Solution de Xavier Reliquet (Paris), Georges Lion (Wallis) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orque)

La réponse est non. Voici deux exemples de sous-corps de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas stables par conjugaison.

Tout d'abord, voici une extension transcendante qui n'est pas stable par conjugaison. On considère le complexe $\alpha = \pi + \mathrm{i}$. L'élément α est transcendant (sinon, $\pi = \alpha - \mathrm{i}$ serait algébrique). Le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ est, par définition, formé des complexes de la forme

$$\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \quad \text{avec } P, Q \in \mathbb{Q}[X],\ Q \neq 0.$$

Ce corps contient évidemment α, mais pas $\overline{\alpha}$. En effet, si $\overline{\alpha}$ appartenait à $\mathbb{Q}(\alpha)$, alors le complexe

$$\mathrm{i} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \overline{\alpha}\right)$$

serait également dans $\mathbb{Q}(\alpha)$. On pourrait alors écrire

$$\mathrm{i} = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \quad \text{avec } P, Q \in \mathbb{Q}[X],$$

soit encore

$$\left(P(\alpha)\right)^2 + \left(Q(\alpha)\right)^2 = 0.$$

Ainsi, le polynôme $P^2 + Q^2$, non nul, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, serait un polynôme annulateur du nombre α, donc α serait algébrique, d'où la contradiction.

Voici maintenant un exemple d'extenstion algébrique. On pose $\beta = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}$, où j désigne le complexe $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\beta)$ est une extention algébrique de $\mathbb{Q}$, de degré 3, puisque le polynôme minimal de β est $X^3 - 2$. On suppose que $\overline{\beta} = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}^2$ appartient à $\mathbb{K}$. Alors $\mathrm{j} = \dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ appartient à $\mathbb{K}$. Ceci est absurde car j admet pour polynôme minimal $X^2 + X + 1$, donc l'extension $\mathbb{Q}(\mathrm{j})$ (de degré 2) ne peut être contenue dans $\mathbb{K}$ puisque 2 ne divise pas 3.