Solution de Michel Bataille (Rouen), Georges Lion (Wallis), Moubinool Omarjee (Lycee Henri IV, Paris), Michel Quercia, Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orque), Raphael Sinte (Lycée Frederic Chopin, Nancy), Lazare-Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon)

La propriété étant évidente pour $f = 0$, on suppose que f n'est pas identiquement nulle sur le segment $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, on définit

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors

$$\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1) = 0$$

et l'application F n'est pas constante sur $[0,1]$. En changeant au besoin l'application f en $-f$, on peut affirmer l'existence d'un réel $t_0 \in \,]0,1[$ tel que

$$\mathrm{F}(t_0) = \sup_{t\in[0,1]} \mathrm{F}(t) > 0.$$

Par intégration par parties, on a

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{F}(x) - \int_0^x \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Donc

$$\mathrm{G}(t_0) > 0:$$

Distinguons deux cas :

• Premier cas : on suppose F(t) > 0 pour tout t 2 [0; 1]. Alors

$$\mathrm{G}(1) = -\int_0^1 \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t < 0,$$

car l'application F n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que l'application G s'annule en une valeur x de $[t_0, 1[\subset]0,1[$.

• Second cas : on suppose que F n'est pas toujours positive, d'où l'existence d'un réel $t_1 \in \,]0, 1[$ tel que

$$\mathrm{F}(t_1) = \inf_{t\in[0,1]} \mathrm{F}(t) < 0.$$

Alors

$$\mathrm{G}(t_1) = \int_0^{t_1} \left|\mathrm{F}(t_1) - \mathrm{F}(t)\right| \mathrm{d}t < 0.$$

car $t \mapsto \mathrm{F}(t_1) - \mathrm{F}(t)$ n'est pas constamment nulle sur $[0,t_1]$. On conclut de même que dans ce cas l'application G s'annule en une valeur x de l'intervalle d'extrémités t_0 et t_1, intervalle contenu dans $]0,1[$.