Le domaine numérique

Les questions posées lors de l'étude de 2008 recouvrent cinq aspects du domaine numérique :

I. le calcul automatisé
II. le calcul réfléchi
III. la numération
IV. les problèmes additifs/soustractifs
V. les ordres de grandeurs

Il est à noter que les scores obtenus en 2008 sont sensiblement identiques à ceux de 2005 pour ce domaine.
Les épreuves de type D (questionnaires oraux et visuels) apportent un éclairage intéressant dans chaque domaine par rapport à l'étude 2005.

I. Le calcul automatisé

Le calcul automatisé fait appel à des résultats connus (tables) et/ou peut mettre en jeu des propriétés simples des nombres (critères de divisibilité par exemple) ; de façon générale. Ces questions se trouvent souvent en début de questionnaire, et servent à mettre l'élève en confiance, en s'appuyant sur son savoir direct.
Quelques exemples de questions et leurs scores de réussite

Epreuve orale sixième question 1 **Calcule 8 x 7**	Score réussite : 79 %
Epreuve orale sixième question 2 **Calcule 781 x 10**	Score réussite : 83 %
Epreuve orale 5° **233 est-il divisible par 3 ?**	Score réussite : 59 %

II. Le calcul réfléchi

Celui-ci demande à l'élève une intuition des nombres (qui s'affine avec l'entraînement) une prise d'initiative, simple en général, qui lui permet ensuite d'utiliser un résultat connu, ou une procédure de calcul.

épreuves	Procédures possibles	Scores réussite
Epreuve orale sixième **Calcule 27 x 5**	- décomposition 20 + 7 , 30 – 3 ; 25 + 2 puis distributivité - ou 27 * 10 / 2	58 %
Epreuve visuelle sixième **Calcule 25 x 6 x 4**	Reconnaître 25 x 4 Commutativité et associativité de la multiplication	43 %
Epreuve visuelle cinquième **Calcule 2 345 x 17 – 2 345 x 7**	Factorisation	22 %
Epreuve visuelle cinquième **Calcule 420 x 1,5**	▹ 420 + 420/2 ▹ 4 x 1,5 x100 + 20 x1,5 Etc.	27 %
Epreuve visuelle cinquième **-12,7 + 3,8 + 12,7**	Reconnaître des opposés	47 %

Les scores sont loin d'être élevés, ils illustrent une manipulation maladroite des nombres et une construction pas toujours mise en place en ce début de collège : 27 n'est pas seulement le nombre de la comptine numérique qui suit 26 et précède 28. C'est 20 + 7, deux dizaines et 7 unités.
Le produit 4 x 1,5 devrait être un résultat connu ou en tout cas très vite retrouvé en cinquième : 4 x 15 = 60 (le travail sur les heures devrait servir ici) …

Multiplier par 1,5 devrait être associé à «ajouter au nombre sa moitié». Nos élèves ne sont pas à l'aise avec les nombres, forçons-les à les triturer, les décomposer, les utiliser. Les élèves ne pourront entrer dans le calcul littéral tant que les relations entre les nombres ne seront pas maîtrisées : vous les imaginez ensuite face à « $x + \frac{x}{2}$ » ?

III. La numération

Le nerf de la guerre … En effet, beaucoup d'erreurs dans le domaine numérique semblent relever d'une mauvaise application des procédures de calcul, de l'apprentissage des tables. Or c'est bien souvent le fonctionnement du système d'écriture des nombres qui fait défaut : multiplication ou division par les puissances de dix, décalage de la virgule, ...

A la question orale : « **Combien vaut le double de 2,8** » un gros tiers (37%) des élèves ne donnent pas la bonne réponse. On notera 15% de réponse 4,16, ce qui révèle chez l'élève la conception erronée, mais malheureusement très active, du décimal comme « recollement de deux entiers » de part et d'autre de la virgule.

a) jeux d'écriture

Questions posées au niveau Sixième

(oral) **Ecris la fraction « trois centièmes » sous forme décimale**	Score réussite : 52 %

Faible score. A l'examen des feuilles de réponse, on découvre des $\frac{3}{100}$ …

Les élèves entendent «trois centièmes», ils écrivent la fraction, sans écouter la suite de la question, ou sans prêter attention à l'écriture demandée, ou par mauvaise connaissance du vocabulaire… De manière plus générale, il semble que les élèves aient du mal à concevoir qu'un nombre ne soit pas attaché à une écriture unique, ce qui pose des difficultés dans les tâches de conversion.

Face à un questionnaire écrit, les réussites à chaque item sont élevées, mais la réussite conjointe se rapproche de celle observée au questionnaire oral :

Vrai ou Faux ?				
a	$3{,}7 = \frac{37}{10}$	V	F	Jnsp
b	$3{,}7 = \frac{0{,}37}{10}$	V	F	Jnsp
c	$0{,}03 = \frac{3}{7}$	V	F	Jnsp
d	$0{,}03 = \frac{3}{100}$	V	F	Jnsp

R.C. : 50 %

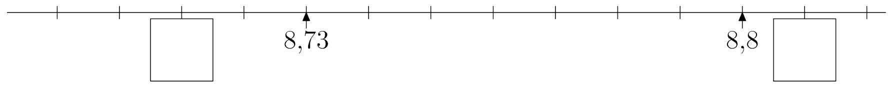
R.E.
item a : 88 %
item b : 86 %
item c : 77 %
item d : 95 %

L'écriture des nombres décimaux n'est donc pas maîtrisée en fin de second trimestre de sixième.

b) la droite graduée

Epreuve B sixième

Le dessin ci-dessous représente une droite régulièrement graduée.

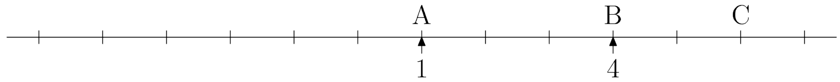


Écris dans les cases les nombres qui conviennent.

R.E. item 1 : 70 % **R.E. item 2 : 56 %**

Epreuve B cinquième

Le dessin ci-dessous représente une droite régulièrement graduée.



1. Quelle est l'abscisse du point C ? ....
2. Place le point D d'abscisse -1 ;
3. Place le point E d'abscisse $-3{,}5$.

R.E. item 1 : ***85 %***
R.E. item 2 : ***71 %***
R.E. item 3 : ***78 %***

On notera pour la question sixième, que 21 % des élèves proposent 8,9 dans la case de droite, ce qui correspond à une discrétisation des nombres décimaux à un chiffre après la virgule conçue de manière congruente avec la graduation de la droite. On constate que 23 % des élèves ne donnent pas de réponse, ou en donne une non répertoriée.

<u>Les comparaisons :</u>

Epreuve A sixième

Vrai ou Faux ?

a	$103{,}5 < 110{,}51$	V	F	Jnsp
b	$17{,}23 < 13{,}8$	V	F	Jnsp
c	$16{,}18 < 16{,}108$	V	F	Jnsp
d	$0{,}029 < 0{,}002\,9$	V	F	Jnsp

R.C. : 56 %

R.E.
item a : 91 %
item b : 88 %
item c : 77 %
item d : 84 %

Les taux de réussite au premier item et au second item s'expliquent par le fait que les conceptions erronées habituelles (1035<11051 donc 103,5<110,51 ou le plus grand est celui qui a le plus grand nombre de chiffre...) permettent d'obtenir le bon résultat.

Il faudrait davantage isoler les variables dans ce type de tâche pour avoir accès aux niveaux de conceptualisations...

<u>Premiers calculs avec les relatifs</u>

En cinquième, les nombres relatifs sont introduits. L'élève apprend à les positionner sur une droite graduée, à les comparer, les classer par ordre croissant, puis par des déplacements ou perte et gains, met en place les premières règles opératoires :

Questionnaire visuel cinquième	Scores de réussite :
Calcule (-4)+(+7)	61 %
Calcule (-5)-(-15)	23 %

Les scores ne sont certainement pas révélateurs, de nombreux collègues ayant retiré la question, car la notion n'avait pas encore été abordée, ou était en cours d'apprentissage.

c) les produits par « 10 and co »

Questionnaire oral et visuel sixième

Question	**Calcule 1,23 x 10**	**Calcule : 100 x 2,8**	**Calcule : 38,5 : 100**	**Calcule : 88 x 0,1**
Score réussite	64 %	61%	50%	47%

Les réponses aux deux premières questions avaient un codage plus complet :

- les réponses 10,23 et 1,230 se trouvent dans respectivement 5 % et 2% des fiches réponses
- les réponses 200,8 et 2,800 se trouvent respectivement dans 5% et 4% des fiches de réponses

Ces « erreurs attendues » sont finalement anecdotiques, mais on retiendra que, dans chaque cas, près de 40% des élèves n'ont pas su répondre.

La question : 1,23 x 10 a été également posée en cinquième, le score relevé est de 77 % pour la réponse correcte.

Pour terminer, les deux questions jumelles, commentées par ailleurs :

Questionnaire oral sixième et cinquième	Questionnaire visuel sixième
J'ai multiplié un nombre par 31 et j'ai obtenu 3,1. Quel était ce nombre ?	**Par quel nombre faut-il remplacer les pointillés ? 31 x …. = 3,1**
Score réussite : - sixième : 42 % - cinquième : 47 %	Score réussite : - sixième : 53%

La différence de support, oral pour la première question visuel pour la seconde, explique à lui seul l'écart entre les taux de réussite. Dans la question visuelle, l'élève retrouve le bon vieil « exercice à trou » de son cahier d'exercices, et le « 0,1 » arrive plus facilement. Là encore, la moitié des élèves répondent correctement.

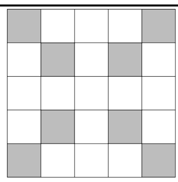
d) les fractions

Peu de commentaires sur cette question, certains élèves essaient de placer les nombres : 1 ;2 ; 3 et 5, ce qui révèle encore une difficulté dans le domaine du sens à donner aux fraction et notamment à comprendre leur écriture.

Epreuve B sixième et cinquième	

Sur la demi-droite ci-dessous, on a placé les nombres 0 et 1. Place le mieux que tu peux les nombres $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{3}$.  **R.E.** **item 1 : 36 %|*37 %*** **item 2 : 34 %|*36 %*** **item 3 : 30 %|*32 %*** **R.C. : 27 %|*30 %***	Bien sûr, la fraction supérieure à 1 semble plus difficile à placer que les fractions unitaires. Item 1 : placement correct de 1/3 Item 2 : placement correct de 2/3 Item 3 : placement correct de 5/3

Les deux questions suivantes sont commentées dans l'article « un quart de dérision »

Le damier ci-contre est constitué de carrés identiques. 1. Quelle fraction de l'aire du grand carré est occupée par la partie grisée ? Réponse :........................... 2. Exprime cette fraction en centièmes Réponse :...........................  **R.E. item 1 : 55 %|*73 %*** **R.E. item 2 : 11 %|*23 %***	Lors des élections des délégués de la 5e A, 25 élèves ont voté. Pierre a reçu 15 voix. Avec quel pourcentage de voix a-t-il été élu ? **R.E. item 1 : *27 %***

L'élève de cinquième fait ses premiers calculs avec des fractions dont le dénominateur n'est pas une puissance de 10 :

Epreuve B cinquième	
Calcule (écris les résultats sous forme de fraction) : $\frac{5}{13} + \frac{7}{13} = \_\_\_$ | $\frac{18}{27} - \frac{13}{27} = \_\_\_$ $\frac{7}{9} \times \frac{5}{3} = \_\_\_$ | $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \_\_\_$ **R.E. item 1 : *66 %*** **R.E. item 2 : *51 %***	item 1 : réponses correctes premières lignes item 2 : réponses correctes à la deuxième ligne

Laissons la « parole » aux élèves :

$\frac{5}{13} + \frac{7}{13} = \frac{12}{26}$	$\frac{18}{27} - \frac{13}{27} = \frac{5}{\varepsilon}$
$\frac{7}{9} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{27}$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$\frac{5}{13} + \frac{7}{13} = \frac{12}{26}$	$\frac{18}{27} - \frac{13}{27} = \frac{5}{0}$
$\frac{7}{9} \times \frac{5}{3} = \frac{21}{45}$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{15}$

$\frac{5}{13} + \frac{7}{13} = \frac{12}{13}$	$\frac{18}{27} - \frac{13}{27} = \frac{5}{27}$
$\frac{7}{\cancel{9}\,6} \times \frac{5}{\cancel{3}\,1} = \frac{35}{6}$	$\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} = \frac{}{0}$

$\frac{5}{13} + \frac{7}{13} = \frac{35}{13}$	$\frac{18}{27} - \frac{13}{27} = \frac{}{27}$
$\frac{7}{9} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{9}$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

IV. Les problèmes additifs/soustractifs

Où l'on retrouve la droite graduée …

Les questions présentées ici sont issues du questionnaire oral de sixième.
Les procédures que peut adopter l'élève dans ce type de questions sont :

- N° 1 : calculer par complément, en procédant à un addition
- N° 2 : calculer en retranchant successivement une ou plusieurs quantités

Poser les soustractions mentalement, génère en principe les erreurs attendues :
Exemple : Combien faut-il ajouter à 1,8 pour obtenir 7 ?
19% des élèves en sixième comme en cinquième répondent 6,2

En ce qui concerne le paquet de farine, 6 % des élèves, en sixième comme en cinquième proposent 750 g (1000 – 350 avec oubli de la retenue)

Question (oral)	procédure	Score réussite	
		6°	5°
Calcule 900 – 878	N°1 : ajouter 2 à 878 pour arriver à 880 puis 20 pour arriver à 900	48 %	60 %
Combien faut-il ajouter à 6,7 pour obtenir 7,4 ?	N°1 : ajouter 0,3 pour arriver à 7 puis 0,4 pour arriver à 7,4	50 %	61 %
Combien faut-il ajouter à 1,8 pour obtenir 7 ?	N°1 : 0,2 pour aller de 1,8 à 2, l'entier qui le suit immédiatement puis 5 pour arriver à 7 N°1 : ajouter 5 pour arriver à 6,8 pus 0,2 pour arriver à 7	54 %	63 %
Aujourd'hui Pierre fête ses 38 ans. En quelle année est-il né ?	N°2 : retrancher 38 de 2008, en commençant par exemple par retrancher 8 de 2008 puis 30 du résultat obtenu	57 %	
Calcule 965 – 105	N°2 : retrancher 5 puis 10 ou le contraire	69 %	77 %
Je prends 350g de farine d'un paquet qui en contient 1 kg. Combien me restera-t-il de farine ?	Convertir 1 kg en 1000 g N°1 : de 350 pour aller à 1000 ou N°2 : retrancher 300 à 1000 puis 50 au résultat obtenu	50 %	61 %

Une progression de 10 points en moyenne entre la sixième et la cinquième est à noter, mais des erreurs persistent en cinquième, les scores sur les 'erreurs attendues' sont égaux à ceux de sixième. Ceci semble révéler des paliers de conceptualisation : certaines conception erronées, si elles ne sont pas abandonnées assez tôt, se constituent en règle ou « théorèmes en actes » tenaces ; elles peuvent continuer à fonctionner tout au long de la scolarité.

Deux questions relatives à la multiplication et à la division euclidienne sont commentées dans les articles *QCM ou QCN* ? et *Imagine un rectangle …*
Les calculs sur les durées ont fait l'objet de deux questions qui ont fait l'objet de l'article A*h ! ces maudits codages !*

V. Les ordres de grandeurs

On attend des élèves de collège qu'un recours à l'ordre de grandeur soit utilisé pour anticiper un résultat ou en vérifier sa vraisemblance.

a) anticipation et cohérence

Questionnaire visuel sixième

Par quel nombre faut-il remplacer les pointillés ?

$$31 \times \ldots = 3{,}1$$

R.E. item 1 : 53 %

Anticiper ici signifie raisonner : le produit obtenu est inférieur au multiplicande. Le multiplicateur ne peut être supérieur à 1, encore moins à 10.

b) Prévision

Questionnaire visuel sixième

À la place de quelle lettre peut-on mettre le résultat du calcul « 7,9 × 978 » ?

$$A < 100 < B < 1\,000 < C < 10\,000 < D < 100\,000$$

R.E. item 1 : 47 %

Ici les choix d'approximation des facteurs n'influent pas sur la décision : où situer le produit? Les élèves ont pu calculer mentalement 10 x 978 ou 8 x 1000 ou encore se dire c'est un peu plus petit que 10 x 1000 et répondre.
La formulation de la question a souvent surpris les élèves (voir article *introduction calcul littéral*).

Dans la question suivante, l'ordre de grandeur est trouvé pour près de la moitié des élèves (on a déjà explicité le choix 50 m et 12 m dans l'article *Introduction au calcul littéral…*). Seul reste le problème de « valeur approchée par défaut ». Le vocabulaire est nouveau en sixième, qu'il soit mal maîtrisé est excusable.

Pour calculer la longueur L d'un cercle de rayon R, on applique la formule : $L = 2\pi R$.

À une unité près par défaut, la longueur d'un cercle de rayon 4 m est : (on a pris 3,14 comme valeur approchée de π)				
a	26 m	V	F	Jnsp
b	50 m	V	F	Jnsp
c	25 m	V	F	Jnsp
d	12 m	V	F	Jnsp

R.E. : 22 %

En revanche, dans le calcul **29 x 71**, le vocabulaire n'est plus un obstacle, « le plus proche » obligeant le choix 30 x 70 (moins de la moitié des élèves en sixième comme en cinquième) et non 20 x 70 comme on l'observe chez le tiers des élèves en sixième, comme en cinquième.
On peut souligner l'oralité de la question : l'élève a dû mémoriser « vingt-neuf fois soixante et onze », les trois propositions : 1400 ; 140 ; 2100, et choisir le résultat le plus proche d'un calcul donné plusieurs secondes plus tôt … le tiers ne retient que le « vingt » du premier nombre, et n'identifient pas les 2100 comme 30 x 70, 30 étant plus proche de 29 que 20…

Questionnaire oral 6 ° et 5°

Parmi les nombres proposés, quel est celui qui est le plus proche de 29×71 ?
Réponse a : 1 400 ;
Réponse b : 140 ;
Réponse c : 2 100.

R.E. : 40 %|*42 %*
1 400 : 33 %|*32 %*

Mais le pire reste à venir …

Questionnaire visuel 6° et 5

L'un des trois nombres inscrits sur ta feuille est le résultat du calcul « 71,5 × 3,29 ». Entoure-le. R.E. : 47 %|*50 %* 210,128 : 43 %|*40 %*

Le plus ennuyeux serait des erreurs de raisonnement dans l'anticipation ou la prévision qui viendraient réduire à néant les efforts concédés dans la numération … et jeter un doute sur le résultat trouvé par le calcul, voire le remplacer …

Anecdote :

Lise, 6°, est au tableau , pose en colonne 71,6 x 3 et inscrit comme résultat : 2148
Julie demande la parole et s'exclame : « C'est faux ! »
Le professeur, heureux : « Julie, tu peux expliquer ??? »
Julie, sûre d'elle : « Je lai fait dans ma tête »
Le professeur, doublement heureux « Très bien, et que nous proposes-tu ? »
Pierre, qui se tortille depuis 10 s sur sa chaise « Elle a oublié la virgule »
Julie : « Oui, ça c'est pas grave, ça ferait 214,8, mais c'est faux quand même : on trouve 213,18 »

Méfiance donc des raccourcis … et au vu des résultats révélés par l'enquête EVAPM, comme le peu d'écart entre les scores obtenus en sixième et ceux obtenus en cinquième,
n'ayons de cesse d'effectuer des va-et-vient entre les résultats obtenus par calcul posé ou mental et résultat 'anticipé' … de la sixième à la … troisième au moins !