Voici une solution très élégante, proposée par **Benoît Joly**. Soit P un polynôme non nul. On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ A(X) \mapsto A\left(X^{1000000}\right) \bmod P(X) \end{cases}$$

Cette application est linéaire, à valeurs dans l'ensemble des polynômes de degré au plus deg(P) − 1. Elle ne peut donc être injective puisque l'espace de départ est de dimension infinie tandis que l'espace d'arrivée est de dimension finie. Soit A un polynôme non nul, dans le noyau de φ. Alors $A(X^{1000000})$ est un multiple de P(X) qui répond à la question.

Une autre solution est proposée par **Raymond Heitz** et **Pierre Renfer**, qui commencent par montrer que la propriété est multiplicative, c'est-a-dire que si deux polynômes ont chacun un multiple qui est un polynôme en $X^{1000000}$, alors leur produit a aussi un multiple qui est un polynôme en $X^{1000000}$. En effet, considérons deux polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquels existent $Q_1, R_1, Q_2, R_2 \in \mathbb{R}[X]$ verifiant

$$P_1(X)Q_1(X) = R_1\left(X^{1000000}\right) \quad \text{et} \quad P_2(X)Q_2(X) = R_2\left(X^{1000000}\right).$$

Alors, en posant $Q = Q_1Q_2$ et $R = R_1R_2$, on obtient

$$\left(P_1(X)P_2(X)\right)Q(X) = R\left(X^{1000000}\right).$$

Comme tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est produit d'une constante et de polynômes unitaires du premier degré et de polynômes unitaires du second degré irréductibles, il suffit de montrer la propriété pour ces facteurs irréductibles. Le cas des polynômes constants est idiot. Pour un polynôme réel $P(X) = X - \alpha$ unitaire du premier degré, on pose

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{999999} \alpha^k X^{999999-k},$$

et ainsi

$$P(X)Q(X) = X^{1000000} - \alpha^{1000000} \in \mathbb{R}\left[X^{1000000}\right].$$

Pour un polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$, réel unitaire irréductible, on le factorise sous la forme

$$P(X) = (X - \alpha)\left(X - \overline{\alpha}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

On considère alors le polynôme

$$Q(X) = \left(\sum_{k=0}^{999999} \alpha^k X^{999999-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{999999} \overline{\alpha}^k X^{999999-k}\right).$$

C'est un polynôme réel (produit de deux polynômes complexes conjugués). Et

$$P(X)Q(X) = \left(X^{1000000} - \alpha^{1000000}\right)\left(X^{1000000} - \overline{\alpha^{1000000}}\right)$$

est, pour la même raison, un polynôme réel et c'est un polynôme en $X^{1000000}$: Ceci clôt la démonstration.