Pierre Renfer (Saint Georges D'Orques)

On trouve facilement une condition nécessaire pour qu'un nombre soit quarrable. En effet, un tel entier est la somme des chiffres d'un carré et cette somme est congrue à ce carré modulo 9. Or dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, les seuls carrés sont les classes de 0, 1, 4 et 7. Un entier quarrable est donc nécessairement congru à 0, 1, 4 ou 7, modulo 9.

On va voir maintenant que cette condition est suffisante, en traitant séparément tous les cas.

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, considérons le carré $(10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 0 et pour un entier $\alpha \geq 1$,

$$(10^\alpha - 1)^2 = 10^{2\alpha} - 2 \times 10^\alpha + 1 = (10^\alpha - 2)\cdot 10^\alpha + 1 = (999\ldots98)\cdot 10^\alpha + 1,$$

le chiffre 9 figurant $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre est donc égale à 9α. Ainsi, tout entier naturel congru à 0 modulo 9 est quarrable.

• On considère ensuite le carré $(2\cdot 10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 1. Et pour $\alpha \geq 1$,

$$(2\cdot 10^\alpha - 1)^2 = 4\cdot 10^{2\alpha} - 4 \times 10^\alpha + 1 = (4\cdot 10^\alpha - 4)\cdot 10^\alpha + 1 = (399\ldots96)\cdot 10^\alpha + 1,$$

le chiffre 9 figurant $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre est donc égale à $1 + 9\alpha$. Ainsi, tout entier naturel congru à 1 modulo 9 est quarrable.

• On considère maintenant le carré $(3\cdot 10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 0. Et pour $\alpha \geq 1$,

$$(3\cdot 10^\alpha - 1)^2 = 9\cdot 10^{2\alpha} - 6 \times 10^\alpha + 1 = (9\cdot 10^\alpha - 6)\cdot 10^\alpha + 1 = (899\ldots94)\cdot 10^\alpha + 1,$$

le chiffre 9 figurant encore $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre vaut $4 + 9\alpha$, donc tout entier naturel congru à 4 modulo 9 est quarrable.

• On considère enfin le carré $(5\cdot 10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 16 dont la somme des chiffres vaut 7. Et pour $\alpha \geq 1$,

$$(5\cdot 10^\alpha - 1)^2 = (25\cdot 10^{\alpha-1} - 1)\cdot 10^{\alpha+1} + 1 = (2499\ldots9)\cdot 10^{\alpha+1} + 1,$$

le chiffre 9 figurant $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre vaut $7+9\alpha$ donc tout entier naturel congru à 4 modulo 9 est quarrable.

Finalement, la condition nécessaire est également suffisante. Un nombre est donc quarrable si et seulement si son reste dans la division euclidienne par 9 vaut 0, 1, 4 ou 7.