De la modélisation du « monde » au monde des « modèles »

Les mathématiques : une façon de penser le monde

Jean-Claude Duperret

Premier point de vue philosophique

Les mathématiques naissent dans l’esprit de l’être humain :

L’homme a inventé les mathématiques pour s’en servir utilement pour décrire les phénomènes qui se produisent autour de lui, ce que font les mathématiciens

Second point de vue philosophique

Les mathématiques sont extérieures à l’esprit de l’être humain :

On ne fait que découvrir les mathématiques, elle étaient déjà là « quelque part », et elles y seraient même si les mathématiciens n’existaient pas

D’un enseignement de « structures » à un enseignement de « modélisation »

Les tribulations d’un enseignant de mathématiques

1972 : début de carrière en collège : les mathématiques « modernes »

Collection Mauguin – classe de 6ème

Des écritures d'ensemble

Définissez en compréhension :

a) L'ensemble de lettres {v,w,x,y,z}

b) L'ensemble de nombres entiers {41,43,45,47,49}

Des tentatives d'interdisciplinarité !

Écrivez en extension un ensemble A formé de cinq éléments qui soient des oiseaux. Une outarde peut-elle être un élément de A ?

Travail intensif sur les relations

Collection Bréard – classe de 5ème

Tentative de retour au « concret »

Dans l'ensemble des élèves de la classe, on considère la relation :

«…est né(e) la même année que… »

Est-ce une relation d'équivalence ?

Donner, le cas échéant, les classes d'équivalence.

Quelle définition des objets ?

Collection Mauguin – classe de 4ème

La droite affine

Soit (Δ, g) une droite réelle et H l'ensemble de toutes les bijections h telles que :

$(M \in \Delta)$ $[h(M) = ag(M) + b]$ $(a \in \mathrm{IR}^*, b \in \mathrm{IR})$

Le couple (Δ, H) est appelé droite réelle affine obtenue à partir de g ; Δ en est le support.

Axiome de Thalès

1986 : Les « nouveaux » programmes

- Activité
- Situation-problème
- Problèmes concrets, quotidiens, issus du monde réel
- Démarche expérimentale

Les spaghettis (4ème)

- Coupez un spaghetti en trois morceaux « au hasard »
- Essayez de faire un triangle avec les trois morceaux.
- Mesurez chacun des morceaux
- Que peut-on dire entre les trois longueurs lorsque l'on peut faire un triangle ?

« L’apprenti fréquentiste » Les spaghettis « mathématiques » (3ème)

- Utilisation de la touche « Random » de la calculatrice.
- Un spaghetti « mathématique » de longueur 1, avec « équiprobabilité » de « cassure » sur toute sa « longueur »
- Trois tirages : a = 0, 167 ; b = 0,534 ; c = 0,435
- On revient au problème précédent
- Passage « non préparé » aux statistiques

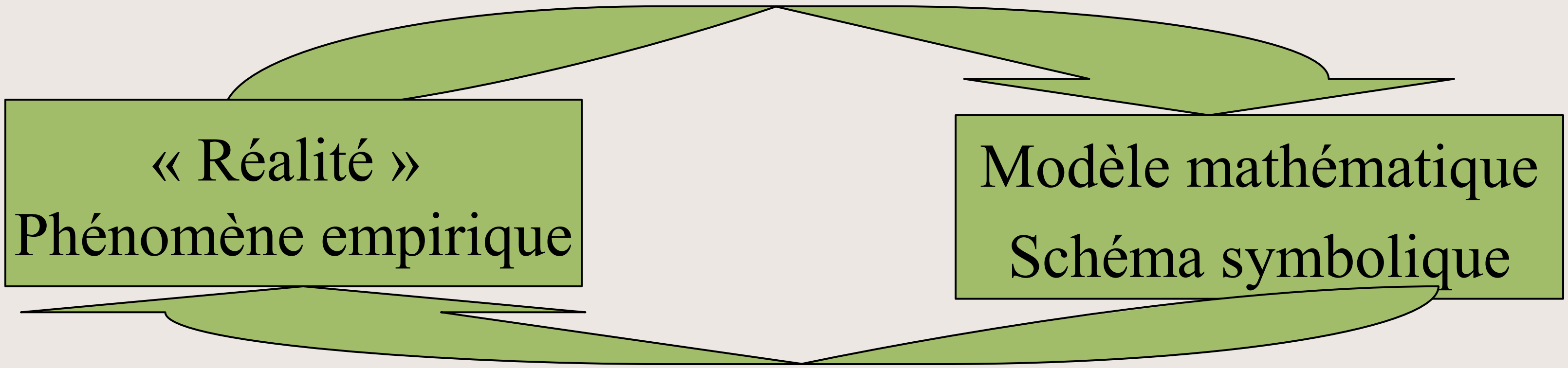
Modélisation

et modèle

Modélisation

- Représentation « fonctionnelle » des objets d’une certaine « réalité » par des objets « abstraits » ou « schématisés » dans un modèle où peut s’exercer un traitement théorique
- Représentation « analogique » : les processus naturels sont imités dans des conditions qui favorisent l’observation et l’étude
- Représentation « sélective » : un travail de modélisation nécessite de retenir certaines caractéristiques de la situation et d’en ignorer d’autres

« Modélisation » et « modèle »



- Du réel vers le modèle : modèles descriptifs (« transformer » et « interpréter » des « informations ») ; fonction heuristique
- Du modèle vers le réel : modèles prédictifs (« anticiper » une « action ») ; fonction justificative

« Modélisation » et « modèle »

Première approche avec
le « monde de la géométrie »

Modèles géométriques

- Géométrie euclidienne, modélisation « locale » de l’espace physique, avec des « axiomes » qui sont des « demandes » « de bon sens ».
- Géométrie sphérique, modélisation plus « globale » de notre « monde » (une nécessité de se décentrer).
- Géométries hyperboliques, projectives…
- Le programme d’Erlangen (Felix Klein, 1872) qui unifie toutes ces géométries dans une unique théorie pour en dégager les points de similitude (action d’un groupe de transformations sur un ensemble de points).

Les narrations de recherche IREM de Montpellier

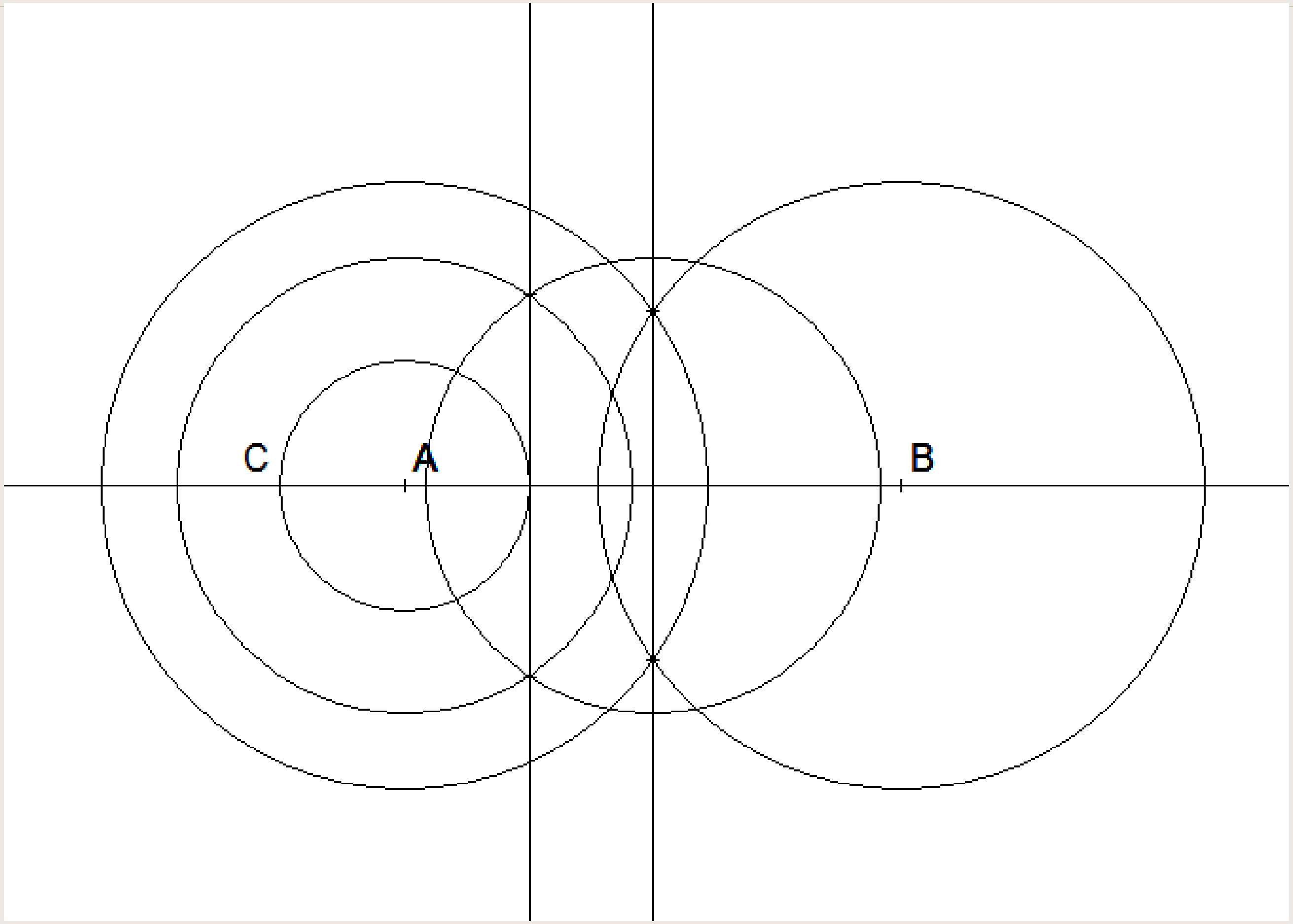
Cinq, quatre, trois, deux, un

A et B sont deux points donnés. On souhaite construire en utilisant seulement une règle non graduée et un compas le point C vérifiant les trois conditions suivantes :

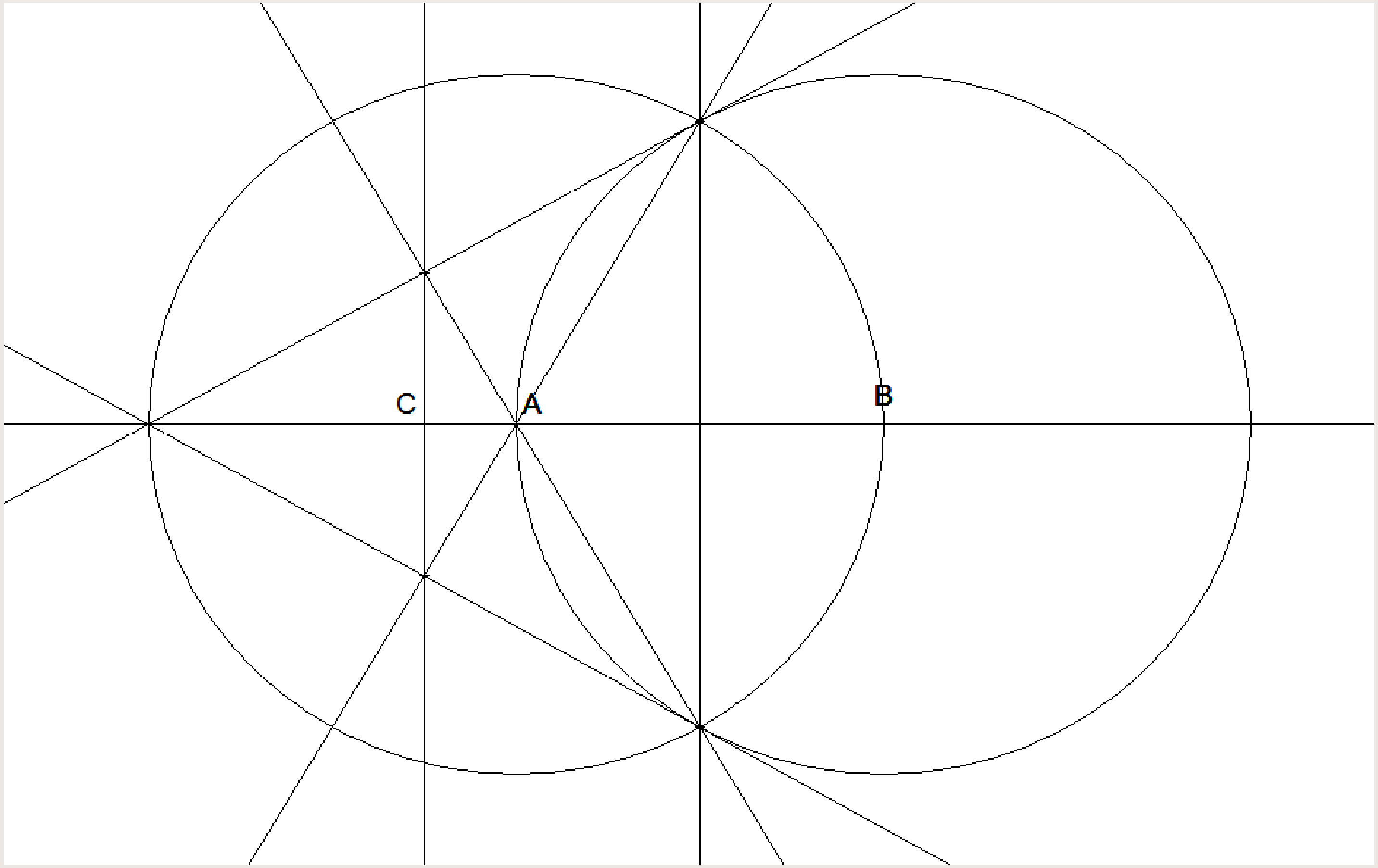
3) C appartient à la droite (AB)
4) C n’appartient pas au segment [AB]
5) AC = ¼ AB

Quel est le nombre minimum d’arcs de cercles (ou de cercles) qu’il est nécessaire de tracer ?

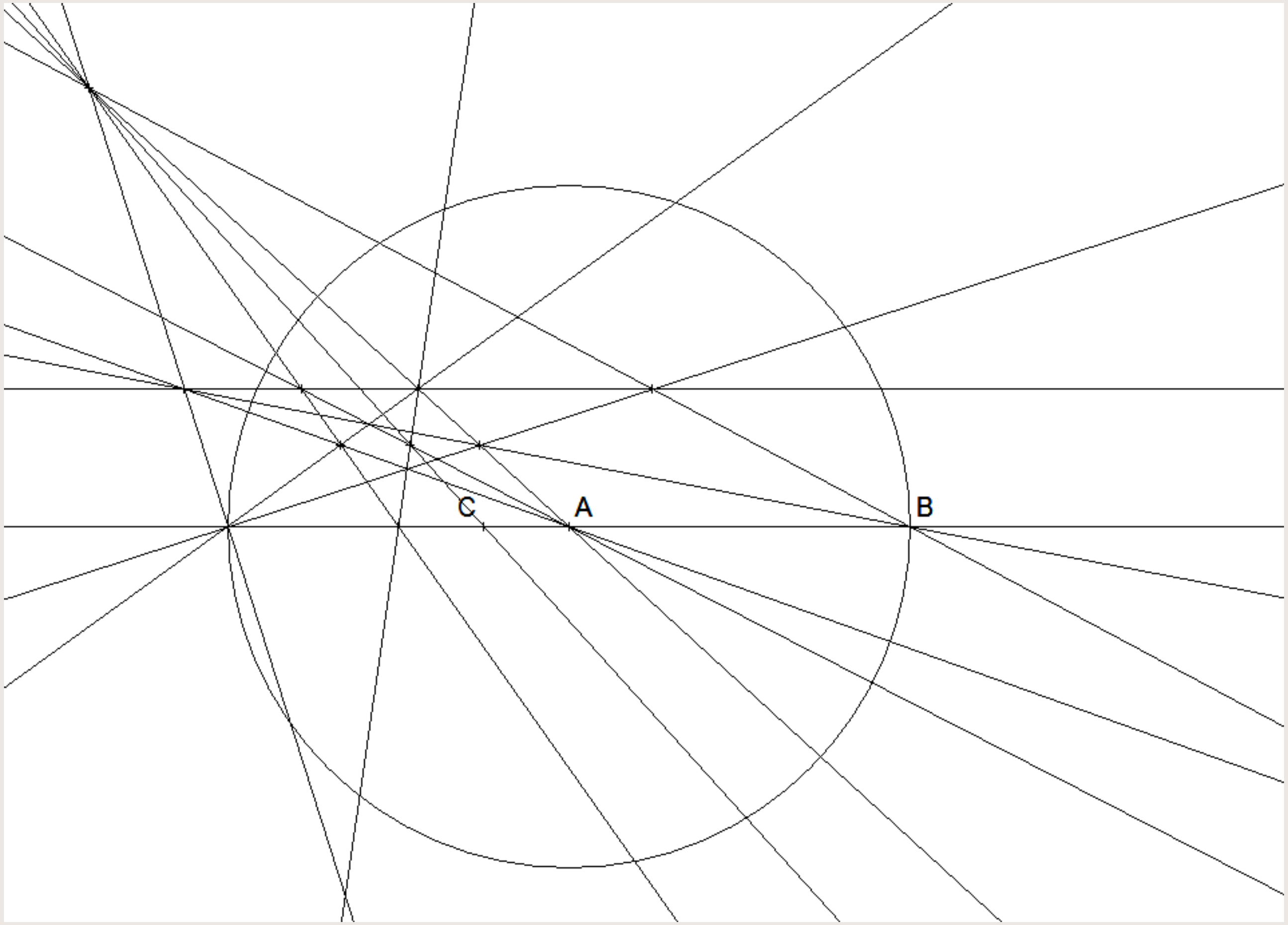
Géométrie euclidienne
concept « milieu - à égale distance »



Géométrie affine
Concept « milieu – barycentre »



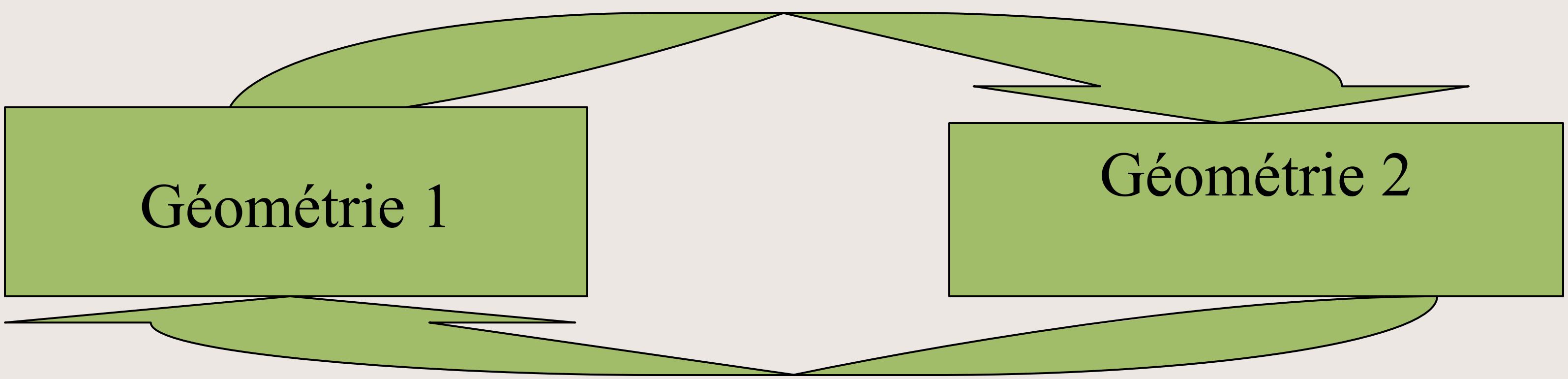
Géométrie projective
Concept « milieu – parallélisme »



Modélisation en termes de « niveaux » d’action et de pensée

Paradigmes géométriques (C.Houdement et A.Kuzniak) d’après la typologie de Gonseth

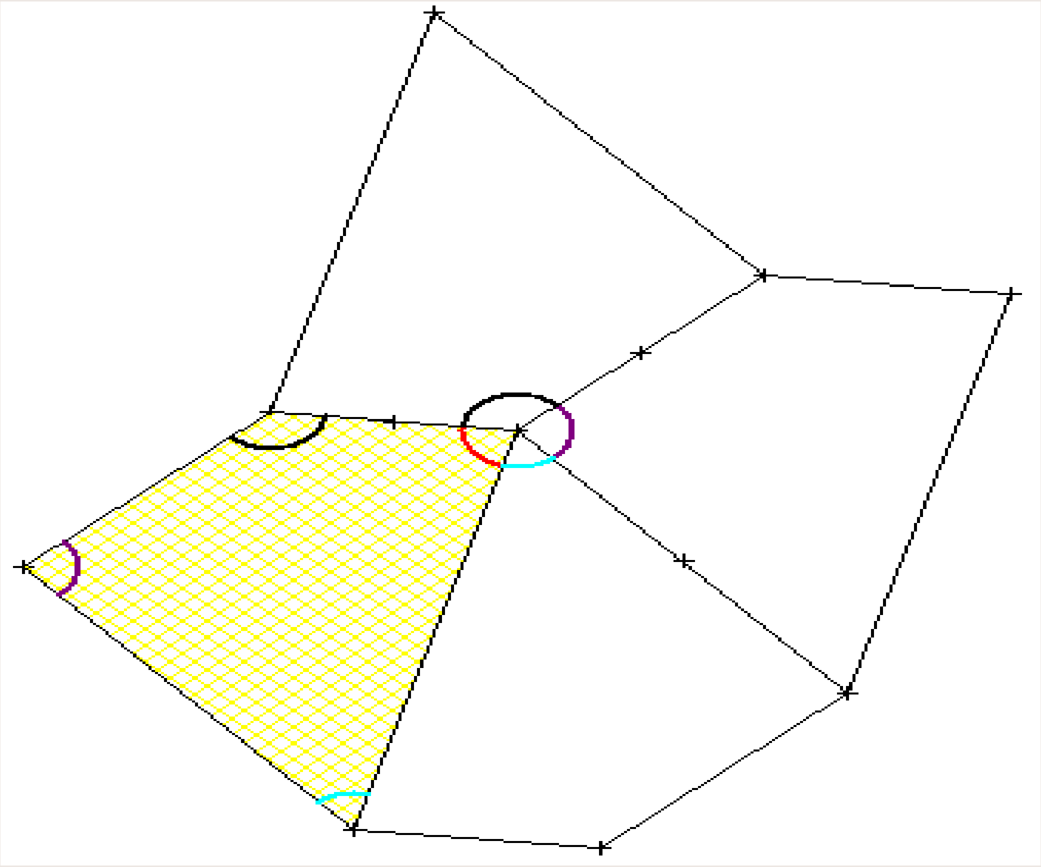
- Géométrie 1 (géométrie naturelle)
- Géométrie 2 (géométrie axiomatique naturelle)
- Géométrie 3 (géométrie axiomatique formelle)



Avec quels types de quadrilatère peut-on paver le plan ?

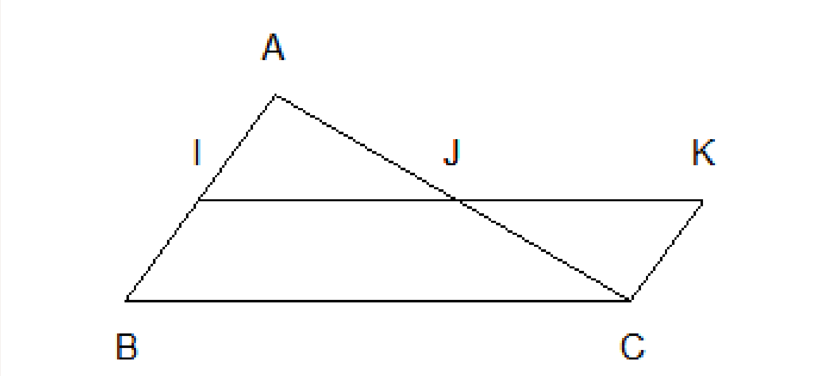
Géométrie 1	**Géométrie 2**
Plan physique	Plan mathématique
Gestes physiques (mouvements)	Gestes mathématiques (transformations)
Objets physiques (dessins)	Objets mathématiques (figures)
Comment ? (heuristique)	Pourquoi ? (validation : démonstration)
Expérience	Certitude
Monde physique	Monde mathématique

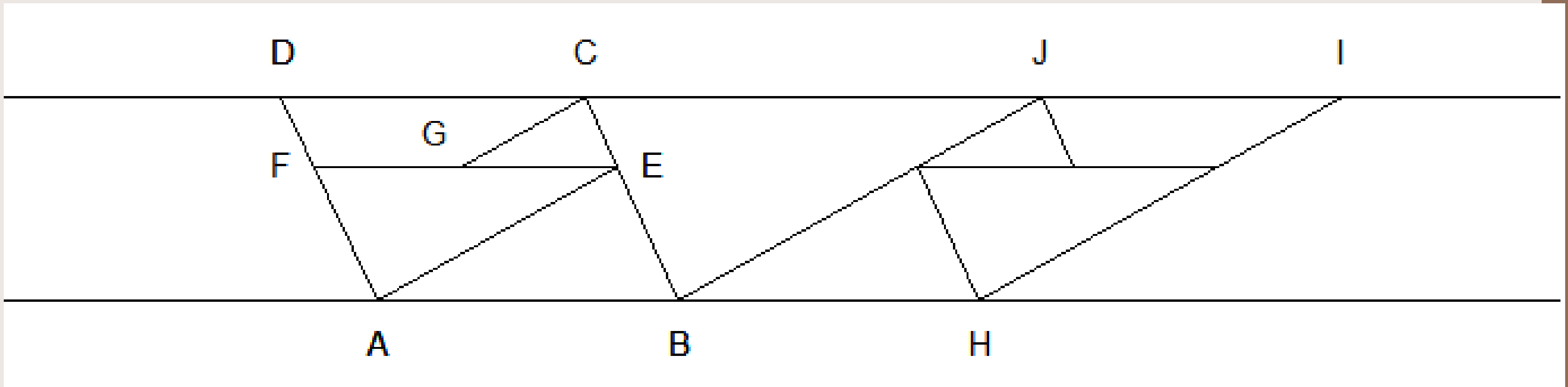
Avec quels types de quadrilatère peut-on paver le plan ?



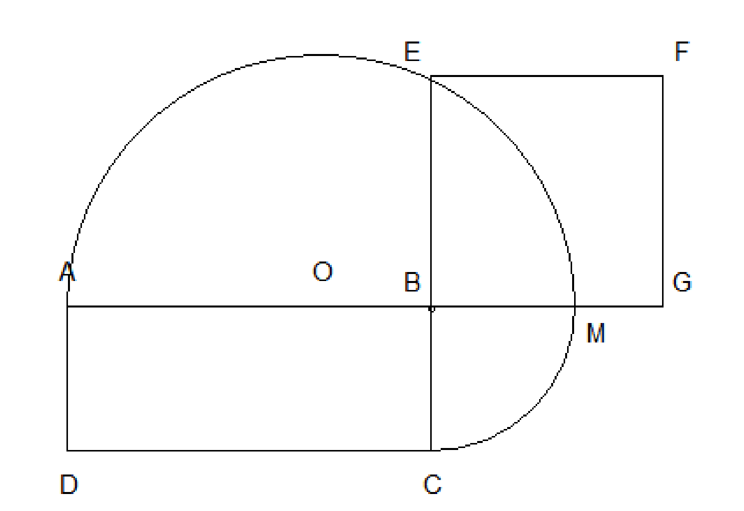
Peut-on découper un polygone pour en faire un carré de même aire ?

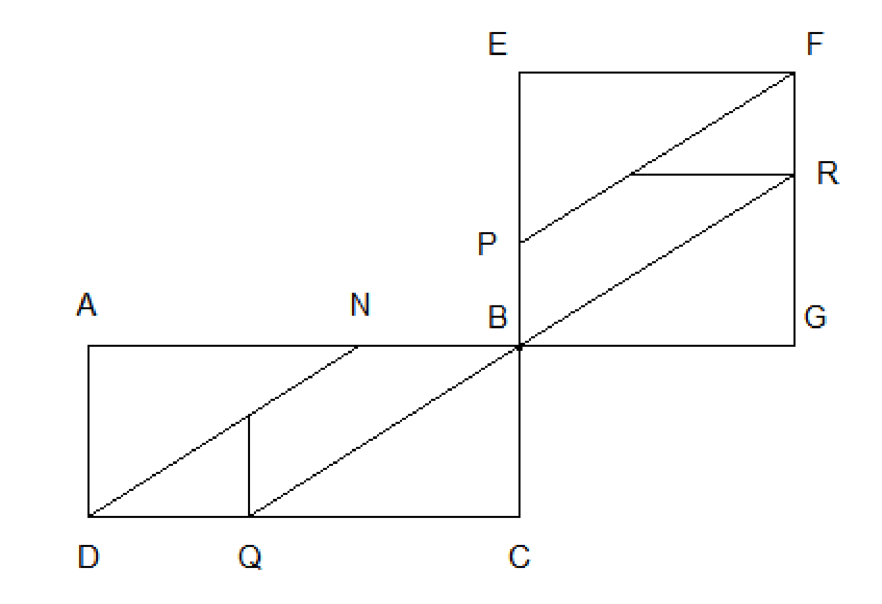
Du triangle au parallélogramme



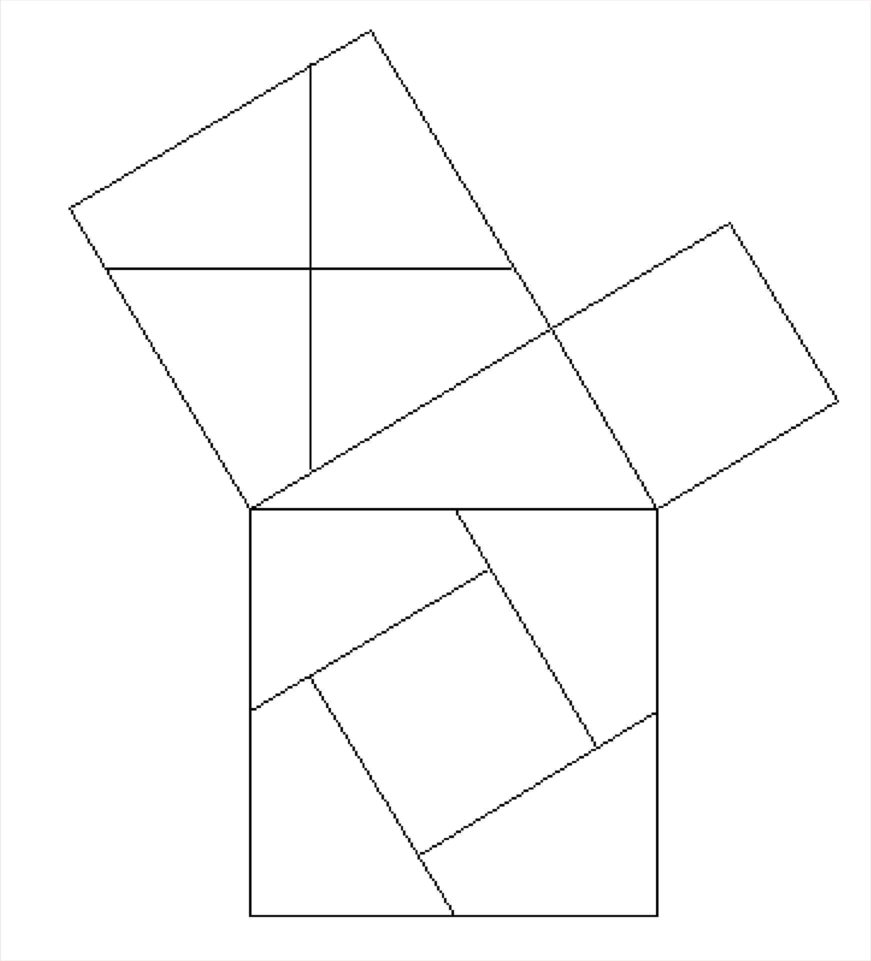


Du rectangle au carré





Du polygone au carré



Le monde de la « déraison »… ou l'impossible retour à la réalité

Peut-on reconstituer un cercle à partir d'un carré par “ dissection ” et “ déplacements ”. Le problème ainsi posé dans les années 1920 par Banach et Tarski ” s'appelle la quadrature géométrique du cercle.

Laczkovitch, mathématicien hongrois, a donné une réponse positive à cette question : il a montré que de telles partitions du carré et du disque étaient possibles et que l'on pouvait passer des morceaux du disque aux morceaux du carré par des translations.

La construction du « nombre »

à travers les siècles

et les civilisations

Les nombres entiers naturels

« Dieu a créé les nombres entiers,

les autres sont l'œuvre des hommes »

Kronecker

Nuzi, vieille ville de Mésopotamie

Petite bourse d'argile creuse

Inscription : « Objets concernant des moutons et des chèvres »

- 21 brebis qui ont déjà eu des petits
- 6 agneaux femelles
- 8 béliers adultes
- 4 agneaux mâles
- 6 chèvres qui on déjà eu des petits
- 1 bouc
- 2 chevrettes

A l'intérieur de la bourse

48 billes en terre crue

Montagnes de Gwane

Un os du péroné d’un babouin qui fait apparaître 29 entailles

Le bâton d’Ishango

(Lac Tchad)

Le 3 est loin devant

Représenter les nombres entiers naturels

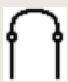
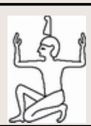
Les chiffres et les lettres ont une longue histoire commune. Elle a commencé dès que les hommes eurent l’idée de l’écriture. Ils inventèrent des signes pour écrire les mots et les nombres.

Une unité : un signe

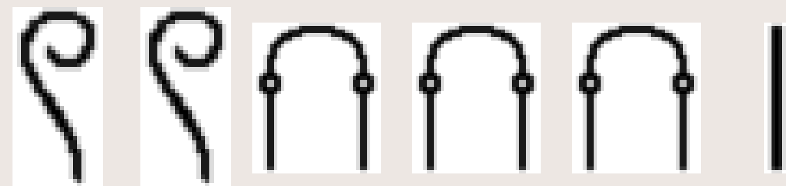
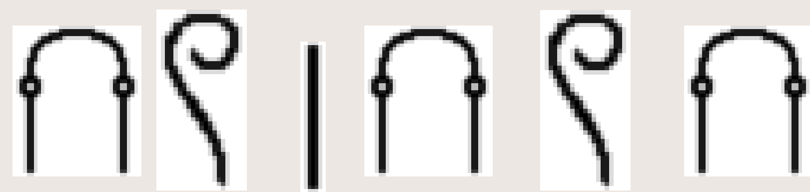
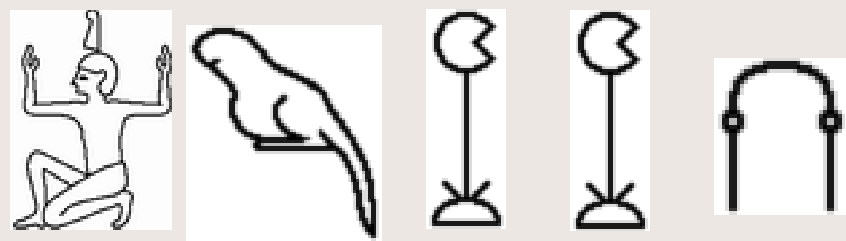
L’idée du groupement

Les groupes de groupes

Numération égyptienne

un	1	bâton	
dix	10	anse	
cent	100	spirale	
mille	1 000	fleur de lotus	
dix mille	10 000	index	
cent mille	100 000	têtard	
un million	1 000 000	dieu	

Numération égyptienne

231	
231	
1 102 010	

Représenter les nombres entiers naturels

Quelques civilisations sont allées plus loin :

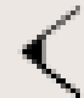
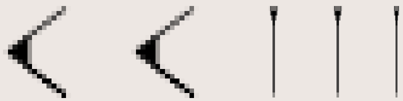
L’idée de position

L’idée du zéro

Notre système de numération

Numération babylonienne

Chez les Sumériens

1	bâton	
10	chevron	
23		

Numération babylonienne

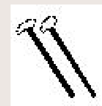
Puis vint la numération de position en base 60

			1
			60
			3600

Numération babylonienne

		𒁹𒁹𒁹	3
𒁹	𒁹	𒁹	3661
	𒁹	𒁹𒁹	62
	𒁹𒁹	𒁹	121

Numération babylonienne

Puis vint le zéro : 

3610 : 

 marque l'absence

Chez les Indiens 0 : sunya

- 0 marque l'absence comme une présence
- 0 va devenir la quantité nulle

Chez les Arabes : sunya devient as-sifr, puis ziffer, puis zephiro

Ziffer donne chiffre, et zephiro donne zéro

Mathématiques et Histoire

C’est à travers les siècles et les civilisations que s’est peu à peu constitué un langage universel, fruit de toutes les pensées successives d’hommes de culture très différentes.

L’universalité de leur symbolique et de leur mode de validation de la vérité sont des valeurs essentielles des mathématiques.

« Comprendre » et « lire » les nombres

Double aspect :

- Cardinal : mesure d’une collection finie
- Ordinal : tout entier a un suivant

Vous avez dit naturel ?

- 0 est-il naturel ?
- 100 milliards est-il naturel ?

Lire les nombres :

97 + 115 = 212

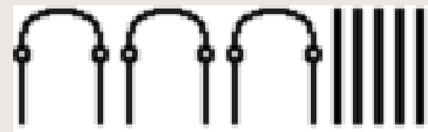
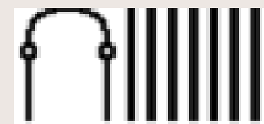
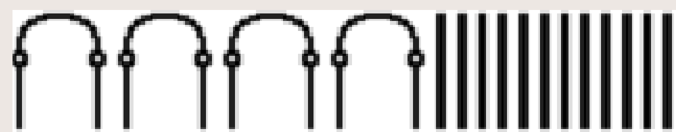
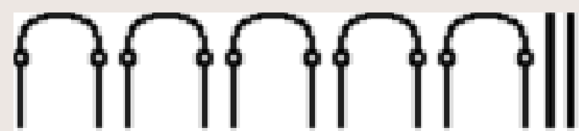
est une écriture universelle,

mais sa « lecture » dépend de la langue

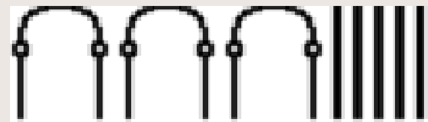
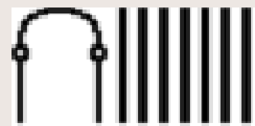
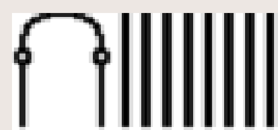
Du nombre

au calcul

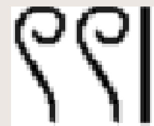
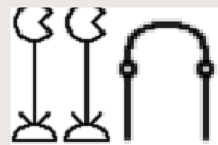
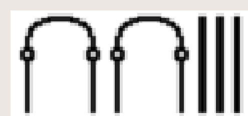
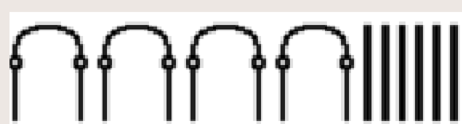
L’addition

35	
17	
35 +17	
52	

La soustraction

35	
17	
35	
35 - 17	
18	

La multiplication

La multiplication par 10	
201	
2010	
La multiplication par 2	
23	
46	

La multiplication

Méthode égyptienne donnée par le scribe Ahmès dans le papyrus de Rhind (1650 ans avant JC environ)

Exemple : 24 x 37

- 1 37 = 1 x 37
- 2 74 = 2 x 37
- 4 148 = 4 x 37
- 8 296 = 8 x 37
- 16 592 = 16 x 37

Pour obtenir le résultat final, il suffit d'ajouter (8x37) et (16x37)

- 24 888 = 296 + 592

L’école sert !

Etude menée par Schliemann en 1998 auprès « d’enfants de la rue »

- Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l’un ?
- Réussite : 75 %
- Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l’un ?
- Réussite : 0 %

La division

- On fait des guirlandes de 5 mètres dans une « ficelle » de 32 mètres. Combien de rubans peut-on faire ?

- On fait 5 guirlandes de même longueur dans une « ficelle » de 32 mètres. Quelle est la longueur d’un ruban ?

Du modèle arithmétique

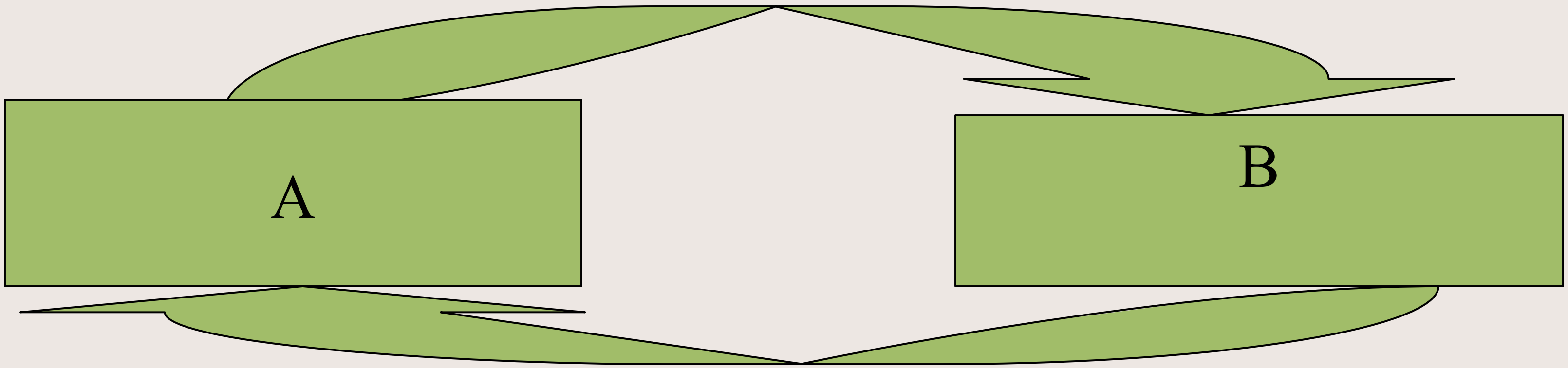
au modèle algébrique

L’arithmétique

L’unité d’aire est le carreau.

- Dessiner tous les rectangles ayant comme aire 12 carreaux.
- Dessiner tous les rectangles ayant comme aire 16 carreaux.
- Dessiner tous les rectangles ayant comme aire 7 carreaux.

Codage : du cadenas aux nombres premiers (fonctions pièges)



- Un ordinateur peut multiplier deux nombres premiers très grands (une centaine de chiffres) en une seconde.
- Inversement, si on donne ce produit à un ordinateur pour qu'il retrouve les deux nombres premiers qui le divisent, une vie entière n'y suffirait pas !

Vu dans un livre de quatrième

Quatre allumettes mises bout à bout avec une cigarette de 7 cm mesurent 25 cm en tout. Quelle est la longueur d'une allumette ?

- Prégnance du raisonnement arithmétique (on « remonte » à l'envers les « gestes » de l'énoncé)
- Passage à l'algèbre : on « traduit » le problème en langage mathématique…et on l'oublie !

25cm-7cm = 18cm 18cm : 4 = 4,5cm	$4x + 7 = 25$ $4x = 25 - 7$ $x = 4,5$

Le traitement « algébrique » Al Khwarizmi (Bagdad)

« al jabr » (compensation, restauration…)

Si 3 choses diminuées de 5 valent 2 choses, je compense avec 5 ; alors 3 choses diminuées de 5 et augmentées de 5 valent 2 choses augmentées de 5 ; 3 choses valent donc 2 choses et 5.

« al muqabala » (opposition, confrontation…)

Si 3 choses valent 2 choses et 5, alors 1 chose vaut 5.

« al hatt » (retour à une forme canonique)

Si 2 carrés et 42 valent 20 choses, alors 1 carré et 21 valent 10 choses.

La validation

Un carré et 10 choses valent 39

$$X^2 + 10X = 39$$

X^2	$5X$
$5X$	25

Omar Al-Khayam

Ceux qui par la science vont au plus haut du monde

Qui, par leur intelligence, scrutent le fond des cieux

Ceux-là, pareils aussi à la coupe du ciel

La tête renversée, vivent dans leur vertige

Omar Al-Khayam

Je ne me suis jamais privé de donner mon temps aux sciences

Par la science, j'ai dénoué les quelques nœuds d'obscur secret

Après soixante-douze années de réflexion sans jour de trêve

Mon ignorance, je la sais…

Du modèle « discret »

au modèle « continu »

Grandeurs et mesures

La mesure la plus simple : le cardinal d’un ensemble fini (nombre entier naturel).

La « mesure exacte » : couple formé d’un nombre et d’une unité (extension du champ des nombres) ; c’est souvent une convention « sociale ».

Dans des situations où cette convention sociale n’existe pas, l’image d’une grandeur par une mesure est en fait un intervalle (erreur, tolérance, intervalle de confiance…)

L'extension du champ des nombres

Les nombres « raisonnables »

Ce sont des nombres, qui convenablement « agrandis », redonnent des entiers naturels

- Les nombres entiers naturels
- Les fractions (ex 2/3 qui « agrandi » 3 fois donne 2)
- Les nombres décimaux (ex : 2,4 qui « agrandi » 10 fois donne 24)

Les nombres non raisonnables :

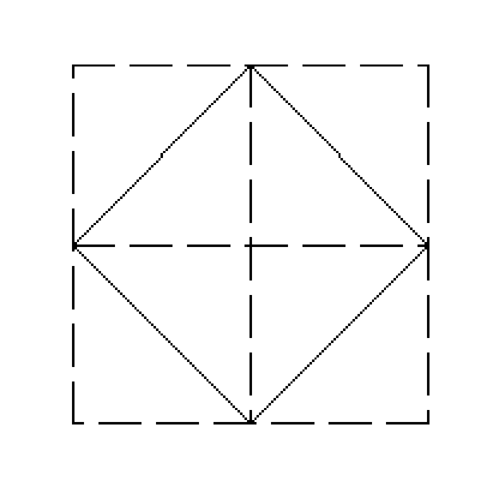
Ex : racine carrée de 2, pi…

De nouveaux nombres

Nombres géométriques

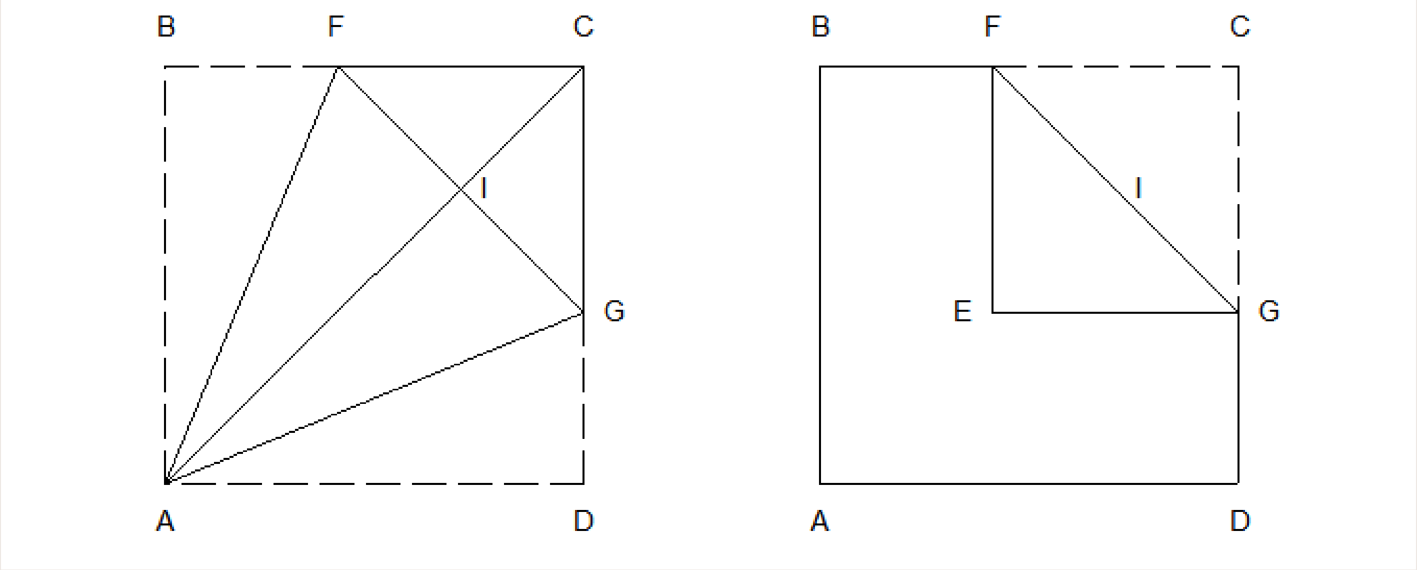
Naissance de $\sqrt{2}$

Duplication d'un carré de côté de longueur 1



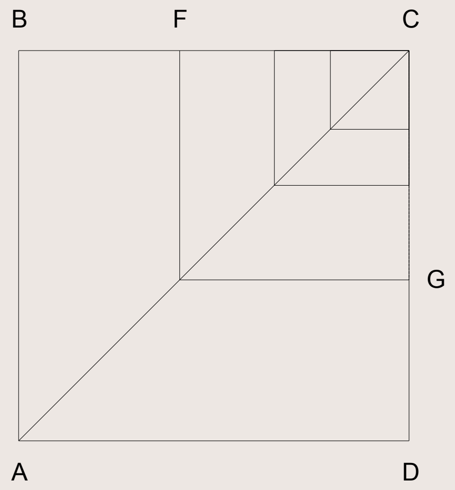
$\sqrt{2}$ n’est pas « raisonnable »

L’utilisation des nombres « raisonnables » permet-il d’exprimer en même temps la longueur du côté d’un carré et sa diagonale ?



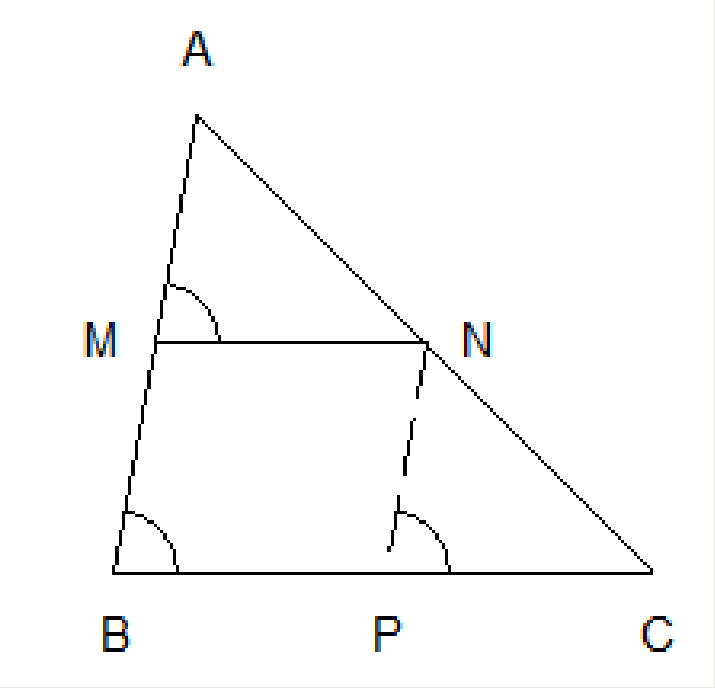
Un nouveau modèle de pensée

- L’accès à l’irrationnel passe par « l’absurde » (démonstration « apagogique »)
- ou par « l’infini » (« descente infinie »)

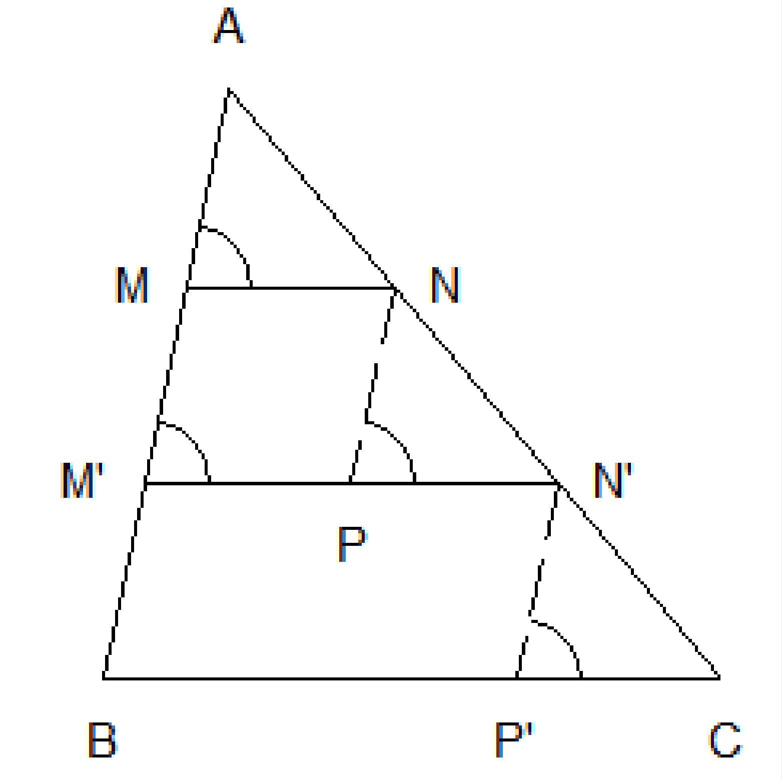


Le « théorème de Thalès » par Clairaut (17ème siècle)

Théorème des milieux

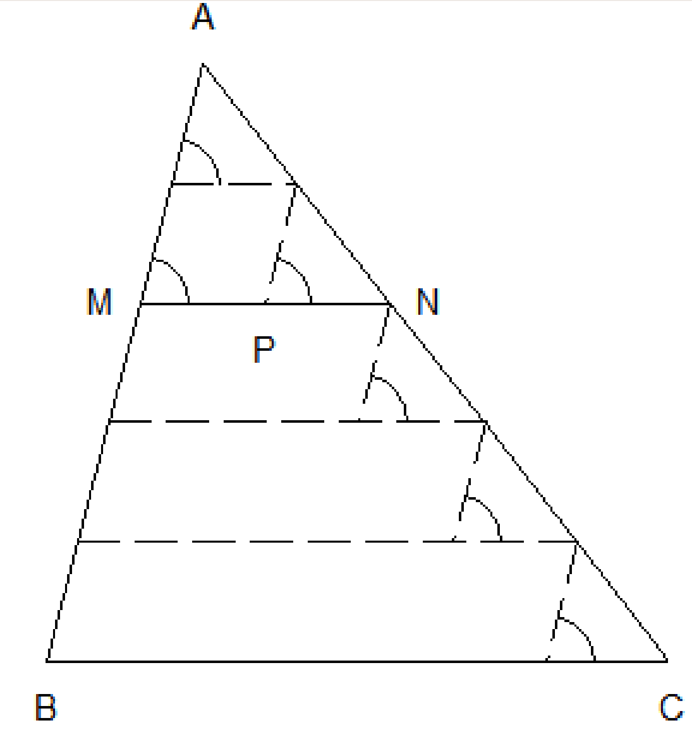


Théorème des tiers

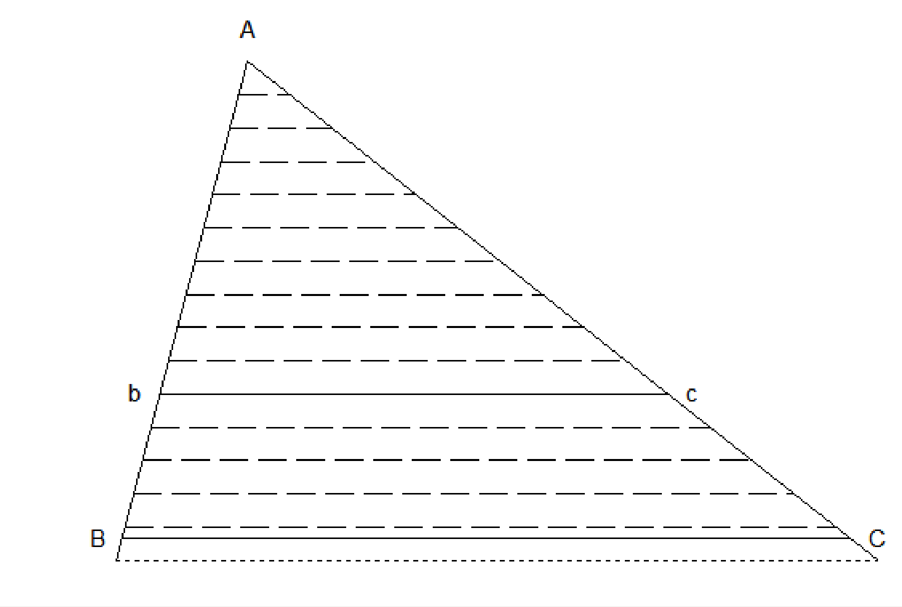


Et…pour tout rapport rationnel

Pour un rapport de 5/2



Du modèle « discret » au modèle « continu »



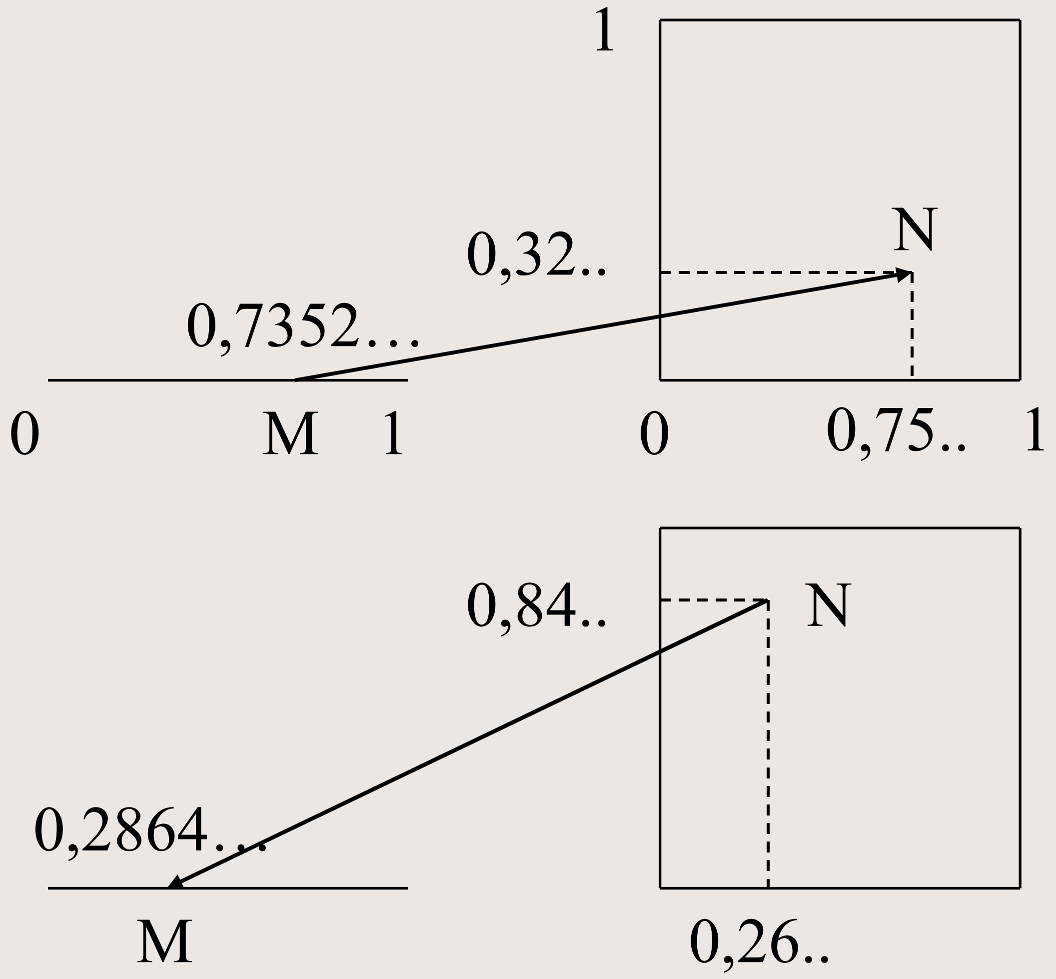
“ Supposons Ab divisé en 100 parties ; ce que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 & 142. Contentons nous donc de 141 et négligeons le petit reste. Il est clair que AC contiendra aussi 141 des parties de Ac ”.

Le passage à l’analyse

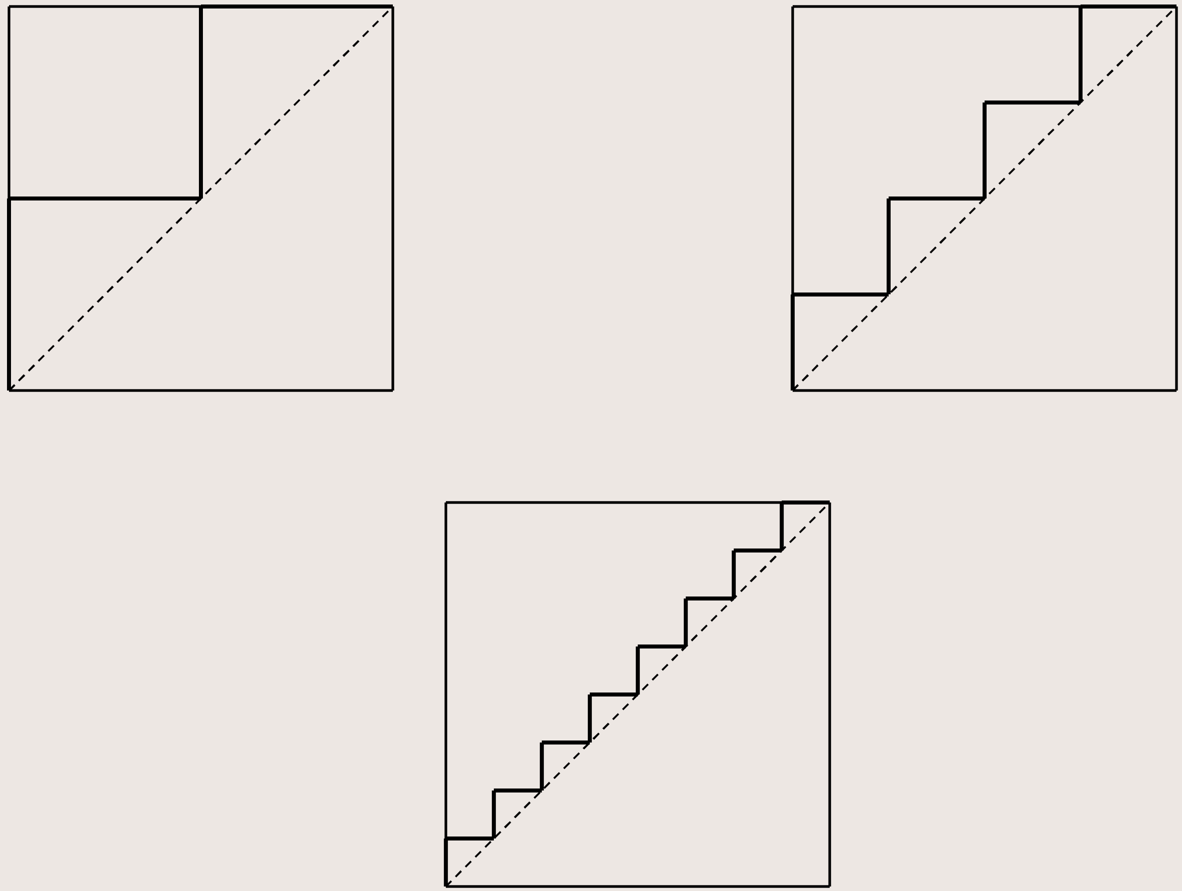
“ De plus, ces restes comme nous venons de l’observer, seront de part & d’autre d’autant plus petits que le nombre des parties de Ab sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de Ab poussée jusqu’à l’infini. ”

Nous venons de passer dans le monde de l’analyse. Nous venons de passer du commensurable à l’incommensurable, du rationnel au réel, du calcul exact au calcul approché…

Je le vois, mais je ne peux le croire ! Cantor à Dedekind



Mais où va « l'escalier »?



Nombres « calculables »

Nous ne pourrons jamais « calculer » tous les nombres réels : les nombres réels « calculables » sont ceux pour lesquels il existe un programme d'ordinateur qui, lorsque nous le laissons fonctionner indéfiniment, en égraine les décimales les unes après les autres.

Il y a des nombres « non calculables »…(et beaucoup !), par exemple les nombres « oméga »: on les connaît (on sait les définir), on démontre à leur sujet des propriétés précises…mais on ne sait pas calculer leurs chiffres !

Modéliser l'information

Les mathématiques du citoyen

Lourdes réussites

Sous le titre « Un bon cru au bac », « La République des Pyrénées » (13/7) s'extasie devant les résultats de la bonne ville de Lourdes : « 96 % de mentions très bien, bien et assez bien. Du jamais-vu. » Mazette ! La cité mariale serait-elle un paradis pour les surdoués ? En réalité, pour obtenir ces mirobolants 96 %, le confrère a eu recours à un calcul simple. Il a ajouté le pourcentage du lycée public de Sarsan (« toutes mentions confondues, 50 % ») à celui du lycée privé Peyramale (« 46 % de mentions »). En additionnant ces deux nombres, il faudrait donc compter « 96 % de mentions » à Lourdes. Et ce n'est pas fini. Car un troisième lycée de la ville n'ayant pu être comptabilisé, la part de mentions au bac devrait, selon cette nouvelle arithmétique, dépasser largement les 100 %.

Lourdes, ville de tous les miracles !

Doublants et doublements

- Albert Camus : 15 redoublants en 3ème
- Paul Langevin : 12 redoublants en 3ème

- Albert Camus : 125 élèves en 3ème
- Paul Langevin : 80 élèves en 3ème

- Taux de doublement à A.Camus : 12%
- Taux de doublement à P.Langevin : 15%

Plus de garçons…ou de filles ?

- Pierre Brossolette : 45% de garçons, 55% de filles
- Gaston Bachelard : 60% de garçons, 40% de filles

- A Brossolette : 420 élèves ; à Bachelard : 360 élèves

  405 garçons et 375 filles
- A Brossolette : 520 élèves ; à Bachelard : 260 élèves

  390 garçons et 390 filles
- A Brossolette : 740 élèves ; à Bachelard : 300 élèves

  513 garçons et 527 filles

Deux grands modèles

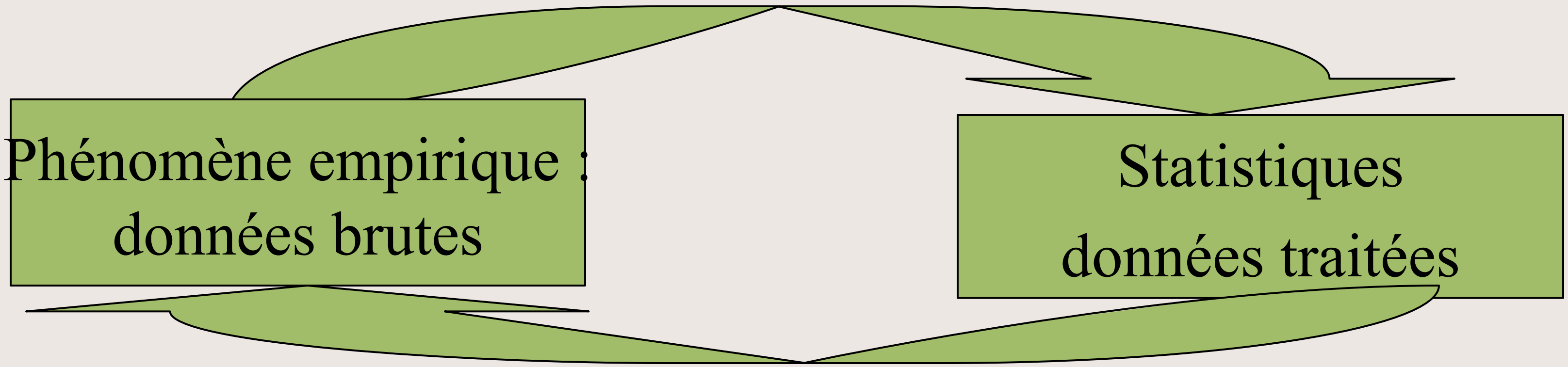
Deux grands modèles vont se construire entre l'école et le collège, avec leurs modes de traitement spécifiques au niveau du calcul :

- Le modèle « additif » : comparaison « absolue » ; progression arithmétique
- Le modèle « proportionnel » : comparaison « relative » ; progression géométrique

Le modèle « proportionnel »

- Registre numérique : suites proportionnelles, tableaux, « règle de trois »…
- Registre algébrique : « y = kx », propriétés de linéarité…
- Registre fonctionnel : application linéaire, traduction graphique…
- Registre géométrique : théorème de Thalès, lien entre parallélisme et proportionnalité…

Le traitement statistique



- Les statistiques vont transformer les données brutes en les représentant de façon « classée » pour pouvoir en faire des « résumés ».
- Ces « résumés » vont pouvoir donner des interprétations du phénomène empirique.
- Problème fondamental de la statistique: concilier le mieux possible deux pôles antagonistes : la « fidélité » et la « clarté »

Les filles sont meilleures en maths que les garçons

	Garçons	Filles
Algèbre	23/200	85/500
Géométrie	400/500	90/100
Algèbre	11,5%	17%
Géométrie	80%	90%

Quoique !

	Garçons	Filles
Algèbre	23/200	85/500
Géométrie	400/500	90/100
Total	423/700	175/600
En %	60,5%	29,2%

Nombres (chiffres) et calculs dans la société : les statistiques

« Il existe trois sortes de mensonges : les mensonges, les affreux mensonges, et les statistiques » (Benjamin DISRAELLI)

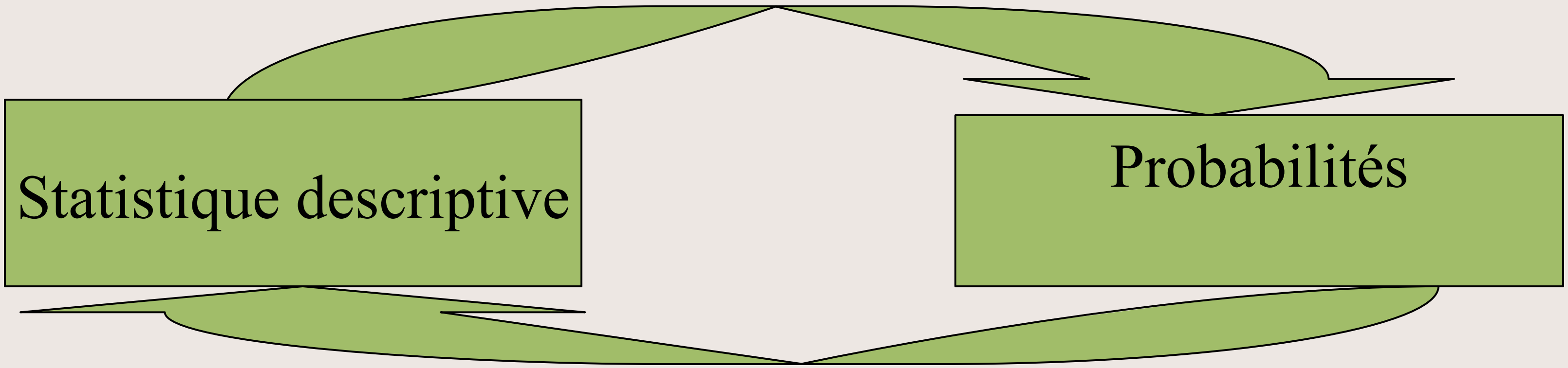
« Les statistiques, c’est comme le bikini, ça montre tout, mais ça cache l’essentiel » (Louis ARMAND)

« Les statistiques sont formelles : il y a de plus en plus d’étrangers dans le monde » (Pierre DESPROGES)

Le monde de l’incertitude

Le hasard et l’aléatoire

Des statistiques aux probabilités



Données observées	Données calculées
Résultats empiriques	Résultats théoriques
Distribution de fréquences	Loi de probabilité
Moyenne empirique	Espérance théorique

Des statistiques aux probabilités

Le prince de Toscane demande à Galilée (1554-1642) pourquoi, alors que les nombres 9 et 10 ont autant de décomposition en somme de 3 chiffres compris entre 1 et 6, on obtient plus souvent 10 lorsqu'on lance 3 dés ?

9	10
1+2+6	1+3+6
1+3+5	1+4+5
1+4+4	2+2+6
2+2+5 2+3+4	2+3+5 2+4+4
3+3+3	3+3+4

Des probabilités aux statistiques

Un calcul probabiliste montre que la probabilité que deux personnes soient nées le même jour de l'année devient supérieure à son contraire à partir d'un groupe de 23 personnes.

Robert Matthews, journaliste britannique et mathématicien, et Fiona Stones se sont intéressés aux matchs de première division du Royaume-Uni joués le 19 avril 1997. Sur 10 rencontres, six étaient avec coïncidences, et quatre sans.

Des pistes pour travailler l'aléatoire au cycle 3

Qui peut le plus ?

4	3
2	6
3	3

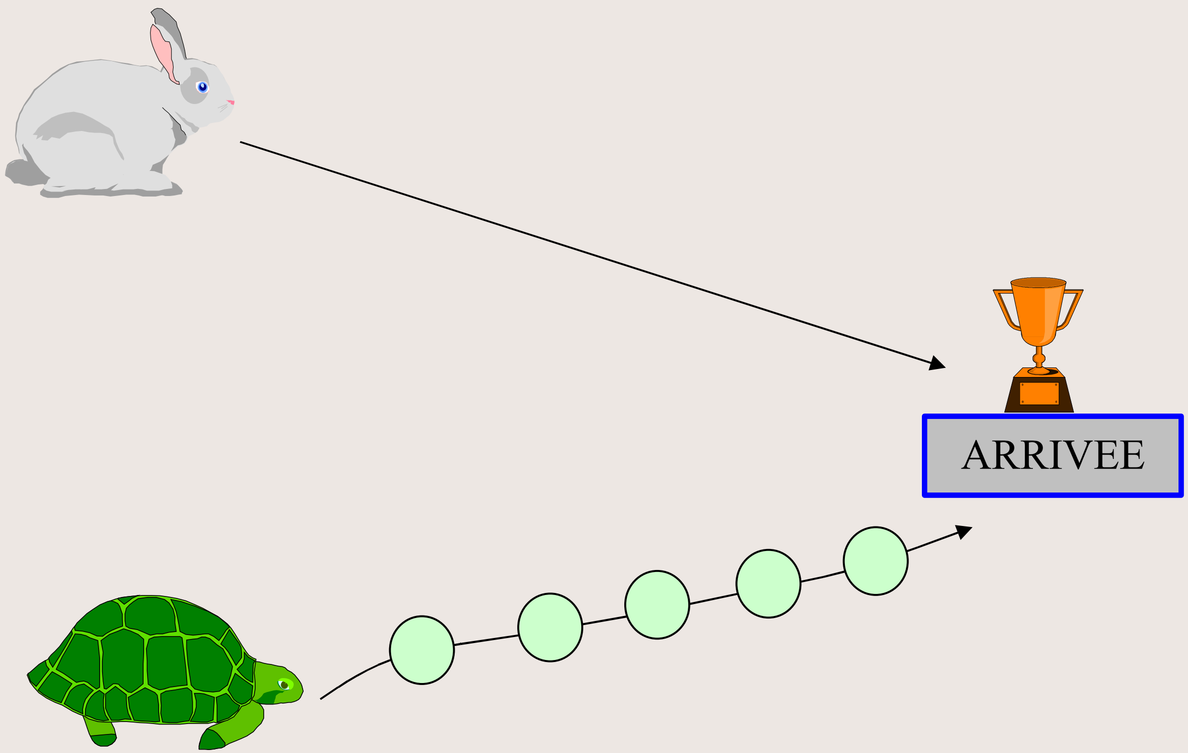
102

Du « hasard » aux « stratégies »

6	3
5	2
4	5

160

Le lièvre et la tortue



Le lièvre et la tortue

Si la tortue a 5 étapes à franchir :

$$p\,(T) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}40 \text{ d'où } p\,(L) \approx 0{,}60$$

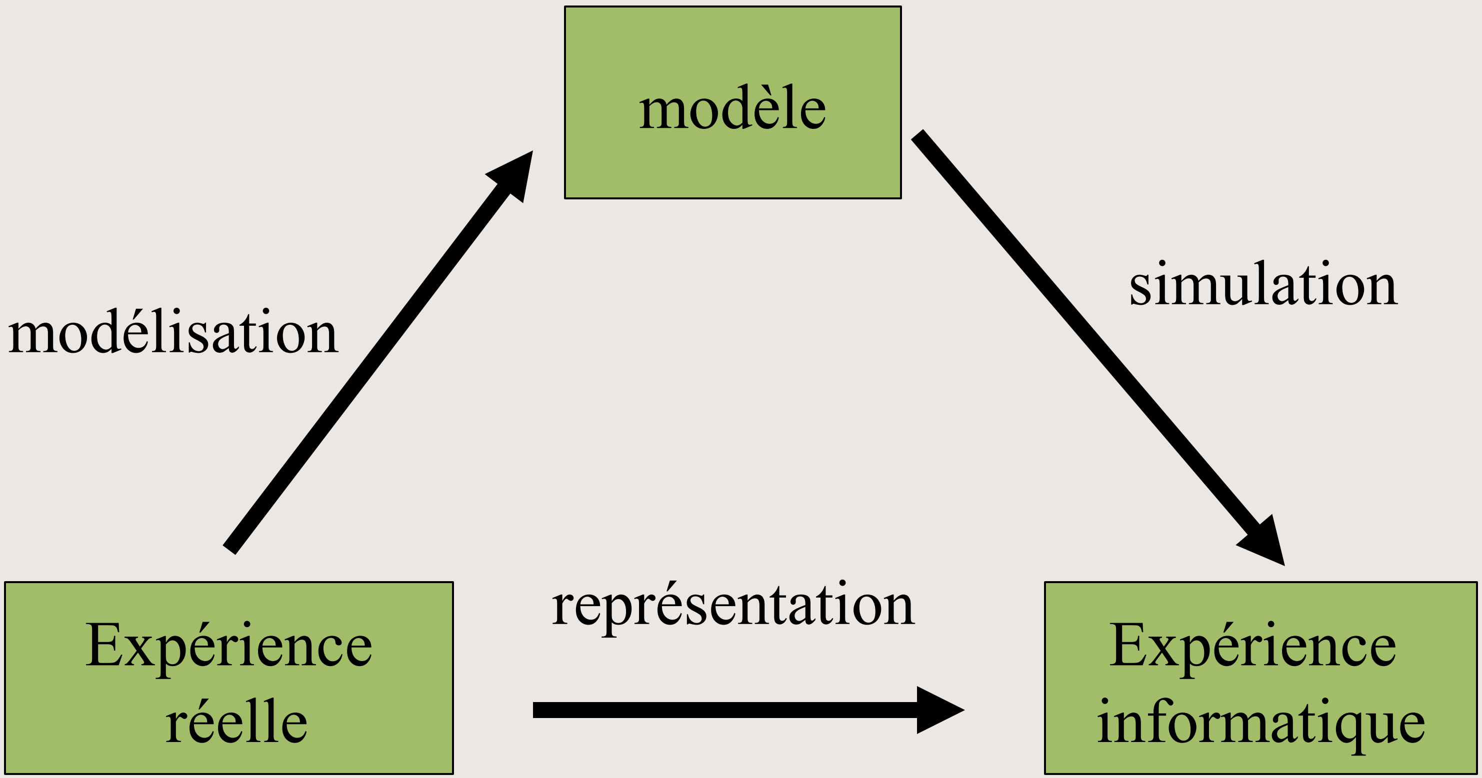
Si la tortue a 4 étapes à franchir :

$$p\,(T) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48 \text{ d'où } p\,(L) \approx 0{,}52$$

Si la tortue a 3 étapes à franchir :

$$p\,(T) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}58 \text{ d'où } p\,(L) \approx 0{,}42$$

La place de la simulation



Politique nataliste

Supposons qu'une politique nataliste soit mise en place à partir de la règle suivante. Les naissances au sein d'une famille s'arrêtent :

- \- soit à la naissance du premier garçon,

  \- soit lorsque la famille comporte quatre enfants.

Quelle est l'influence d'une telle politique sur la répartition des sexes ?

Quelle est l'influence d'une telle politique sur la composition des familles ?

Politique nataliste

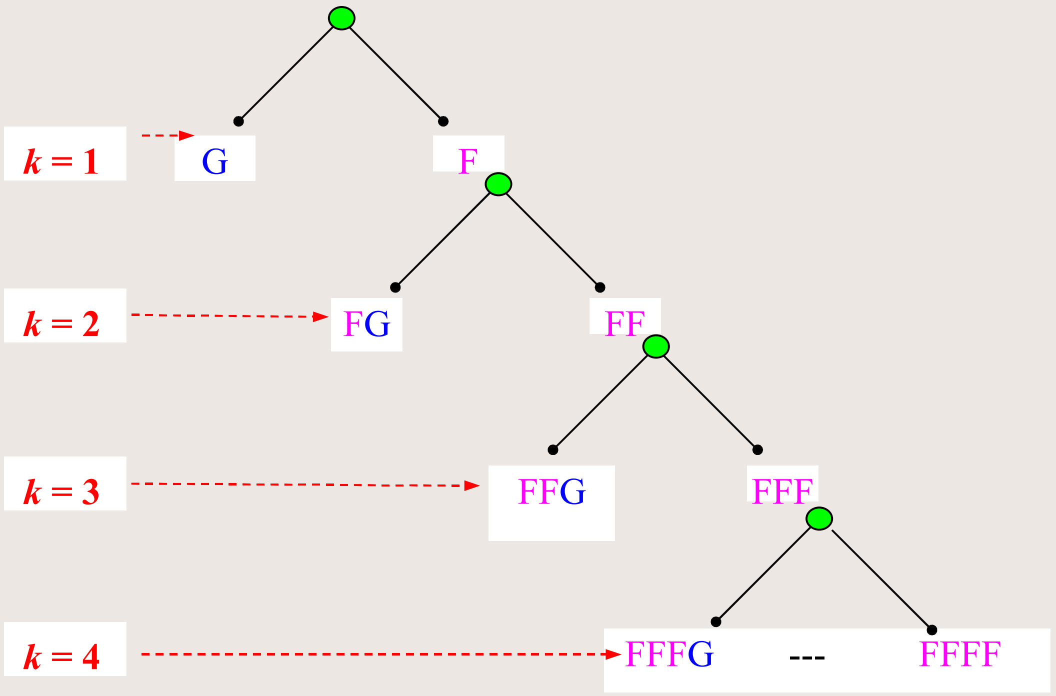
Tirages par simulation :
G/FFG/FG/G/FFFG/G/FFFF/G/FG/G/…..

Proportion de filles (de garçons) : autour de 50%

Proportion de familles

- de 1 enfant : autour de 50%
- de 2 enfants : autour de 25%
- de 3 enfants : autour de 12%
- de 4 enfants : autour de 12%

Politique nataliste



Les bouteilles

- Un fabricant de bouteilles en verre dispose de 100 kg de verre liquide.
- Avec 1 kg de verre liquide, on peut fabriquer une bouteille.
- Dans les 100 kg de verre liquide, il y a 100 pierres ou impuretés que l'on ne peut pas enlever et qui sont réparties de manière aléatoire.
- Le fabricant ne s'intéresse qu'à la fabrication de bouteilles de « haute qualité », c'est-à-dire sans impureté.
- Si une bouteille contient au moins une pierre, elle est mise au rebut !
- Combien peut-il espérer obtenir de bouteilles de « haute qualité »?

9	xx	x			x		x		x	xx
8	x		xxxx	xx		xx		x		x
7	x	xx		x	xxx		xx	x		xxx
6		x	x	x		x			x	xx
5	xxx		xx	xx		x	xx	x		x
4	x		xx		x			xx		x
3		xx			xx					
2	x		xxx		x	x	xx		xxx	
1	xx		x	xx	x	x	x	xx	x	xx
0	x	x	xx	x		xxx	xx	x	xx	x
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Les bouteilles

Soit I l'ensemble des impuretés

Soit B l'ensemble des bouteilles

Soit $\mathscr{F}(I, B)$ l'ensemble des applications de I dans B

Soit b_i une bouteille, $B_i = B - \{b_i\}$

La probabilité pour que b_i soit sans impureté est

$$p = \frac{\text{card}\left(\mathscr{F}(I, B_i)\right)}{\text{card}\left(\mathscr{F}(I, B)\right)} = \frac{99^{100}}{100^{100}} \approx 0{,}3665$$

Les bouteilles

<u>Curiosité</u> : $\frac{1}{0,3665} \approx 2,72...$

Généralisation :

On passe à n bouteilles et n impuretés

$$p = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e$ et $\frac{1}{e} \approx 0,3678...$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X
2	x		x		x		x		x	
3	x	x		x	x		x	x		x
4	x		x		x		x		x	
5	x	x	x	x		x	x	x	x	
6	x				x		x			
7	x	x	x	x	x	x		x	x	x
8	x		x		x		x		x	
9	x	x		x	x		x	x		x
10	x		x				x		x	

Probabilité que deux nombres entiers soient premiers entre eux

$A_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ / \ x \wedge y = 1 \}$ $\quad p(A_1) = p$

$A_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ / \ x \text{ et } y \text{ divisibles par } 2 \text{ et } \frac{x}{2} \wedge \frac{y}{2} = 1 \}$

$$p(A_2) = \frac{p}{4}$$

$A_n = \{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ / \ x \text{ et } y \text{ divisibles par } n \text{ et } \frac{x}{n} \wedge \frac{y}{n} = 1 \}$

$$p(A_2) = \frac{p}{n^2}$$

Probabilité que deux nombres entiers soient premiers entre eux

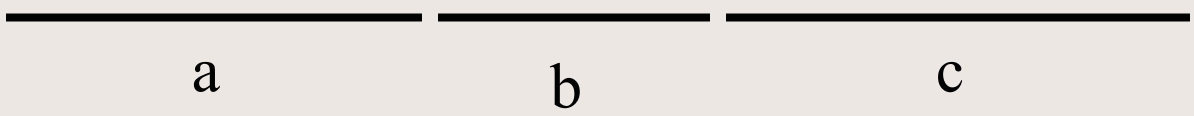
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

$$1 = p\left(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right) = p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{n^2} = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $p = \dfrac{6}{\pi^2} \approx 0{,}607$

Les spaghettis 1…le retour !

- Couper un spaghetti « au hasard » en 3 morceaux « simultanément »



- x= rnd ; y=rnd
- a = min (x,y) ; b = max(x,y) –a ; c = 1-(a+b)
- Test : max {a,b,c} < ½
- On simule : 0,26 ; 0,23 ; 0,25 ; 0,27 ; 0, 24…

Les spaghettis 2…la suite !

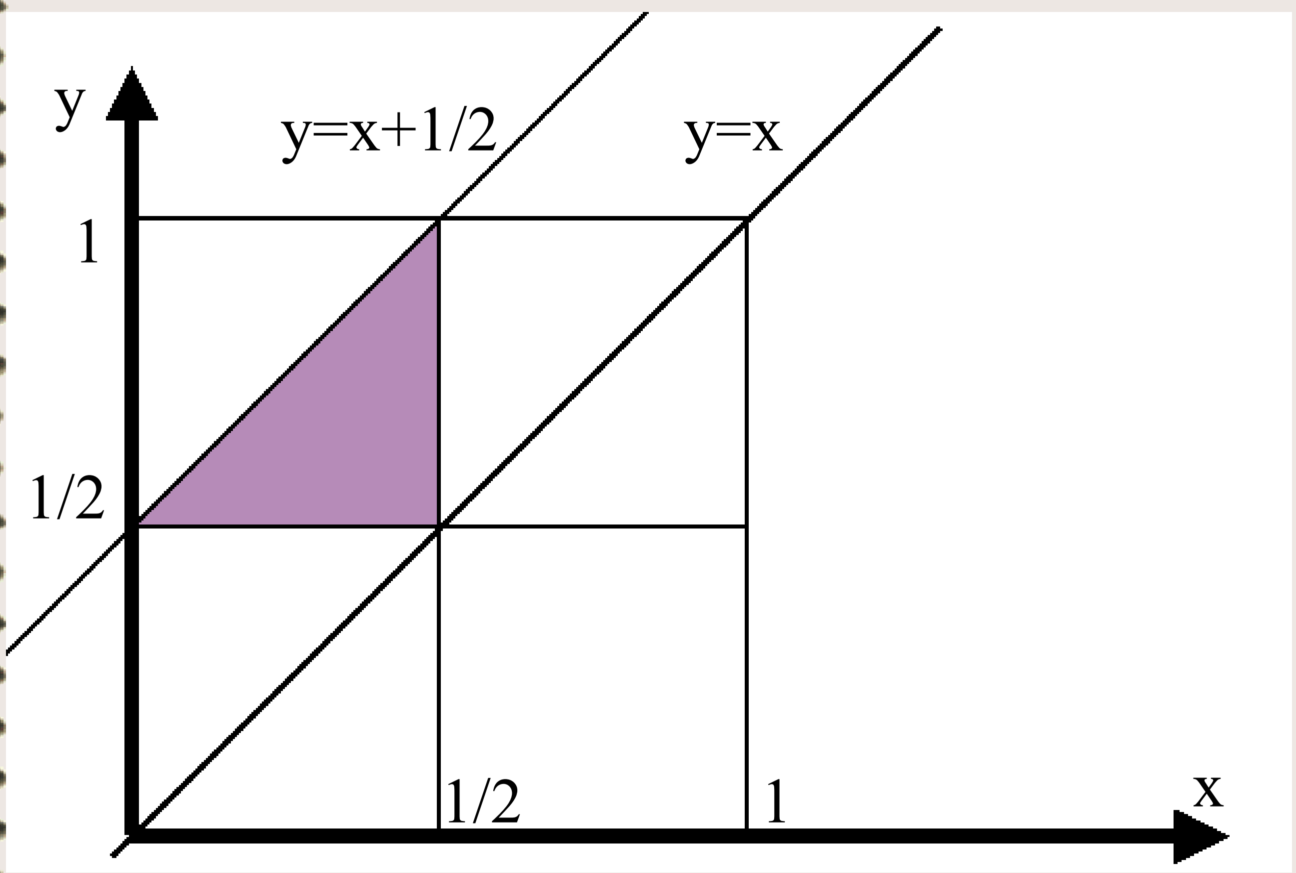
- Couper un spaghetti « au hasard » en 2 morceaux, puis « le morceau restant » en 2.

a b c

- x= rnd ; y=rnd
- a = x ; b = (1-x)y ; c = 1-(a+b)
- Test : max {a,b,c} < ½
- On simule : 0,22 ; 0,18 ; 0,19 ; 0,20 ; 0,21 ; 0,17 ; 0,17…..

Modélisation géométrique

Spaghettis 1 (x<y)

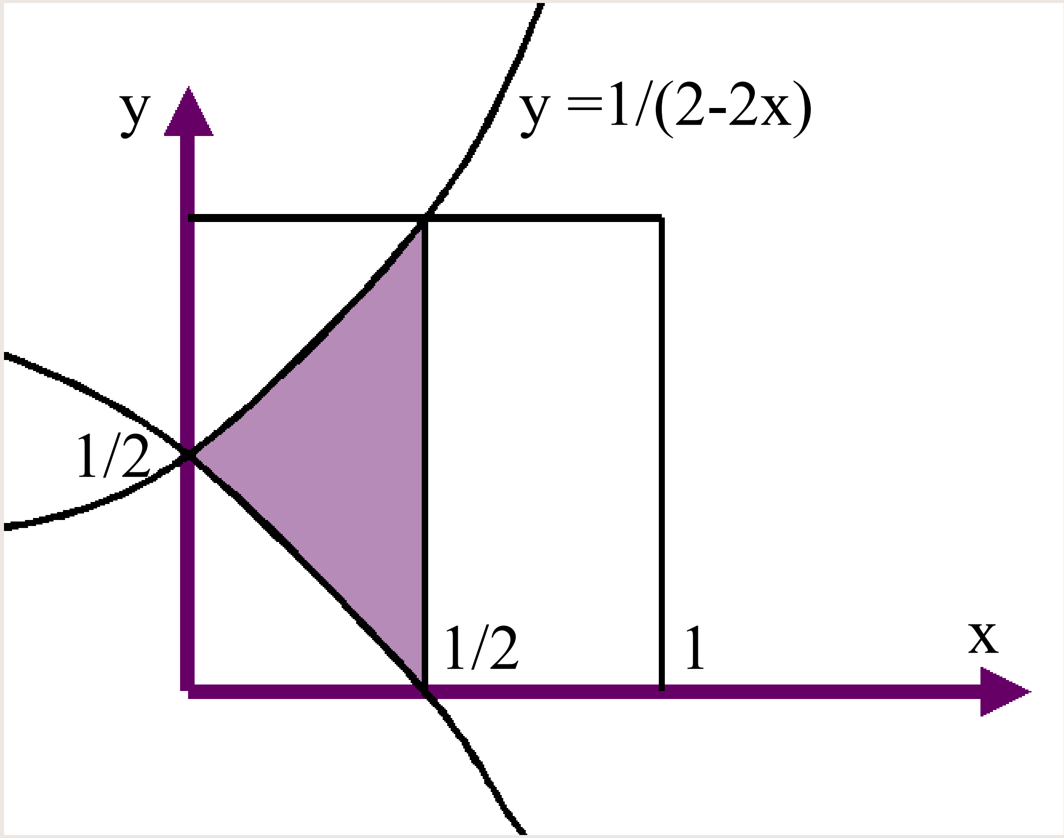


A= 1/8

P = 1/4

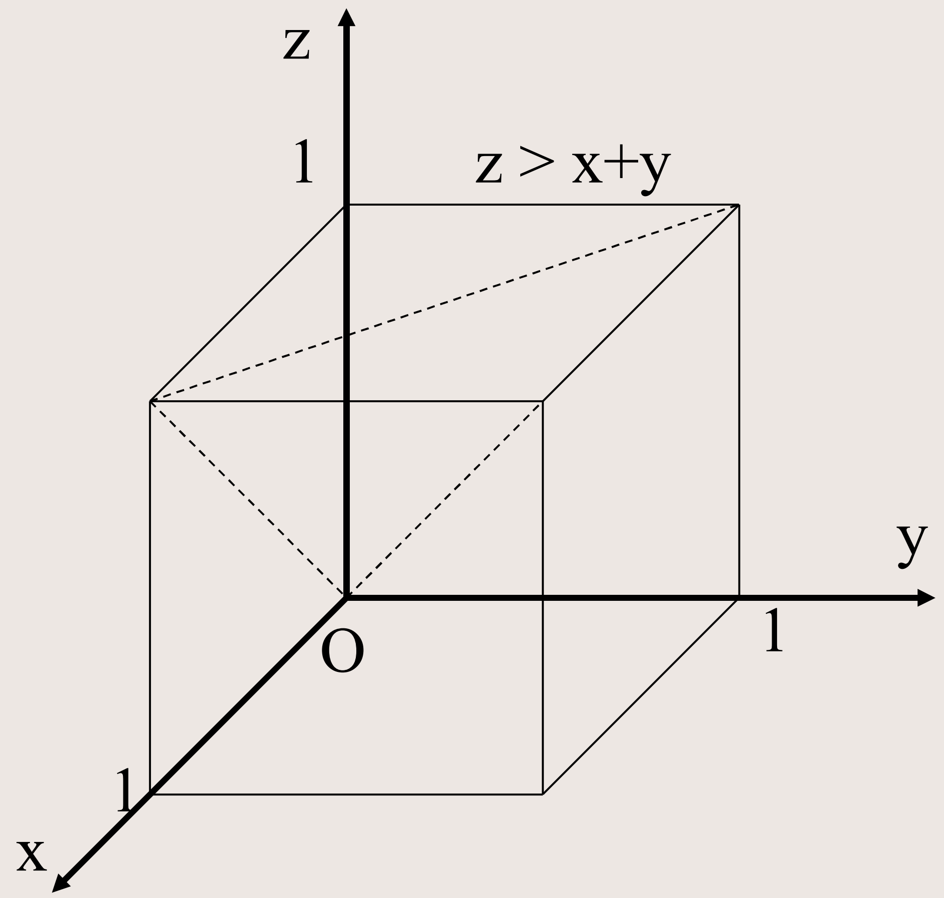
Modélisation géométrique

Spaghettis 2

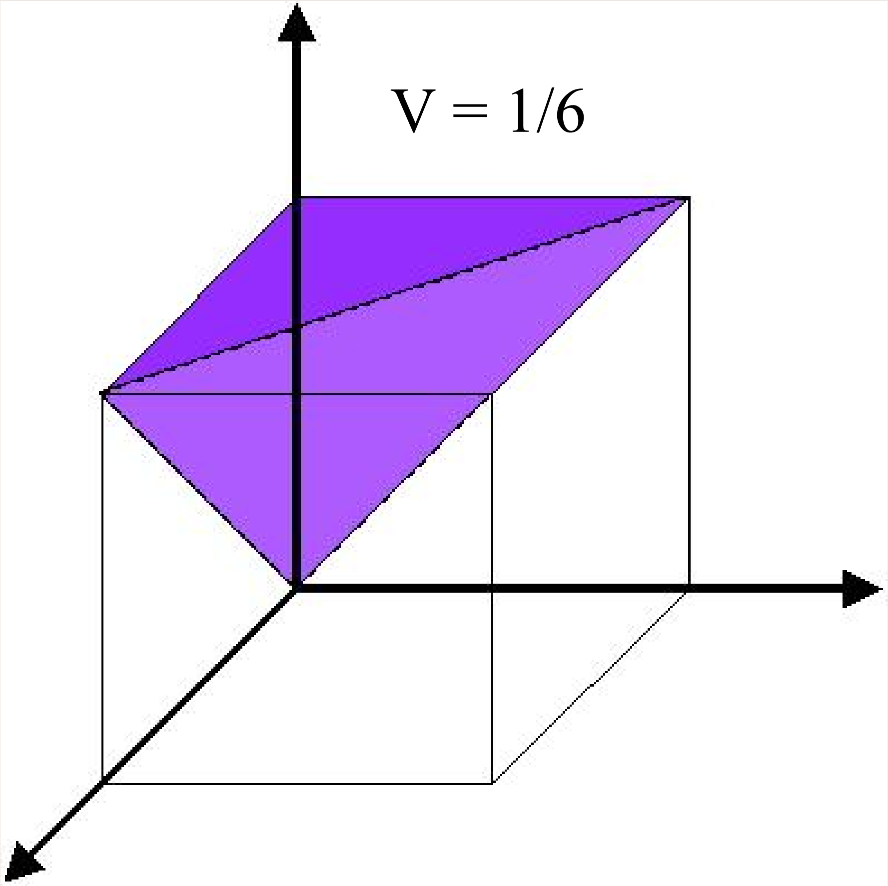


A = ln2 – ½
P = 0,1931…

Et mes spaghettis de 3ème ?



La probabilité est 1/2



Fréquence d'apparition du premier chiffre d'un ensemble de données numériques

Premier chiffre	Le monde	Gilibert	Commune
1	0,322	0,317	0,321
2	0,151	0,161	0,168
3	0,108	0,142	0,133
4	0,099	0,088	0,081
5	0,073	0,070	0,087
6	0,081	0,061	0,067
7	0,055	0,070	0,055
8	0,065	0,040	0,045
9	0,046	0,050	0,044

Loi de Benford
$p(i) = \log(1 + 1/i)$

Le monde	Gilibert	Commune	Loi de Benford
0,322	0,317	0,321	0,301
0,151	0,161	0,168	0,176
0,108	0,142	0,133	0,125
0,099	0,088	0,081	0,097
0,073	0,070	0,087	0,080
0,081	0,061	0,067	0,067
0,055	0,070	0,055	0,058
0,065	0,040	0,045	0,051
0,046	0,050	0,044	0,046

Connaître le « bon » modèle, ça sert !

Tout cela me direz-vous n’est que jeu de mathématicien :

ceux qui se sont fait “ épinglés ” par le fisc qui utilisait cette loi pour vérifier leur comptabilité n’en sont pas complètement convaincus !

En guise de conclusion…1

« Nous sommes tous les enfants du hasard ».

« Le jour où le hasard n'existera plus, c'est l'homme qui n'existera plus, car c'est le hasard génétique qui sauve les espèces »

La formation à la pensée statistique,
ça n'est pas l'école du mensonge,
c'est celle de l'humilité !

En guise de conclusion…2

Je la laisse à Laplace qui, en 1812, affirmait :

« ***Et si l'on observe ensuite que dans les choses qui peuvent ou non être soumises au calcul, la théorie des probabilités apprend à se garantir des illusions, il n'est pas de science qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de la fonction publique.*** »

En guise de conclusion…3

«Les mathématiques sont une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l’imperfection des sens »

Joseph Fourier