Problème de L'Ω n°3 – mars 07

Solution proposée par E. Trotoux (Lycée C. De Gaulle Caen)

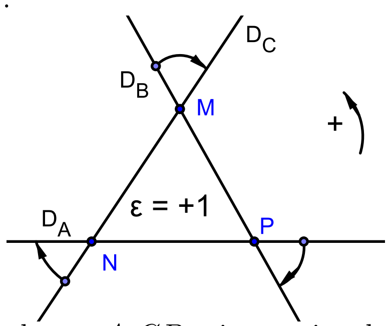
A, B et C sont trois points quelconques fixés du plan. Les points M, N et P sont quelconques tels que le triangle M N P soit équilatéral et que les droites portant ces points passent par A, B et C; on peut dire, afin de parler d'une même voix, que (MN) passe par C, (NP) passe par A et (MP) passe par B.
Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles M N P lorsque M, N et P décrivent le plan ?

---

1 Étude de la construction des triangles M N P.

Généralités et notations : Nous nous plaçons dans un plan orienté et nous supposons (l'énoncé indique *trois*) les points A, B et C deux à deux distincts. Une figure complète adaptée aux notations du texte se trouve à la fin des annexes (dernière page). Une figure simplifiée est accessible à la fin de la discussion de construction. Dans la suite, pour éviter des répétitions, « ϵ direct » signifiera direct dans le cas où $\epsilon = +1$ et indirect dans le cas où $\epsilon = -1$. Nous poserons $D_A = (NP)$ $D_B = (MP)$ $D_C = (MN)$. Si (D, Δ) est un couple de droites, nous écrirons $(D, \Delta) = \alpha$ pour signifier que α est un représentant (défini à $k\pi$ près) de la mesure (en radians) de l'angle du couple (D, Δ). Ainsi pour un triangle M N P ϵ direct et non dégénéré en un point, nous avons :

$$(D_A, D_B) = (D_B, D_C) = (D_C, D_A) = -\epsilon\,\frac{\pi}{3}.$$



Nous introduisons enfin les points A_0, B_0 et C_0 tels que A_0CB soit un triangle équilatéral ϵ direct (resp. B_0AC et C_0BA soient des triangles équilatéraux ϵ direct). Nous désignerons alors par $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$) le cercle circonscrit au triangle ABC_0 (resp. BCA_0, CAB_0). Les points A_0, B_0 et C_0 peuvent se superposer avec A, B et C dans certains cas de figure.

1.1 Analyse – Où l'on constate que M, N, P ne sont pas « quelconques ».

Soit un triangle M N P ϵ direct, répondant aux conditions demandées et non dégénéré en un point. Nous avons :
$(D_A, D_B) = (D_B, D_C) = (D_C, D_A) = -\epsilon\,\dfrac{\pi}{3}$.

Les cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont les lieux de points d'où l'on voit respectivement [AB], [BC] et [CA] sous un angle de couple de droites de mesure $-\epsilon\,\dfrac{\pi}{3}$.

Nous en déduisons que $N \in \mathcal{C}_3$ car ou bien $N \in \{A, C\}$ ou bien $(NC, NA) = (D_C, D_A) = -\epsilon\,\dfrac{\pi}{3}$. De même, $M \in \mathcal{C}_2$. De plus $M \in D_C$ et par suite $M \in \mathcal{C}_2 \cap D_C$. Plus précisément, dans le cas où $\mathrm{card}(\mathcal{C}_2 \cap D_C) = 1$ nous avons $M = C$. Dans l'autre cas où $\mathrm{card}(\mathcal{C}_2 \cap D_C) = 2$, nous avons $M = X$ avec X tel que $X \neq C$ et $\mathcal{C}_2 \cap D_C = \{C, X\}$. En effet ayant $D_C = (XC)$, envisageons les deux cas possibles :

- $X \neq B$. Cela permet d'écrire $(XB, XC) = -\epsilon\,\dfrac{\pi}{3}$. Comme la droite D_B est entièrement déterminée par le point B et l'angle (D_B, D_C) il en découle $D_B = (XB)$. Par suite, $D_B \cap D_C = \{X\}$, ce qui entraîne $M = X$.

– $X = B$. Cela donne $D_C = (BC)$ et conduit à $(D_B, BC) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$. La droite D_B est donc tangente en B à $\mathcal{C}_2$. Dès lors $D_B \cap D_C = \{B\}$, ce qui entraîne $M = B = X$.

Par un raisonnement analogue, $P \in \mathcal{C}_1$ et P se trouve entièrement déterminé par la connaissance de $D_A \cap \mathcal{C}_1$: $P = A$ lorsque D_A est tangente à $\mathcal{C}_1$ et P est le deuxième point distinct de A dans les autres cas.

Les droites D_A et D_C sont entièrement caractérisées par la donnée du point N sur $\mathcal{C}_3$. En effet
– ou bien N n'appartient pas à $\{A, C\}$, d'où $D_A = (AN)$ et $D_C = (CN)$
– ou bien $N = A$, d'où $D_C = (AC)$ et D_A est la tangente en A à $\mathcal{C}_3$ car $(D_C, D_A) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$.
– ou bien $N = C$ d'où $D_A = (AC)$ et D_C est la tangente en C à $\mathcal{C}_3$ car $(D_C, D_A) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$.

Ainsi tout triangle M N P ϵ direct, répondant aux conditions demandées et non dégénéré en un point, provient par construction d'intersections de droites et cercles, de la donnée d'un point N de $\mathcal{C}_3$ et des cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

1.2 Synthèse – Construction des triangles M N P

Nous étudions maintenant la configuration obtenue dans la construction dégagée précédemment. Nous choisissons $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et en déduisons les cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, puis nous sélectionnons un point N sur $\mathcal{C}_3$. Cela détermine les droites D_A et D_C, puis M et P comme cela a été vu dans l'analyse qui précède. Les droites D_A et D_C ainsi construites vérifient $(D_A, D_C) = \epsilon\ \frac{\pi}{3}$.

B, M, P **sont alignés**

- card$(\{B, M, P\} \leq 2$: l'alignement est acquis.
- card$(\{B, M, P\} = 3$: nous avons $P \neq B$ et $M \neq B$. D'une part, $(PB, D_A) = \epsilon\ \frac{\pi}{3}$ puisque par construction, $P = A$ et $(PB) = (AB)$ si D_A est la tangente en A à $\mathcal{C}_1$ et $P \neq A$ et $(PB, PA) = \epsilon\ \frac{\pi}{3} (P \in \mathcal{C}_1)$ si D_A est sécante à $\mathcal{C}_1$ en deux points. D'autre part, de façon similaire $(MB, D_C) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$, puisque par construction, $M = C$ et $(MB) = (BC)$ si D_C est la tangente en C à $\mathcal{C}_2$ et $M \neq C$ et $(MB, MC) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3} (M \in \mathcal{C}_2)$ si D_C est sécante à $\mathcal{C}_2$ en deux points. Dès lors, l'alignement découle de la relation angulaire qui suit :
$(PB, MB) = (PB, D_A) + (D_A, D_C) + (D_C, MB) = \epsilon\ \frac{\pi}{3} + \epsilon\ \frac{\pi}{3} + \epsilon\ \frac{\pi}{3} = \epsilon\ \pi = 0$

Le triangle M, N, P

- card$(\{B, M, P\} = 3$: Nous posons $D_B = (MB)$. Selon la construction qui précède $(D_A, D_B) = (D_B, D_C) = (D_C, D_A) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$, $D_C \cap D_B = \{M\}$, $D_C \cap D_A = \{N\}$ et $D_A \cap D_B = \{P\}$. Comme $M \neq P$ nous concluons que le triangle M, N, P est équilatéral, ϵ direct et non dégénéré en un point. Nous avons bien $A \in (NP), B \in (MP), C \in (MN)$.
- card$(\{B, M, P\} \leq 2$: nous avons alors $M = P$ ou $M \neq P$.

$M \neq P$. Posons $D_B = (MP)$. Si $P \neq B$ nous avons comme précédemment $(PB, D_A) = (D_B, D_A) = \epsilon\ \frac{\pi}{3}$. Si $M \neq B$ nous concluons de même que $(MB, D_C) = (D_B, D_C) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$. Ici l'un de ces deux cas a lieu et puisque $(D_C, D_A) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$, il s'ensuit que $(D_A, D_B) = (D_B, D_C) = (D_C, D_A) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$, et nous concluons aussi que le triangle M, N, P est équilatéral, ϵ direct et non dégénéré en un point avec $A \in (NP), B \in (MP), C \in (MN)$.

$M = P$. Cela entraîne $P \in D_C$ car $M \in D_C$. Nous avons alors $\{N, P\} \subset D_A \cap D_C$, ce qui implique $N = P$. Le triangle M, N, P est dégénéré en un point. Nous observons que ce cas implique $N \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ car $P \in \mathcal{C}_1$ et $M \in \mathcal{C}_2$. Réciproquement, si $N \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ nous avons $M = N = P$. En effet $N \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Si $N = C$, $D_A = (AC)$, D_C est tangente en C à $\mathcal{C}_3$ et $(D_C, D_A) = -\epsilon\ \dfrac{\pi}{3}$. De plus $C \in \mathcal{C}_1$ entraîne $(CA, CB) = \epsilon\ \dfrac{\pi}{3}$. Il vient alors $(D_C, CB) = (D_C, D_A) + (D_A, CB) = 2\epsilon\ \dfrac{\pi}{3} = -\epsilon\ \dfrac{\pi}{3}$. Ainsi D_C est une tangente à $\mathcal{C}_2$ en C et donc $M = C = N$. Si $N \neq C$ nous avons $N \in D_C \cap \mathcal{C}_2$, ce qui permet de conclure que $M = N$. De la même manière en distinguant $N = A$ et $N \neq A$, nous concluons ici que $P = N$. Finalement $N \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \Longrightarrow M = N = P$

Nous pouvons tirer le bilan de construction suivant.

$N \notin \mathcal{C}_3$: Il n'y a pas de triangle MNP répondant aux conditions imposées.

$N \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$: Il n'y a pas de triangle MNP non dégénéré répondant aux conditions imposées.

$N \in \mathcal{C}_3$ et $N \notin \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$: Il y a un triangle MNP équilatéral, ϵ direct et non dégénéré en un point répondant aux conditions imposées.

1.3 Discussion selon la configuration de A, B et C.

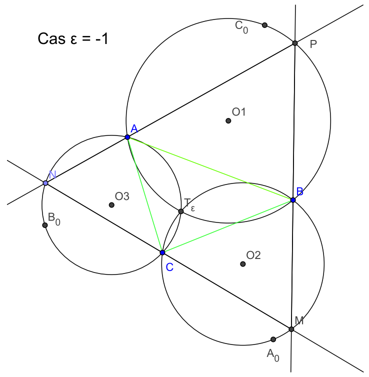
Nous étudions $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ pour affiner notre conclusion. Par construction de ces cercles, nous avons $B \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, $C \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ et $A \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3$. Nous allons examiner les différentes possibilités concernant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui ont toujours le point$B$ en commun.

- $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents en B et distincts. Cela a lieu ssi $(BC, BA) = \epsilon\ \dfrac{2\pi}{3} = -\epsilon\ \dfrac{\pi}{3}$ et $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$. La première condition équivaut à $B \in \mathcal{C}_3$. Dans ce cas $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{B\}$.
- $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sécants en deux points dont B. $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{B, T_\epsilon\}$. Vu le premier cas, on a nécessairement $B \notin \mathcal{C}_3$. T_ϵ satisfait à $T_\epsilon = A$ ou $T_\epsilon = C$ ou $(T_\epsilon C, T_\epsilon A) = -\epsilon\ \dfrac{\pi}{3}$ puisque T_ϵ remplit des conditions angulaires sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Ainsi $T_\epsilon \in \mathcal{C}_3$. Nous pouvons conclure dans ce cas : $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{T_\epsilon\}$. Notons qu'il s'agit de l'un des points dits « de Toricelli » du triangle ABC.
- $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ confondus (au moins trois points distincts en commun). Il s'ensuit que $A \in \mathcal{C}_2$ et $C \in \mathcal{C}_1$. Nous en tirons les relations $(AB, AC) = (CA, CB) = -\epsilon\ \dfrac{\pi}{3}$, puis $(BC, BA) = -\epsilon\ \dfrac{\pi}{3}$. Dans ce cas le triangle ABC est équilatéral ϵ' *direct* où $\epsilon' = -\epsilon$. Les trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ coïncident avec le cercle circonscrit à ABC. Ici, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_3$. Réciproquement, si le triangle ABC est équilatéral ϵ' *direct* où $\epsilon' = -\epsilon$, les trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ coïncident avec le cercle circonscrit à ABC. Ce cas de figure est ainsi caractérisé.

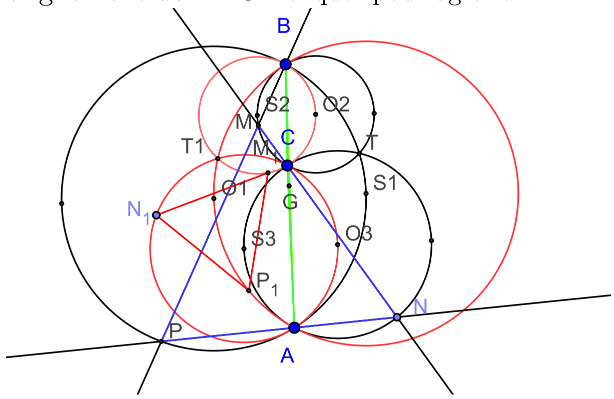
Conclusion générale : Étant donnés $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et A, B, C deux à deux distincts, nous affirmons :

- si le triangle ABC est équilatéral ϵ' *direct* où $\epsilon' = -\epsilon$, il n'existe pas de triangle MNP équilatéral ϵ *direct* non dégénéré.
- si la configuration ABC n'est pas dans le cas précédent (cela inclut les cas ABC équilatéral ϵ *direct* et ABC alignés), tous les triangles MNP équilatéraux, ϵ *direct* non dégénérés se construisent en partant d'un point N de $\mathcal{C}_3$ distinct du point T_ϵ, qui permet de définir D_A, D_C et leurs points d'intersection avec $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Le point T_ϵ peut éventuellement être l'un des sommets A, B, C lorsque deux des trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ sont tangents.

Cas général - cliquer pour agrandir



Cas d'alignement de ABC - cliquer pour agrandir



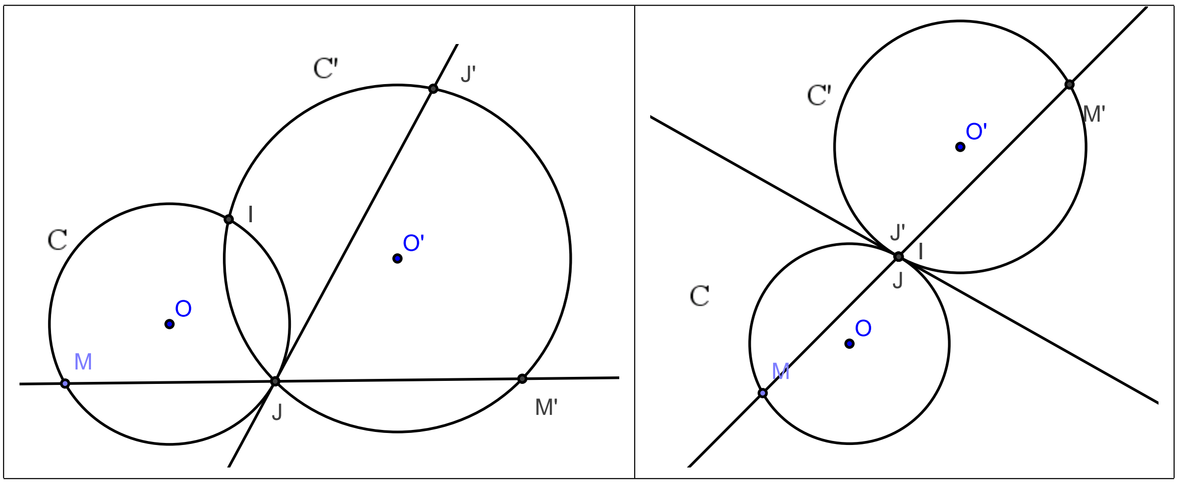
2 Ensemble des centres de gravité des triangles M N P.

Nous venons de constater l'existence de deux familles ($\epsilon \in \{-1, 1\}$) de triangles satisfaisant aux contraintes de l'énoncé. Nous allons étudier séparément chaque famille.

2.1 Relation entre le point N et le centre de gravité L du triangle M N P – Ensemble $\mathcal{L}_\varepsilon(\varepsilon = \pm 1)$ des points L.

Un lemme classique Étant donnés deux cercles sécants $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{I, J\}$ où $I \neq J$ et la similitude directe σ de centre I qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, le transformé $M' = \sigma(M)$ d'un point M quelconque sur $\mathcal{C}$ s'obtient par intersection droite/cercle : $\{M'\} = (MJ) \cap \mathcal{C}'$ pour $M \neq J$ et $\{J'\} = \Delta_J \cap \mathcal{C}'$ pour $M = J$ (Δ_J est la droite tangente à $\mathcal{C}$ en J).

Remarques : le lemme s'adapte dans le cas où $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{I\}$. Dans ce cas σ est l'homothétie de centre I qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.



Illustrations du lemme

Nous nous plaçons dans l'un des cas où l'on peut construire des triangles MNP équilatéraux, ϵ *direct* non dégénérés. En utilisant le lemme précédent dans la figure construite à partir de ABC, nous pouvons dire que $M = \sigma_2(N)$ et $P = \sigma_1(N)$ où σ_1 est la similitude directe de centre T_ϵ qui transforme $\mathcal{C}_3$ en $\mathcal{C}_1$ et σ_2 la similitude directe de centre T_ϵ qui transforme $\mathcal{C}_3$ en $\mathcal{C}_2$. Notons L l'isobarycentre de MNP. L'application de $\mathcal{C}_3$ dans le plan qui à N associe L est la restriction à $\mathcal{C}_3$ d'une similitude directe de centre T_ϵ ou d'une projection sur le point T_ϵ. En effet, en prenant un repère $(T_\epsilon, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orthonormé, nous pouvons exprimer l'affixe z' de L en fonction de l'affixe z de N : $z' = \dfrac{1}{3}(z + a_1 z + a_2 z) = \dfrac{1 + a_1 + a_2}{3} z$. a_1 est le nombre complexe associé à la similitude σ_1 et a_2 est le nombre complexe associé à la similitude σ_2.

Dans le cas où $1 + a_1 + a_2 = 0$, nous obtenons $z' = 0$, soit $L = T_\epsilon$ pour toute position de N sur $\mathcal{C}_3$. Ce cas se produit ssi ABC est équilatéral ϵ *direct* (preuve en annexe). Tous les triangles MNP ϵ *direct* ont alors le même centre de gravité qui est le centre de gravité de ABC.

Dans le cas où $1 + a_1 + a_2 \neq 0$, L est l'image de N dans une similitude directe σ de centre T_ϵ. Nous pouvons dès lors conclure que le lieu des points L est l'image du cercle $\mathcal{C}_3$ privé du point T_ϵ qui est invariant dans cette similitude. L'ensemble $\mathcal{L}_\varepsilon$ cherché est donc un cercle privé d'un point(T_ϵ). En désignant par O_1, O_2, O_3 les centres respectifs de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, nous pouvons dire que l'image par σ de $\mathcal{C}_3$ est le cercle centré au centre de gravité de $O_1O_2O_3$ car $O_1 = \sigma_1(O_3)$ et $O_2 = \sigma_2(O_3)$. Dans ce cas, nous verrons plus loin que $O_1O_2O_3$ est toujours un triangle équilatéral dont le centre de gravité est aussi celui de ABC.

2.2 Points particuliers de l'ensemble $\mathcal{L}_\varepsilon$.

Le cas ABC équilatéral conduit à un lieu réduit au centre de gravité de ABC. Nous supposerons dans la suite que ABC n'est pas équilatéral.

Nous introduisons les points S_1, S_2, S_3 symétriques de O_1, O_2, O_3 par rapport à $(AB), (BC), (CA)$. Ces trois nouveaux points sont respectivement situés sur $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ puisque $(S_1A, S_1B) = -(O_1A, O_1B) = 2\epsilon\ \frac{\pi}{3} = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$ et de même $(S_2B, S_2C) = (S_3C, S_3A) = -\epsilon\ \frac{\pi}{3}$.

Les points S_1, S_2, S_3 correspondent à O_1, O_2, O_3 pour la construction des triangles MNP ϵ' *direct* où $\epsilon' = -\epsilon$.

Nous verrons que les points $O_1, O_2, O_3, S_1, S_2, S_3$ forment des triangles équilatéraux et sont deux à deux distincts.

Nous montrons maintenant que S_1, S_2, S_3 sont éléments du lieu $\mathcal{L}_\varepsilon$. Nous prouvons que S_3 est l'orthocentre d'un triangle MNP particulier.

Soit $D = (S_3, S_1)$ et Δ la perpendiculaire à D passant par C. Δ recoupe $\mathcal{C}_3$ en $N (N = C$ lorsque Δ est tangente à $\mathcal{C}_3$ en $C)$. Nous construisons alors le triangle MNP ϵ *direct* particulier. Supposons que $P \neq S_1$ (Sinon remplacer (PS_1) par la tangente à $\mathcal{C}_1$ en S_1). Établissons que (PS_1) est la hauteur de MNP issue de P.

Par construction $(AC_0, AB) = (PC_0, D_B) = \epsilon\ \frac{\pi}{3}$ et $(MN, MP) = \epsilon\ \frac{\pi}{3}$. Donc $(PC_0, MN) = 0$ et PC_0 est parallèle à MN. Comme $[S_1C_0]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_1$, nous avons $(PS_1)\perp(PC_0)$ puis $(PS_1)\perp(MN)$ (CQFD).

De façon identique avec $\mathcal{C}_3$ nous pouvons établir que (NS_3) est une hauteur de MNP.

Comme nous avons par construction $(S_1S_3)\perp(MN)$, nous concluons que $S_3 \in (PS_1)$. S_3 est donc l'orthocentre de MNP et par suite aussi le centre de gravité de MNP. Donc $S_3 \in \mathcal{L}_\varepsilon$.

Un raisonnement similaire permet de conclure pour les points S_1, S_2. Le lieu $\mathcal{L}_\varepsilon$ est donc le cercle circonscrit au triangle $(S_1S_2S_3)$ privé du point T_ϵ.

Nous appliquons maintenant un théorème qui nous précise que le triangle $(S_1S_2S_3)$ est équilatéral et a pour centre, le centre de gravité de ABC. Ce théorème justifie aussi quelques points admis précédemment.

Théorème - Napoléon/Toricelli ? On se donne des points A, B, C tels que ABC n'est pas équilatéral et $\epsilon \in \{-1, 1\}$. On construit les points A_0, B_0, C_0 tels que A_0CB soit un triangle équilatéral ϵ direct (resp. B_0AC et C_0BA soient des triangles équilatéraux ϵ direct). Nous désignons alors par Γ_1 (resp. Γ_2, Γ_3) le cercle circonscrit au triangle ABC_0 (resp. BCA_0, CAB_0) et $\Omega_i (1 \leq i \leq 3)$ leur centres respectifs. On note G l'isobarycentre de ABC.

Nous avons alors les conclusions suivantes :

1. Les droites $(AA_0), (BB_0), (CC_0)$ sont sécantes en un point T_ϵ commun aux cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.
2. $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{BB_0} + \overrightarrow{CC_0} = \overrightarrow{0}, \quad AA_0 = BB_0 = CC_0$ et
   $(\overrightarrow{A_0A}, \overrightarrow{BB_0}) = (\overrightarrow{B_0B}, \overrightarrow{CC_0}) = (\overrightarrow{C_0C}, \overrightarrow{AA_0}) = \epsilon\ \frac{\pi}{3}[2\pi]$
3. $\overrightarrow{G\Omega_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_0}, \quad \overrightarrow{G\Omega_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_0}, \quad \overrightarrow{G\Omega_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BB_0}$
4. Les points $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ se déduisent par une rotation de centre G et d'angle $-\epsilon\ \frac{2\pi}{3}$ $(\Omega_1 \to \Omega_2 \to \Omega_3)$. Le triangle $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ est équilatéral de centre G non dégénéré.

La preuve de ce théorème utilise des rotations liées aux triangles équilatéraux, des relations angulaires pour des points cocycliques et le théorème de Thalès. (Voir par ex. Y. et R. SORTAIS La géométrie du triangle Ed. HERMANN)

En appliquant le théorème précédent avec les deux valeurs de ϵ, nous établissons que les triangles $O_1O_2O_3$ et $S_1S_2S_3$ sont équilatéraux et centrés sur l'isobarycentre G de ABC.

2.3 Récapitulation globale

ABC **équilatéral** Ce cas conduit à un lieu réduit au centre de gravité de ABC.

ABC **non équilatéral** Les deux familles de cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits sur les côtés $[AB],[BC],[CA]$ définissent les deux points de Toricelli du triangle (Points T_ϵ avec $\epsilon \in \{-1,1\}$). L'ensemble des centres de gravité des triangles MNP répondant aux contraintes est la réunion de deux cercles centrés en G et passant par les deux points de Toricelli, privé de ceux-ci.

ABC **alignés** Cette situation est un cas particulier du cas précédent. Ici, les deux familles de cercles sont symétriques par rapport à la droite (AB) et il en est de même pour les points de Toricelli. L'isobarycentre G de ABC est sur (AB). Les deux cercles définissant le lieu sont symétriques par rapport à la droite (AB) et par conséquent confondus. Ainsi dans ce cas, le lieu est constitué d'un cercle centré en G sur (AB), passant par les deux points de Toricelli et privé de ces deux points (symétriques /(AB) ici).

2.4 Relations métriques relatives aux ensembles $\mathcal{L}_\varepsilon(\varepsilon = \pm 1)$.

Nous supposons ABC non équilatéral et choisissons l'orientation du plan qui rend ABC direct. Posons $AB = a, BC = a, AC = b, \epsilon = 1$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{C}$ où $\widehat{C} \in [0,\pi]$. Introduisons le repère orthonormé direct $(E, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où E est le milieu de [AC] et $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AC}$. Nous avons $A = \left(-\dfrac{b}{2}, 0\right), C = \left(\dfrac{b}{2}, 0\right), B_0 = \left(0, \dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right), B = \left(\dfrac{b}{2} - a\cos\widehat{C}, -a\sin\widehat{C}\right)$.

Nous en déduisons $BB_0{}^2 = \left(\dfrac{b}{2} - a\cos\widehat{C}\right)^2 + \left(\dfrac{b\sqrt{3}}{2} + a\sin\widehat{C}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4} + 3\dfrac{b^2}{4} + a^2 - ab\cos\widehat{C} + ab\sqrt{3}\sin\widehat{C}$.

De plus d'après des relations classiques, $-ab\cos\widehat{C} = \frac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2)$, $\sin\widehat{C} = \dfrac{c}{2R}$ où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC et la surface S de ABC vérifie $S = \dfrac{abc}{4R}$. On obtient alors $BB_0{}^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{abc\sqrt{3}}{2R} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2S\sqrt{3}$. Avec la formule de Héron, il vient $BB_0{}^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. D'après le théorème cité précédemment $\overrightarrow{GO_3} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BB_0}$, ce qui amène à $\boxed{GO_3{}^2 = \dfrac{1}{9}\left[\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}\right]}$.

Nous obtenons de même pour S_3 symétrique de O_3 par rapport à $[AC]$ la relation

$$\boxed{GS_3{}^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 2\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}\right]}.$$

Nous pouvons en tirer des relations simples concernant notre lieu.

- Si ABC sont alignés, l'aire de ABC est nulle, $(GO_3{}^2 = GS_3{}^2)$ et le rayon r du lieu cherché vérifie $\boxed{r^2 = \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{18}\right)}$.
- Dans les autres cas, les rayons r_1 et r_2 des deux parties connexes du lieu vérifient $\boxed{r_1{}^2 + r_2{}^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}}$.

2.5 Annexes

1) Calcul de $1 + a_1 + a_2$ pour déterminer la transformation σ.

ABC **alignés** Posons $AB = a, BC = a, AC = b$. Nous supposons d'abord $\epsilon = -1$. Le rapport de la similitude σ_1 (resp. σ_2) est $\dfrac{c}{b}$ (resp. $\dfrac{a}{b}$). L'angle de la similitude σ_1 (resp. σ_2) est $-\frac{\pi}{3}$ (resp. $+\frac{\pi}{3}$).

Nous avons alors $1+a_1+a_2 = 1+\frac{c}{b}e^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{a}{b}e^{-i\frac{-\pi}{3}}$. La partie réelle de $1+a_1+a_2$ vaut alors $\frac{2b+a+c}{2b}$ qui est strictement positif. Ainsi $1+a_1+a_2 \neq 0$: σ est une similitude directe. (Idem pour $\epsilon = 1$)

ABC **non alignés** Nous supposons d'abord $\epsilon = -1$. α, β, γ sont les déterminations principales de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Le rapport de la similitude σ_1 (resp. σ_2) est $\frac{c}{b}$ (resp. $\frac{a}{b}$). L'angle de la similitude σ_1 (resp. σ_2) est $\alpha - \frac{\pi}{3}$ (resp. $-\gamma + \frac{\pi}{3}$). D'après les relations d'un triangle $\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$ et $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$. D'où $1+a_1+a_2 = 1+\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}e^{i(\alpha-\frac{\pi}{3})} + \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}e^{i(\frac{\pi}{3}-\gamma)}$ dont la partie imaginaire vaut $\frac{\sin(\frac{\pi}{3})\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$. Elle est nulle ssi $\alpha = \gamma$ avec $|\alpha| \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
La partie réelle vaut alors $1 + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\left(e^{i(\alpha-\frac{\pi}{3})} + e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)}\right) = 1 + \frac{\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})}{\cos\alpha}$
L'équation d'inconnue x dans $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que $\cos(x-\frac{\pi}{3}) = -\cos(x)$ admet pour seule solution $x = -\frac{\pi}{3}$. Nous pouvons donc conclure que $1+a_1+a_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = -\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire que ABC est équilatéral indirect. La réciproque est vraie car on a alors $a_1 = j^2$ et $a_2 = j$ et par suite $1+a_1+a_2 = 1+j+j^2 = 0$. σ est donc une similitude directe lorsque ABC n'est pas équilatéral indirect et une application constante sinon.
Le cas $\epsilon = +1$ conduit à $1+a_1+a_2 = 1+\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3})} + \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}e^{i(\frac{-\pi}{3}-\gamma)}$ d'où la conclusion analogue $1+a_1+a_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire que ABC est équilatéral direct. σ est donc une similitude directe lorsque ABC n'est pas équilatéral direct et une application constante sinon.

2) Figure