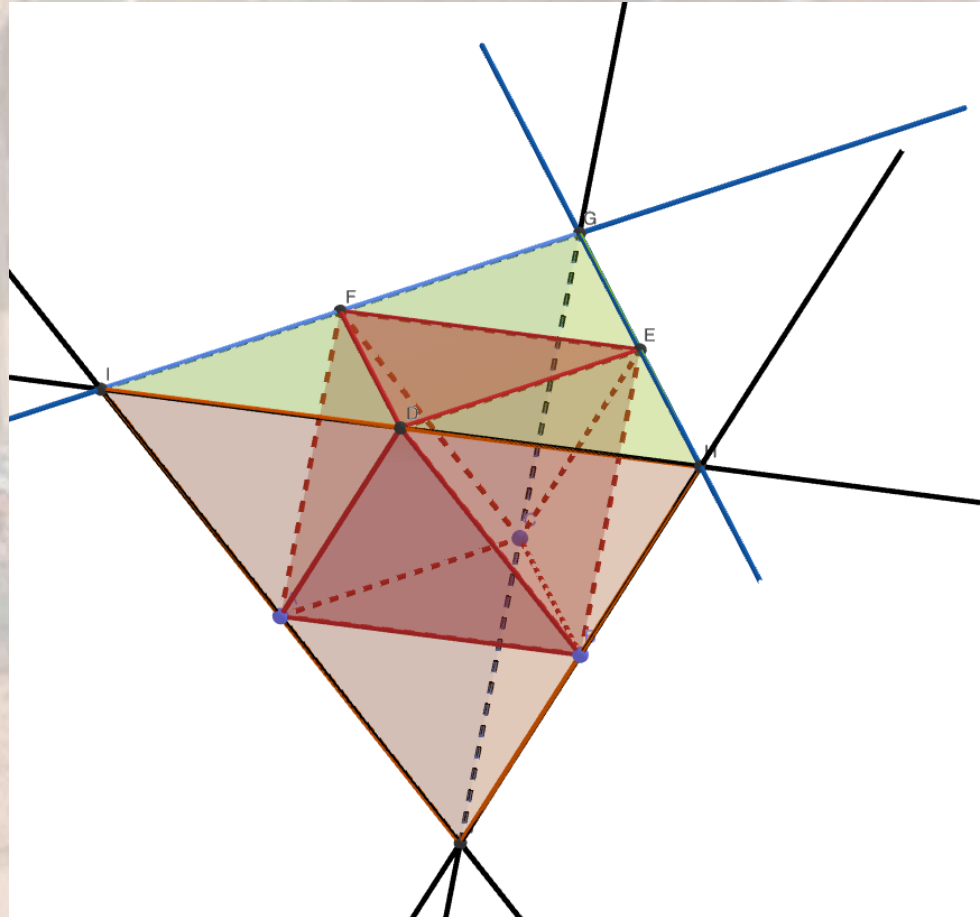
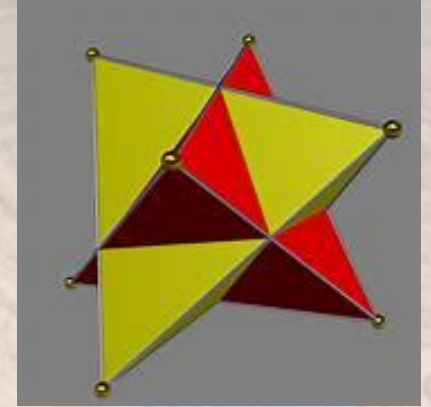
Lhuillier 2 cubes empilés

En fait il faudrait qu'en le gonflant on obtienne un pavage de la sphère par des triangles ce qui n'est pas le cas pour les deux cubes empilés.



Stellation de l'octaèdre : stella octangula :

- Pourquoi n'est-il pas considéré comme un polyèdre régulier?
- Est-ce un polyèdre ?



Poinsot, dans son article, *Mémoires sur les polygones et les polyèdres* (1809), précise :

Polygone : Soient m points a, b, c, d, e etc. rangés comme on voudra dans un plan, j'appelle polygone la figure formée par la suite continue des m segments $ab, bc, etc.$ qui joignent ces points deux à deux de manière à ce que la figure soit fermée.

Par cette définition, est exclue l'étoile à 6 branches issue de l'hexagone régulier. On peut reformuler de la manière suivante : deux sommets doivent être reliés par une suite de côtés adjacents (connexité).

Polygone convexe : On appelle ordinairement polygones convexes, les polygones dont le contour ne peut être traversé par une droite en plus de deux points. Mais nous définirons simplement un polygone convexe, celui qui n'a aucun angle rentrant.

Je montre alors qu'étant donné un polygone régulier convexe (*selon ma définition*) à m sommets, si on joint les sommets de h en h ($h < m$), h étant premier avec m , alors la ligne se refermera et donc définira un nouveau polygone au sens de la définition que j'ai donnée.

Ainsi l'étoile à 5 branches est convexe.



Louis Poinsot 1777-1859

Poinsot généralise la notion de *polyèdre convexe* en les définissant comme ayant des angles dièdres convexes c'est-à-dire saillants, puis je définis face et arête :

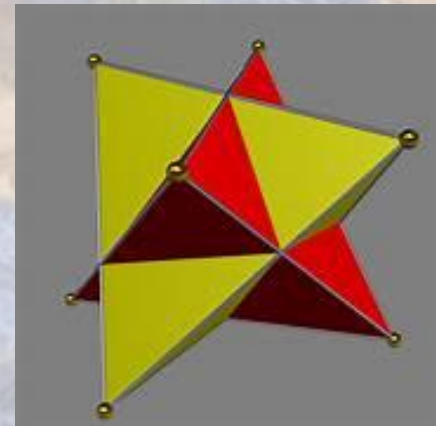
*Je prendrai pour faces, les plans **qui en plus petit nombre achèvent** complètement ce polyèdre.*

Et je précise que tel polyèdre formé de 60 triangles (petit dodécaèdre étoilé) n'est en fait constitué que de 12 faces.

Les arêtes, ce sont les côtés mêmes qui terminent les faces des solides et par lesquels les faces se terminent deux à deux. C'est à ces seules droites, que se trouvent les angles dièdres du solide, les autres angles que pourraient former les faces en se traversant n'en font pas partie, et de même c'est aux seuls points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les sommets et les angles solides du polyèdre.




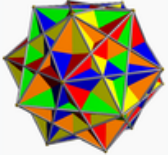
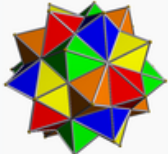
Un polyèdre est tel que l'on doit passer d'une face à une autre face quelconque en y allant de face en face.

Ainsi le stella octangula n'est pas un polyèdre au sens de Poinsot et si on admet pas la définition des faces de Poinsot, il n'a pas 9 solides réguliers!



Le *stella octangula* est exclu des polyèdres mais il a été classé comme *composé polyédrique régulier* dont voici d'autres éléments.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Compos%C3%A9_poly%C3%A9drique

Composants	Image	Enveloppe convexe	Noyau	Symétrie	Dual
Composé de deux tétraèdres, ou octaèdre étoilé		Cube	Octaèdre	O_h	Autodual
Composé de cinq tétraèdres (en)		Dodécaèdre	Icosaèdre	I	Jumeau chiral (jumeaux énantiomorphes)
Composé de dix tétraèdres (en)		Dodécaèdre	Icosaèdre	I_h	Autodual
Composé de cinq cubes (en)		Dodécaèdre	Tricontaèdre rhombique	I_h	Composé de cinq octaèdres
Composé de cinq octaèdres (en)		Icosidodécaèdre	Icosaèdre	I_h	Composé de cinq cubes



Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »

Poincaré à propos des fonctions continues dérivables en aucun point

Citation que l'on peut appliquer aux polyèdres

Autrefois, quand on inventait un nouveau polyèdre, c'était en vue de quelque but pratique. Maintenant on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Ainsi au XIXe siècle, on peut dire :

Notre sujet d'étude est transformé en un musée tératologique* où polyèdres décents et ordinaires pourront être heureux de pouvoir se réserver un tout petit coin.

****La tératologie est la science des anomalies de l'organisation anatomique, congénitale et héréditaire, des êtres vivants***

Il n'a jamais été complètement répondu à la question "*Qu'est-ce qu'un polyèdre ?*".

Les définitions vont des solides aux surfaces, aux squelettes, aux ensembles combinatoires de points, avec toutes sortes de caractéristiques telles que les extensions infinies, des éléments qui coïncident etc... autorisées par certains chercheurs mais pas par d'autres.

Aujourd'hui le débat fait peut-être rage plus que jamais. (Guy Inchbald).

À un niveau élémentaire il vaut donc mieux éviter d'être trop précis en introduisant d'inutiles restrictions et se contenter d'une définition simple et facile à comprendre : **un polyèdre est un solide limité par un nombre fini de polygones plans.**

<http://www.polyhedra-world.nc/history.htm>

Questions:

- comment définissez vous une arête ?
- comment définissez vous un sommet ?
- ce vocabulaire est-il utilisable pour les autres solides usuels: cylindre, sphère, tore, cône?

Une sphère, un tore à une face pas d'arête, pas de sommet

Un cylindre a 3 faces et 2 arêtes : les arêtes sont les intersections des faces,

Un cône a 2 faces, une arête et un sommet ... qui n'est pas intersection d'arêtes.

Faces, arêtes, sommets.. Est-ce aussi simple ?

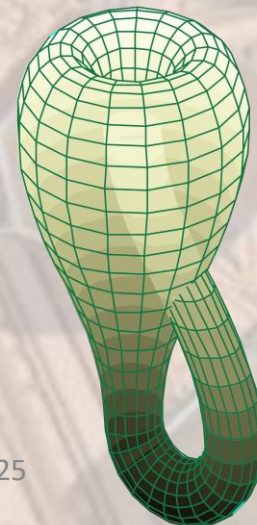
Quelques exemples pour réfléchir

- monoèdre

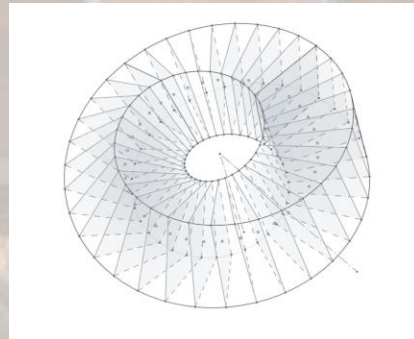
- l'oloïde,

- les sphéricônes, <https://aesculier.fr/fichiersMaple/sphericones/sphericones.html>

- la bouteille de Klein

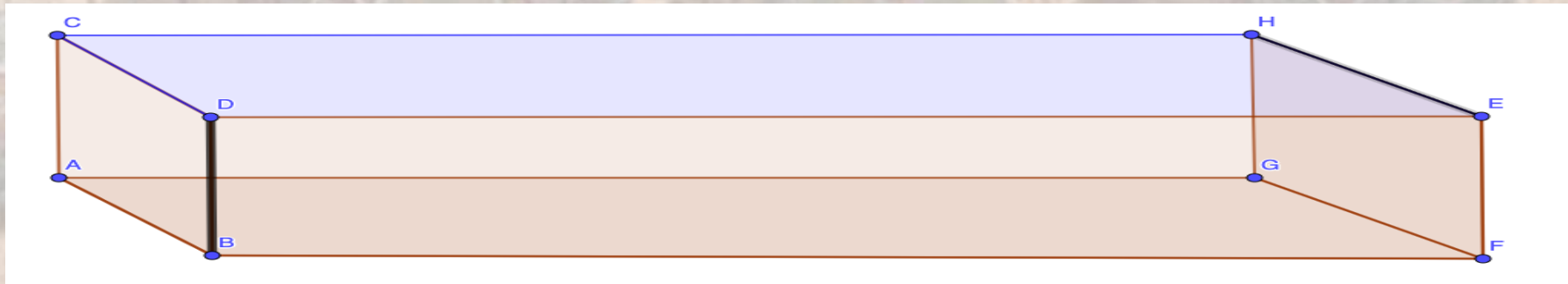


Le monoèdre



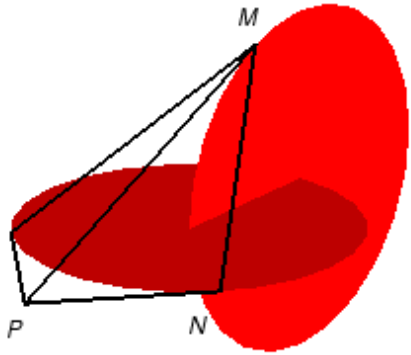
Prenons un pavé fait dans une matière molle et tordons ce pavé de manière continue pour amener l'arête à coïncider avec l'arête DB. On obtient un monoèdre.

Combien de faces? d'arêtes? de sommets?



Comment définir une arête ?

L'oloïde



Le mérite de la découverte de l'oloïde revient à un personnage exceptionnel nommé [Paul Schatz](#).

Inventeur, sculpteur et mathématicien, Schatz a fait sa découverte révolutionnaire en **1929**

L'oloïde est l'enveloppe convexe de deux cercles orthogonaux passant chacun par le centre de l'autre. Sa surface est une partie de la surface [développable](#) s'appuyant sur les deux cercles.

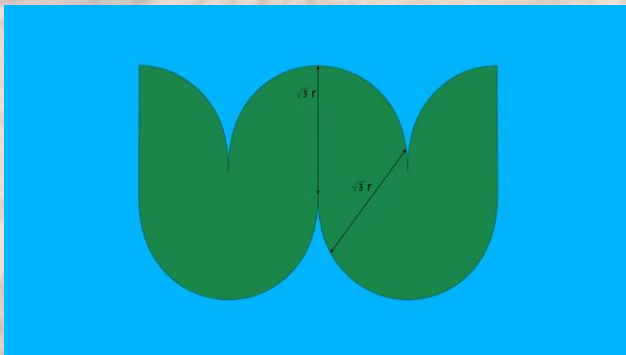
Soit P un point de la droite passant par les deux centres et soient les tangentes PM et PN aux 2 cercles issus de P. La longueur MN est constante et vaut $R \cdot \sqrt{3}$ si R est le rayon commun aux deux cercles.

Ce solide a un patron.

Et la surface a une équation:

$$4x^2 + 4x^3 - 7x^4 - 8x^5 + 2x^6 + 4x^7 + x^8 + 4y^2 + 4xy^2 - 18x^2y^2 - 16x^3y^2 + 14x^4y^2 + 12x^5y^2 - 11y^4 - 8xy^4 + 22x^2y^4 + 12x^3y^4 - 6x^4y^4 + 10y^6 + 4xy^6 - 8x^2y^6 - 3y^8 + 4xz^2 - 6x^2z^2 - 48x^3z^2 - 46x^4z^2 - 12x^5z^2 - 10y^2z^2 - 52xy^2z^2 - 46x^2y^2z^2 + 12x^3y^2z^2 + 6x^4y^2z^2 + 24xy^4z^2 + 12x^2y^4z^2 + 6y^6z^2 + z^4 - 8xz^4 - 50x^2z^4 - 36x^3z^4 - 6x^4z^4 - 12y^2z^4 + 12x^2y^2z^4 - 9y^4z^4 - 2z^6 - 20xz^6 - 8x^2z^6 + 6y^2z^6 - 3z^8 = 0$$

Combien de faces, d'arêtes et de sommets?



Un objet aux propriétés physiques bizarres:

- Il roule « sur segment » comme le cylindre mais tous ses points entrent en contact avec le plan contrairement au cylindre.

- Alors que solide est issu d'une création artistique, il a trouvé des applications industrielles dans le traitement des eaux usées mais aussi comme agitateurs et aérateurs de surface.

- Au moyen de mouvements rythmiques

L'Oloïde un nouveau système d'agitation, un nouveau type d'agitateur :

L'oloïde, permet d'obtenir des résultats intéressants en vue d'aérer et de bien mélanger des eaux stagnantes et les eaux d'égouts. Sa forme géométrique particulière et sa vitesse de rotation relativement faible, entraînent une consommation d'énergie réduite. Ce système d'agitation est appliqué dans l'aération des eaux stagnantes et dans les stations d'épuration des eaux usées, le malaxage des eaux de citerne et dans les installations d'élevage piscicole.

<http://www.triarticulation.fr/AtelierTrad/TDK/DF1296.pdf>

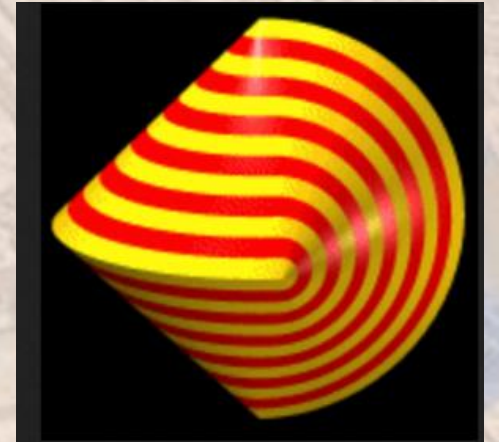


La famille des sphéricônes

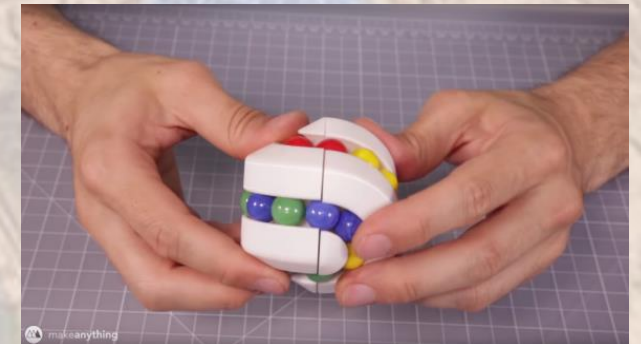
Le **sphéricône** est un solide formé de quatre demi-cônes se raccordant continûment. Sa surface est alors continument développable et il possède deux arêtes en demi-cercles, et quatre sommets formant un carré.

D'après Ian Stewart et Paul J. Roberts, il a été inventé vers 1970 par Colin J. Roberts, passionné de menuiserie, qui travaillait au départ sur un ruban de Möbius. Il lui a donné son nom.

L'inventeur de jeux israélien David Haran Hirsch le redécouvrit et le fit breveter en 1980³, et Ian Stewart l'a popularisé en 1999 grâce à un article dans *Scientific American*, traduit dans *Pour la Science* n°265

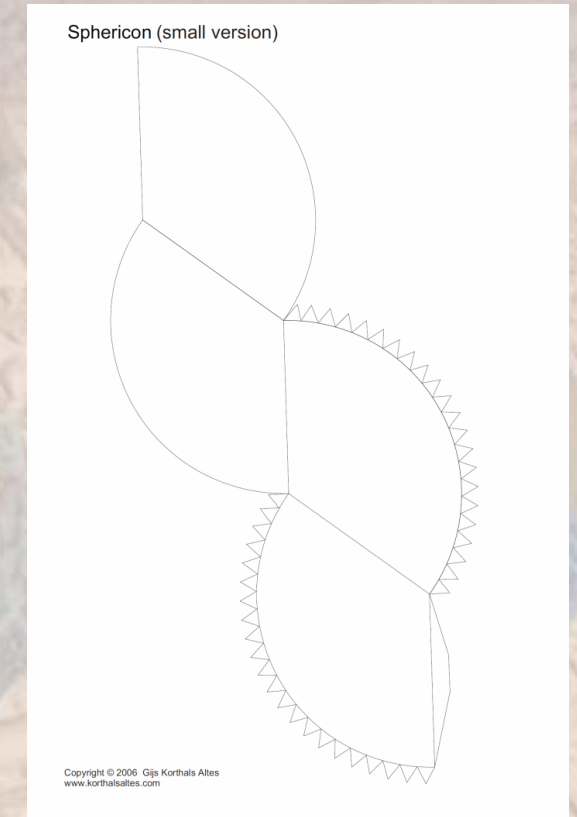


Quelle différence avec l'oloïde ?

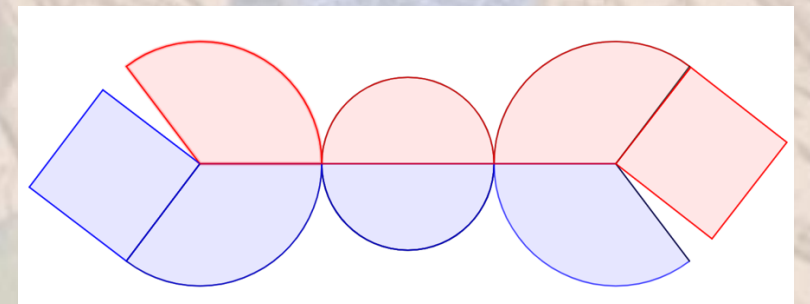


Pour le construire :

- Les cônes sont tels que le rayon est égal à la hauteur du cône.
- Par un patron :
 - o On découpe la partie rouge, et on colle de telles façon à faire deux demi cônes qui s'assemble sur le carré.
 - o Idem pour la partie bleue.
 - o On assemble les deux de telles manière à ne pas reformer un cône !



Combien de faces ? d'arêtes ? de sommets ?



En fait, cet objet est représentant de la famille des sphéricônes :

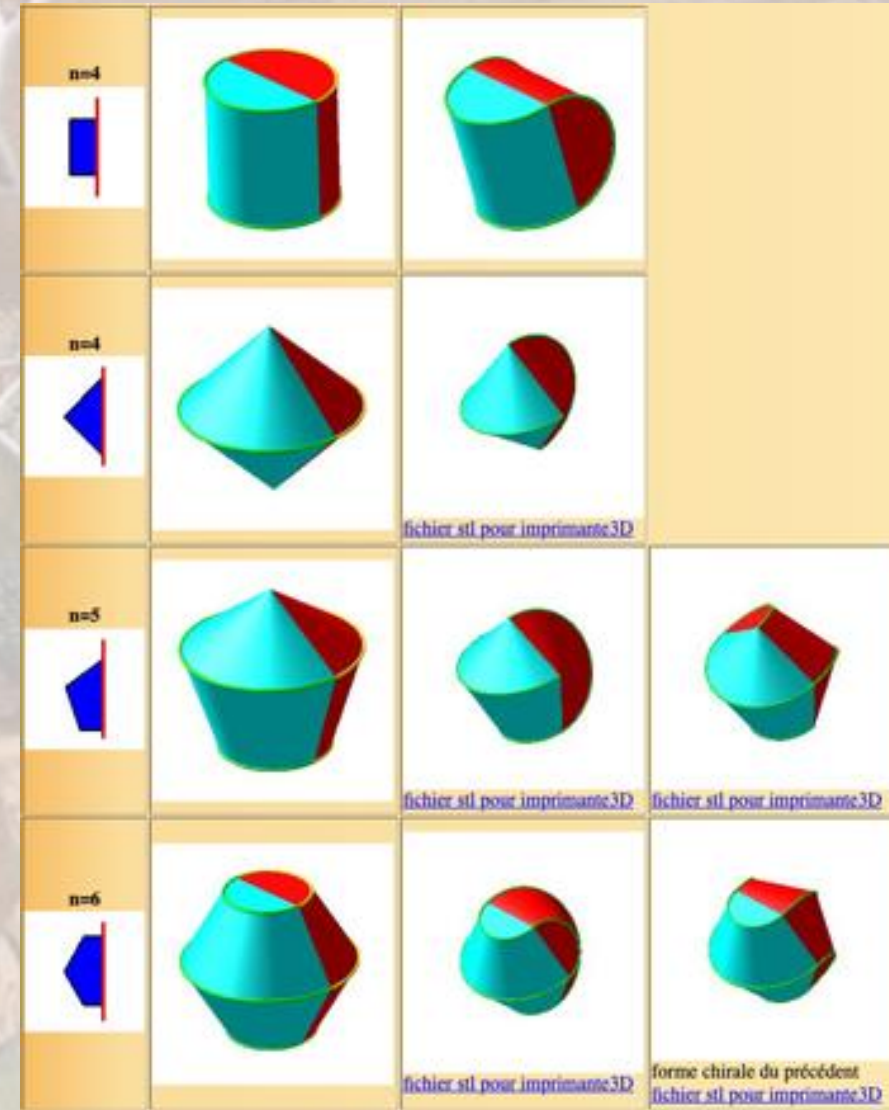
Exemple :

Faisons tourner un trapèze isocèle ayant 3 côtés égaux autour de sa grande base. Nous obtenons un solide de révolution (S) d'axe (D).

On partage (S) par un plan (P) contenant (D) en deux solides symétriques (S1) et (S2).

Soient (Z) la droite perpendiculaire au plan (P) en A. Nous faisons pivoter le solide obtenu en faisant coïncider correctement les bords. Sur le site d'Alain Esculier, on trouve une étude plus complète de ces objets.

<https://aesculier.fr/fichiersMaple/sphericones/sphericones.html>



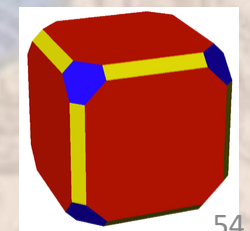
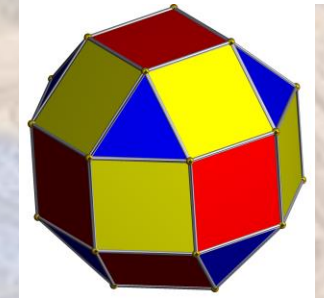


En [géométrie](#), un **solide d'Archimède** est un [polyèdre convexe semi-régulier](#), **fortement symétrique**, composé de deux ou trois sortes de [polygones réguliers](#) se rencontrant à des [sommets](#) identiques. Ils sont distincts des [solides de Platon](#), qui sont composés d'une seule sorte de polygones se rencontrant à des sommets identiques, et des [solides de Johnson](#), dont les faces polygonales régulières ne se rencontrent pas à des sommets identiques. La symétrie des solides d'Archimède exclut les membres du [groupe diédral](#), les [prismes](#) et les [antiprismes](#).

Les solides de Johnson

En [géométrie](#), un **solide de Johnson** est un [polyèdre](#) strictement [convexe](#) dont chaque face est un [polygone régulier](#) et qui n'est pas [isogonal](#) (qui n'est donc ni un [solide de Platon](#), ni un [solide d'Archimède](#), ni un [prisme](#) ni un [antiprisme](#)). Il n'est pas nécessaire que chaque face soit un polygone identique, ou que les mêmes polygones se rejoignent autour de chaque sommet.

En [géométrie](#), un [polytope](#) (un [polygone](#) ou un [polyèdre](#), par exemple) est dit **isogonal** si tous ses [sommets](#) sont identiques. Autrement dit, chaque sommet est entouré du même type de [face](#) dans le même ordre et avec les mêmes angles entre les faces correspondantes.



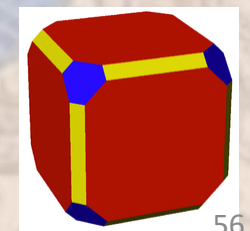
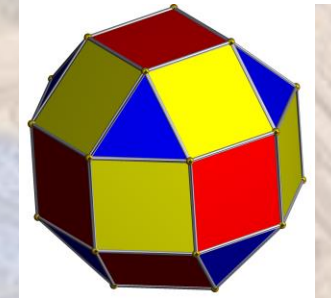


En géométrie, un **solide d'Archimède** est un polyèdre convexe semi-régulier, **fortement symétrique**, composé de deux ou trois sortes de polygones réguliers se rencontrant à des sommets identiques. Ils sont distincts des solides de Platon, qui sont composés d'une seule sorte de polygones se rencontrant à des sommets identiques, et des solides de Johnson, dont les faces polygonales régulières ne se rencontrent pas à des sommets identiques. La symétrie des solides d'Archimède exclut les membres du groupe diédral, les prismes et les antiprismes.

Les solides de Johnson

En géométrie, un **solide de Johnson** est un polyèdre strictement convexe dont chaque face est un polygone régulier et qui n'est pas isogonal (qui n'est donc ni un solide de Platon, ni un solide d'Archimède, ni un prisme ni un antiprisme). Il n'est pas nécessaire que chaque face soit un polygone identique, ou que les mêmes polygones se rejoignent autour de chaque sommet.

En géométrie, un polytope (un polygone ou un polyèdre, par exemple) est dit **isogonal** si tous ses sommets sont identiques. Autrement dit, chaque sommet est entouré du même type de face dans le même ordre et avec les mêmes angles entre les faces correspondantes.



Pourquoi ces définitions des polyèdres

Le moteur est la formule d'Euler. $s + f = a + 2$

Les étapes de la démonstration de Poinsot (académie des Sciences 1858)

- on peut supposer que les polyèdres n'ont que des faces triangulaires:

Si je trace une diagonale sur une face polygonale pour faire apparaître un triangle je rajoute une face, une arête et aucun sommet donc la formule est inchangée.

- chaque face triangulaire contient 3 arêtes et une arête appartient à deux faces donc $3f = 2a$.

- un sommet est composé de h faces triangulaires. Si on enlève un sommet, on enlève h faces, avec le polygone éventuellement gauche formé des h sommets, on reforme $h-2$ triangles avec les $h-3$ diagonales. Au bilan pour le nouveau polyèdre :

$$f' = f - h + h - 2 = f - 2. \quad s' = s - 1 \quad a' = a - h - h - 3 = a - 3.$$

$$\text{Ainsi } f' + s' = f - 2 + s - 1 = f + s - 3 = a - 1$$

$$a' + 2 = a - 3 + 2 = a - 1 \text{ donc } f' + s' = a' + 2. \text{ Ainsi de proche en proche...}$$











