BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

A. P. M. E. P.

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

Le GROUPEMENT OPTICIEN–LUNETIER de 2001 à 2010

Brevet de technicien supérieur
Opticien lunetier session 2001

Exercice 1 **11 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) où y est une fonction de la variable réelle x, dérivable sur $[0, ; +\infty[$ et y' la dérivée de y :

$$y' + \frac{3}{4}y = \frac{9x+3}{16}.$$

1. Résoudre dans l'intervalle $[0, ; +\infty[$ l'équation différentielle « sans second membre »

$$y' + \frac{3}{4}y = 0.$$

2. Déterminer les constantes a et b telles que la fonction g définie sur l'intervalle $[0, ; +\infty[$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière de f de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ pour $x = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère ormonormal d'unité graphique : 2 cm.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$, où f' est la fonction dérivée de f.
   b. En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation et préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote.
3. Soit D la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, soit M et N des points respectifs de $\mathscr{C}$ et D de même abscisse x positive on note $y_M - y_N$ la différence (les ordonnées de M et de N.
   a. Déterminer le plus petit x pour lequel $y_M - y_N < 0,05$; en donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.
   b. Représenter $\mathscr{C}$ et D en tenant compte des résultats précédents
4. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right)$.

b. En déduire, en cm^2, l'aire du plan ensemble des points P de coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifiant
$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{4} \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right.$$
Arrondir le résultat au mm.

Exercice 2 **9 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes

Partie A

Le gérant du célèbre magasin d'optique OPTIPRIX dépose 120 chèques à sa banque. Les montants de ces chèques, libellés en euros, ont été regroupés en cinq classes.

Classes	[50 ; 60[	[60 ; 110[	[110 ; 140[	[140 ; 200[	[200 ; 280[
Effectifs	12	24	60	19	5

1. On prélève un chèque au hasard parmi les 120. Tous les chèques ont la même probabilité d'être tirés.

a. Donner, sous forme de fraction irréductible, la probabilité p_1 que ce chèque ait un montant appartenant à [200 ; 260[.

b. Donner de même la probabilité p_2 que ce chèque ait un montant appartenant à [110 ; 140[.

2. On prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de 36 chèques parmi les 120 déposés à la banque. Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement d'un tel échantillon, associe le nombre de chèques dont le montant appartient la classe [200 ; 280[.

On définit de même la variable aléatoire Y pour la classe [110 ; 140[.

a. Indiquer sans justification la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Donner son espérance et son écart-type arrondi au dixième.

b. Indiquer de même sans justification la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y. Donner son espérance et son écart-type.

3. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X peut-être approchée par la loi de Poisson de paramètre 1,5.

On note X_1 une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.

Calculer, avec cette approximation, la probabilité d'obtenir au moins trois chèques d'un montant appartenant à la classe [200 ; 280[(arrondir le résultat au centième).

4. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y peut-être approthèe par la loi normale de moyenne 18 et d'écart-type 3.

On note Y_1 une variable aléatoire qui suit cette loi normale.

Calculer, avec cette approximation, la probabilité d'obtenir entre 15 et 21 chèques d'un montant appartenant à la classe [110 ; 140[, c'est à dire $P(14,5 \leqslant Y_1 \leqslant 21,5)$.(arrondir le résultat au centième),

Partie B

Dans cette partie on s'intéresse au stock des chèques déposés à la banque au cours du dernier mois.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque chèque prélevé au hasard dans le stock, associe son montant en euros. On considère que cette variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart-type 30.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire et avec remise de 100 chèques, associe le montant moyen de ces 100 chèques. On se propose de construire un test d'hypothèse pour accepter ou refuser l'affirmation du comptable « Le montant moyen des chèques déposés au cours du dernier mois est de 120 euros. »
L'hypothèse nulle H_0 est : $m = 120$.
L'hypothèse alternative H_1 est $m = 120$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Justifier que, sous hypothèse nulle H_0, $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 3.

2. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer, en la justifiant, la valeur du réel h tel que

$$P(120 - h \leqslant \overline{Z} < 120 + h) = 0,95.$$

3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

4. Utilisation du test
Pour un échantillon de 100 chèques, on obtient une moyenne $z = 125$.
Peut-on accepter, au seuil de risque 5 %, l'affirmation du comptable ?

Brevet de technicien supérieur
Opticien lunetier session 2002

Exercice 1 **10 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - x^2\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie A - Étude de fonction

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule α sur l'intervalle $[-1~;~0]$. Donner, en la justifiant, la valeur de α arrondie au centième.
4. Tracer la droite D et la courbe $\mathscr{C}$ en précisant les tangentes horizontales de celle-ci. On rappelle l'unité graphique 2 cm.

Partie B - Calcul d'aire

1. Vérifier que $1 - f(x) \geqslant 0$ pour tout nombre réel x.
2. Soit λ un nombre réel strictement positif.
   Montrer que $\displaystyle\int_0^{\lambda} x^2\text{e}^{-x}\,\text{d}x = \text{e}^{-\lambda}\left(-\lambda^2 - 2\lambda - 2\right) + 2$ (on pourra effectuer deux intégrations par parties).
3. En déduire l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.
4. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **10 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés T_1 et T_2.

Partie A

On prélève au hasard une lentille dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T_1 ». On désigne par B l'évènement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T_2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

– la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_1 est $P(A) = 0,10$;
– la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_2 est $P(B) = 0,20$;
– la probabilité qu'une lentille ne présente aucun des deux défauts est $0,75$.

1. a. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.

   b. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2.

   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

3. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T_2, sachant que cette lentille présente un défaut pour le traitement T_1.

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 lentilles dans la production. On considère ce prélèvement comme un prélèvement avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de lentilles qui présentent au moins un des deux défauts (pour le traitement T_1 ou pour le traitement T_2).
On admet, dans cette partie, que la probabilité qu'une lentille présente au moins un des deux défauts est : $p = 0,25$.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire X.

3. Calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, 12 lentilles qui présentent au moins un des deux défauts. Arrondir le résultat à 10^{-4}.

4. On considère que la loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 12,5 et d'écart type 3,06.

   On note Y une variable aléatoire qui suit cette loi normale $\mathcal{N}(12,5\ ;\ 3,06)$.

   a. Calculer, avec cette approximation, la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, 12 lentilles qui présentent au moins un des deux défauts, c'est à dire : $P(11,5 \leqslant Y \leqslant 12,5)$. Donner le résultat avec la précision permise par la table.

   b. Déterminer le nombre réel h tel que : $P(12,5 - h \leqslant Y \leqslant 12,5 + h) = 0,673$. Arrondir le résultat à l'unité.

   Ce résultat peut s'énoncer de la façon suivante : avec une probabilité proche de $0,673$ *le nombre de lentilles présentant au moins un des deux défauts dans un tel échantillon de* 50 *lentilles, est compris entre* 10 *et* 15.

Brevet de technicien supérieur
Opticien lunetier session 2003

Exercice 1 **10 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2}.

x	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$								

   c. Tracer la tangente T et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ relative à l'intervalle $[-6~;~2]$.

4. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   a. On note I$= \displaystyle\int_0^1 (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

   À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\mathrm{I} = 6 - 4\sqrt{\mathrm{e}}$.

   b. On note $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

   À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\mathrm{J} = -26 + 16\sqrt{\mathrm{e}}$.

   c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

   En donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise fabrique des faces de lunettes en grande série. Dans chaque partie on étudie un modèle différent.

Dans cet exercice, sauf avis contraire, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Partie A

Une face de lunettes de modèle A est conforme si sa longueur, en millimètres, est comprise entre 129 et 131.

1. On désigne par L_1 la variable aléatoire qui, à chaque face prélevée au hasard dans la production dune journée associe sa longueur.

   On suppose que L_1 suit la loi normale de moyenne 130 et d'écart type $0,5$.

   Calculer la probabilité qu'une face produite ce jour-là soit conforme,

2. On désigne par L_2 la variable aléatoire qui, à chaque face prélevée au hasard dans un stock associe sa longueur.

   On suppose que L_2 suit la loi normale de moyenne 130 et d'écart type σ inconnu.

   On note p la probabilité qu'une face de ce stock soit non conforme.

   Déterminer σ pour que l'on ait $p = 0,03$.

Partie B

On note E l'évènement : « une face prélevée au hasard dans un lot du modèle B est non conforme ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,04. On prélève au hasard 50 faces de lunettes de ce lot.
Le lot est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 faces de lunettes. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 faces de lunettes, associe le nombre de faces non conformes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins deux faces de lunettes soient non conformes.
3. On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable X par une loi de Poisson.
   a. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
   b. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson définie au a.

      Calculer avec la précision de la table, la probabilité que le prélèvement contienne au plus quatre faces non conformes.

Partie C

Dans cette question on s'intéresse à la longueur des faces de lunettes de modèle C produites pendant une journée et on note μ la moyenne, inconnue, de ces longueurs.

Soit $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 64 faces de lunettes prélevées au hasard et avec remise dans la production des faces de modèle C de la journée considérée, associe la moyenne des longueurs des faces de cet échantillon.
On suppose que $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$ avec
$\sigma = 0,48$.
On mesure la longueur, exprimée en millimètres, de chacune des 64 faces d'un échantillon prélevé au hasard et avec remise dans la production de la journée des faces de modèle C.
On constate que la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la moyenne $\overline{l}$ des longueurs des faces de cet échantillon est $\overline{l} = 130,088$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{l}$ de la moyenne μ, avec le coefficient de confiance 95 %.

3. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement entre $129,970$ et $130,206$ ».
Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?
On ne demande pas de justification.

Brevet de technicien supérieur
Opticien lunetier session 2004

Exercice 1 **9 points**

L'étude des fiches de 500 patients d'un cabinet d'ophtalmologie a permis d'établir le tableau suivant.

Tranche d'âge	moins de 25 ans		de 25 ans à 45 ans			plus de 45 ans		
Nombre de visites annuelles	1	2	1	2	3	1	2	3
Effectifs	25	15	90	80	40	132	86	32

Par exemple, 86 personnes de plus de 45 ans sont venues au cabinet deux fois dans l'année.

1. On tire une fiche au hasard dans l'ensemble des fiches des 500 patients.
On considère que tous les tirages sont équiprobables.
On note A l'évènement : « le patient a moins de 25 ans » et B l'évènement : « le patient vient deux fois par an au cabinet ».

- **a.** Calculer la probabilité de chacun des évènements A, B et $A \cap B$.
- **b.** Déterminer la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. Arrondir cette probabilité à 10^{-2}.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque fiche tirée au hasard dans le fichier, associe le nombre de visites annuelles inscrites sur cette fiche.

- **a.** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
- **b.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
- **c.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. On prélève dix fiches au hasard et avec remise dans le fichier. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 10 fiches, associe le nombre de fiches de patients de moins de 25 ans.

- **a.** Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
- **b.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.
- **c.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 2 fiches exactement correspondent à des patients de moins de 25 ans. Arrondir à 10^{-2}.

4. On prélève cent fiches au hasard et avec remise dans le fichier. On considère la variable aléatoire Z qui, à chaque prélèvement de cent fiches, associe le nombre de fiches de patients de moins de 25 ans. On admet que Z suit approximativement la loi de Poisson de paramètre 8.

- **a.** Déterminer, avec la précision permise par la table, la probabilité de l'évènement E : « cinq fiches au plus correspondent à des patients de moins de 25 ans ».
- **b.** On considère un entier naturel n et l'évènement F : « n patients au plus ont moins de 25 ans ». Déterminer la valeur minimale n_0 de l'entier n telle que la probabilité de F soit supérieure à $0,5$.

Exercice 2 **11 points**

Une étude statistique effectuée sur une pièce utilisée dans la fabrication des lunettes a donné les résultats suivants où :

x désigne le prix unitaire en euros,
y désigne la demande (la quantité demandée par les consommateurs), en milliers d'unités,
z désigne l'offre (la quantité offerte sur le marché par les producteurs), en milliers d'unités.

x	0,5	1	1,9	2,1	2,4	2,8	3,2	3,5
y	10,5	9	6,9	6,5	5,9	5,3	4,7	4,3
z	2	2,4	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3

A. Étude de fonctions f et g, définies sur $[0\,;\,5]$ *et tracé de leurs courbes représentatives*

1. On appelle f la fonction demande définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = y$.
La demande, en milliers d'unités, pour un prix de x euros est donc $f(x)$.
On admet que,

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0\,;\,5],\ f(x) = \mathrm{e}^{-0,3x+2,5}.$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

a. Étudier les variations de f sur $[0\,;\ 5]$.

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. (On pourra utiliser le tableau de valeurs ci-dessus).

2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel on fera figurer des valeurs approchées arrondies à 10^{-2}.

x	0,5	1	1,9	2,1	2,4	2,8	3,2	3,5
z	2	2,4	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3
$Z = \mathrm{e}^z$	7,39							

b. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et Z. Arrondir à 10^{-3}.

c. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de Z en x sous la forme $Z = ax + b$ où a et b sont à arrondir à 10^{-1}.

d. Déduire du c. une expression de z en fonction de x.

3. On appelle g la fonction offre définie sur $[0\,;5]$. L'offre, en milliers d'unités, pour un prix de x euros est donc $g(x)$. On admet que,

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0\,;\,5],\ g(x) = \ln(6,4x + 4,4).$$

a. Étudier les variations de g sur $[0\,;\ 5]$.

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_f$.
(On pourra utiliser le tableau de valeurs figurant au début de cet exercice, en remarquant que $z = g(x)$.)

B. Détermination du prix d'équilibre

Le prix d'équilibre est le prix de vente x_0 pour lequel l'offre est égale à la demande, c'est à dire $f(x_0) = g(x_0)$ ou $f(x_0) - g(x_0) = 0$. On considère la fonction h définie sur $[0\,;\,5]$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{-0,3x+2,5} - \ln(6,4x+4,4).$$

1. Vérifier que, pour tout x de $[0\,;\;5]$, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

2. Déduire du 1. a. et du 3. a. de la partie A que, pour tout x de $[0\,;\;5]$, $h'(x) < 0$.
En déduire le sens de variation de h sur $[0\,;\,5]$.

3. **a.** Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique, notée x_0, dans $[4\,;\,4{,}5]$.

b. Déterminer un encadrement d'amplitude $0,1$ de x_0.

4. Expliquer par une phrase comment on peut vérifier sur la figure de la partie A le résultat obtenu au 3. de la partie B.

5. Dans cette question, pour simplifier, on prend pour prix d'équilibre $x_0 = 4$.

a. Calculer $f(x_0)$. Arrondir à 10^{-2}.

b. En déduire la quantité de pièces échangées sur le marché.

Brevet de technicien supérieur Opticien lunetier session 2005

Exercice 1 **11 points**

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande chaîne de magasins d'optique, on s'intéresse aux stocks de montures de lunettes.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

Partie A

Un des stocks est constitué de montures du modèle M_1, provenant de deux fabricants, notés « fabricant 1 » et « fabricant 2 ».
On admet que 1 % des pièces provenant du fabricant 1 sont défectueuses et que 2 % des pièces provenant du fabricant 2 sont défectueuses.
Le fabricant 1 a fourni 60 % de ce stock et le fabricant 2, le reste.
On prélève au hasard une monture dans le stock. Toutes les montures ont la même probabilité d'être prélevées.
On définit les évènements suivants :

A : « la monture provient du fabricant 1 » ;
B : « la monture provient du fabricant 2 » ;
D : « la monture est défectueuse ».

1. Déterminer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$, $P_B(D)$. (On rappelle que $P_A(D) = P(D/A)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé).
2. En déduire $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. Calculer $P(D)$.
4. Déterminer la probabilité qu'une monture provienne du fabricant 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Partie B

Un autre stock est constitué de montures du modèle M_2. On note E l'évènement « une monture prélevée au hasard dans un stock du modèle M_2 est défectueuse ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est $0,02$.
On prélève au hasard 50 montures dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 montures.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 montures, associe le nombre de montures défectueuses parmi ces 50 montures.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune des 50 montures ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux montures soient défectueuses.

Partie C

Dans ce qui suit, on s'intéresse au poids, en grammes) des montures du modèle M_3.
Une monture de ce modèle est considérée comme conforme pour le poids si celui-ci est, en grammes, compris entre 99 et 101.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque monture prélevée au hasard dans un lot très important de montures du modèle M_3, associe son poids.
On suppose que L suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type $0,5$.
Déterminer, à l'aide de la table du formulaire, la probabilité qu'une monture prélevée au hasard dans le lot soit conforme pour le poids.

Partie D

Dans cette partie, on veut contrôler la moyenne μ de l'ensemble des poids des montures du modèle M_4 constituant une livraison.

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque monture tirée au hasard dans la livraison, associe son poids, en grammes.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,5$. On désigne par $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 montures de modèle M_4, prélevé dans la livraison, associe la moyenne des poids de ces montures (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 100$. Dans ce cas les montures de modèle M_4 de la livraison sont conformes. L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 100$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, $\overline{Y}$ suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type $0,05$.
2. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que :
   $P(100 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 100 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon de 100 montures et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des poids est $\overline{y} = 100,032$.
   Peut-on, au seuil de signification de $0,05$, conclure que les montures de la livraison sont conformes pour le poids ?

Exercice 2 **9 points**

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \qquad y' - y = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre, sur $]0\,;\,+\infty[$, l'équation différentielle $(E_0)\ : y' - y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

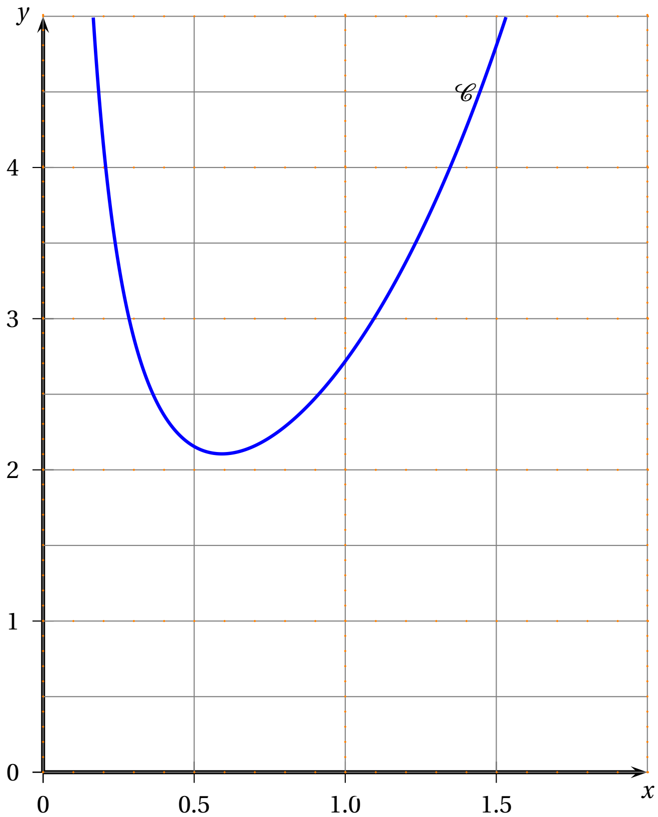
   $$h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right).$$

   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(1) = 2\mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \text{e}^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$. On remarque que h est la fonction définie dans la partie **A. 2.**.

Une représentation graphique $\mathcal{C}$ de h, dans un repère orthogonal, où l'unité graphique est 4 centimètres sur l'axe des abscisses et 2 centimètres sur l'axe des ordonnées, est donnée ci-après.



1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

   b. Vérifier que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $h(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x}(1 + x\ln x)$.

   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0} h(x)$.

   c. Que peut-on déduire du **b.** pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on pose : $g(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ln x$.

   a. On admet que g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que son tableau de variation est :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

   Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α, sur $[0{,}5\,;\,0{,}6]$.

b. Déterminer une valeur approchée de α arrondie à 10^{-2}.

c. En déduire le signe de $g(x)$ lorsque x varie dans $]0~;~+\infty[$.

d. Vérifier que, pour tout x de $]0~;~+\infty[$, $h'(x) = \text{e}^x g(x)$, où h' est la dérivée de la fonction h définie au **2.** de la partie A.

e. Déduire de ce qui précède le signe de $h'(x)$ lorsque x varie dans $]0~;~+\infty[$.

f. Donner le tableau de variations de la fonction h lorsque x varie dans $]0~;~+\infty[$.

Brevet de technicien supérieur Opticien lunetier session 2006

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise est approvisionnée en « palets »pour la fabrication de lentilles.

Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-2} sauf indication contraire de la partie B

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de palets, 2 % des palets ne sont pas conformes pour le rayon de courbure.
On prélève au hasard 50 palets de ce lot pour vérification du rayon de courbure. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 palets.
On considère le variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 palets, associe le nombre de palets non conformes pour le rayon de courbure.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, un palet et un seul ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un palet ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.
4. On considère que la loi suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

   Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
5. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est la valeur obtenue au **4.**.
   Calculer $P(Y = 1)$ et $P(Y \leqslant 1)$.

B. Evènements indépendants

Dans cette partie, on donnera les valeurs exactes des probabilités.
À l'issue de la fabrication, les lentilles peuvent présenter deux types de défauts :

- une puissance défectueuse,
- une épaisseur défectueuse.

On prélève une lentille au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'évènement : « la lentille présente une puissance défectueuse »,
On note B l'évènement : « la lentille présente une épaisseur défectueuse ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$ et on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « la lentille prélevée présente les deux défauts ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 : « la lentille prélevée présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « la lentille prélevée ne présente aucun défaut ».

4. Calculer la probabilité de l'évènement E_4 : « la lentille prélevée présente un seul de deux défauts ».

   Puisque les évènements A et B sont indépendants, on peut admettre que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

C. Test d'hypothèse

Les palets utilisés pour la fabrication des lentilles doivent avoir un diamètre de 9,80 millimètres.
Dans cette partie, on se propose de contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres de palets d'une importante livraison reçue par l'entreprise.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque palet prélevé au hasard dans la livraison, associe son diamètre.
La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,13$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 palets prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces palets (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 9,80$ ». Dans ce cas les palets de la livraison sont conformes pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est H_1« $\mu \neq 9,80$ ».
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Justifier le fait que, sous l'hypothèse nulle H_0, $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 9,80 et d'écart type 0,013.
2. Sous l'hypothèse nulle, déterminer le nombre réel h positif tel que :

$$P(9,80 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 9,80 + h) = 0,95.$$

3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon de 100 palets et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\overline{z} = 9,79$.

   Peut-on, au seuil de risque de 5 %, conclure que les palets de la livraison sont conformes pour le diamètre ?

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \quad y' - y = \mathrm{e}^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' - y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x$.

   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

B. Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 cm,

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b..

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.

   b. Établir le tableau de variations de f.

3. **a.** Écrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Construire sur la feuille de copie quadrillée T et $\mathscr{C}$.

C. Calcul intégral

1. Justifier que la fonetion f défmie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = f'(x) - \mathrm{e}^{x}$.
2. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un nombre réel strictement inférieur à -2. On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{a}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Démontrer que $\mathrm{I} = -a\mathrm{e}^{a} - 2\mathrm{e}^{-2}$.

   b. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -4$ et $x = -2$.

   c. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de cette aire.

Brevet de technicien supérieur
Opticien –lunetier session 2007

Exercice 1 **11 points**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Une entreprise effectue des contrôles pour détecter si un produit satisfait aux normes prévues. Le produit est conditionné en boîtes. Les contrôles montrent que la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit défectueuse est égale à $0,006$.

Soit n un entier naturel. On note X la variable aléatoire qui à chaque lot de n boîtes du produit tirées au hasard et avec remise dans la production associe le nombre de boîtes défectueuses dans ce lot.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale. Donner l'espérance mathématique de X en fonction de n.
2. Déterminer, en fonction de n, la probabilité qu'il n'y ait aucune boîte défectueuse dans le lot.
3. Dans celle question, on prend $n = 500$.
   On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X par une loi de Poisson.
   a. Déterminer le paramètre de la loi de Poisson.
   b. On désigne par X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre X, où X est la valeur obtenue au **a.**. En utilisant cette loi de Poisson et la table du formulaire calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux boîtes défectueuses dans le lot.
   Donner le résultat approché arrondi à 10^{-2}.
4. Dans cette question, on prend $n = 10\,000$.
   On admet que l'on peut approcher la loi dc probabilité de la variable aléatoire X par une loi normale.
   a. Calculer la moyenne et l'écart type de cette loi normale.
   Donner, pour l'écart type, le résultat approché arrondi à 10^{-2}.
   b. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 60 et d'écart type $7,72$.
   Calculer à l'aide de la table du formulaire la probabilité $P(49,5 \leqslant Y \leqslant 70,5)$.
   c. En déduire la probabilité qu'il y ail, au sens large, entre 50 et 70 boîtes défectueuses dans le lot dc $10\,000$ boîtes. Donner le résultat approché arrondi à 10^{-2}.

Partie B

L'entreprise organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients.

Soir Z la variable aléatoire qui à tout échantillon de n fiches, prélevées au hasard et avec remise dans le fichier de la clientèle, associe le pourcentage de clients correspondants satisfaits par le produit.

On admet que Z suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ où p est la proportion inconnue de clients satisfaits par le produit dans l'ensemble de la clientèle.

Un sondage auprès d'un échantillon aléatoire de 100 clients a montré que 85 d'entre eux étaient satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle de p.
2. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-2}.
3. Peut-on affirmer que p est compris dans cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?

Exercice 2 **9 points**

Partie A

Soit (E) l'équation différentielle

$$y' + y = -2x\mathrm{e}^{-x}$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

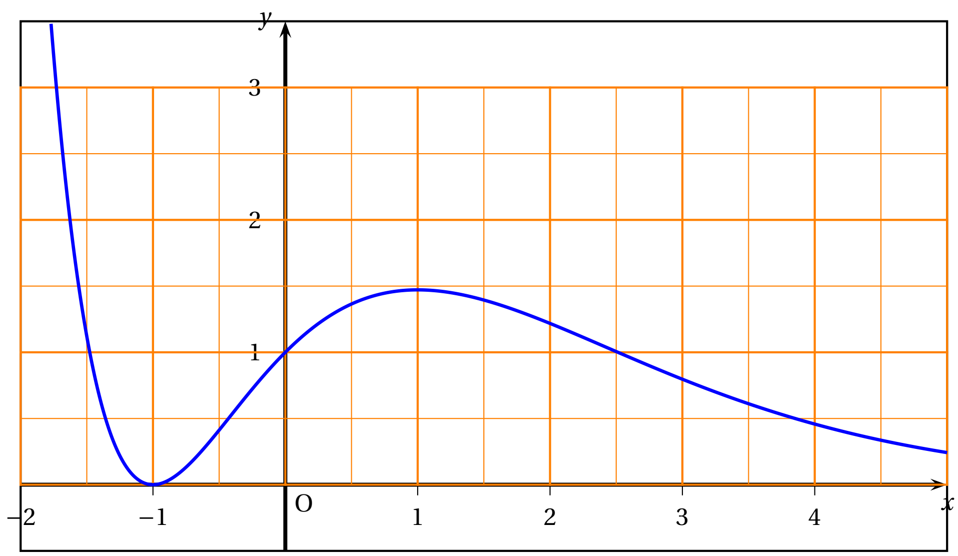
1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que g est solution dc l'équation différentielle (E) de la partie A.
2. Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par la courbe ci-dessous :



On admet que la fonction h est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
En utilisant le graphique précédent donner une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. On expliquera la démarche utilisée.

3. On se propose de calculer la valeur exacte de l'intégrale précédente.

a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}.$$

b. On sait que g est une solution particulière de l'équation différentielle (E) de la partie A, c'est-à-dire que, pour tout réel x on a :

$$g(x) = -g'(x) - 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{-1} - 1$, puis la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de la portion du plan comprise entre la courbe représentative de g (tracée à la question 5 de la partie B), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Brevet de technicien supérieur
Opticien –lunetier session 2008

Exercice 1 **10 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = -t$ où l'inconnue y désigne une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.
2. Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels la fonction h définie pour tout réel t par $h(t) = at + b$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E), dont la représentation graphique dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $(0\,;\,2)$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ par :

$$g(t) = t + 1 + \mathrm{e}^t.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$.
2. Montrer que l'équation $g(t) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-2\,;\,2]$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $g(t)$ sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;\,2]$ par : $f(t) = \dfrac{t \cdot \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + 1}$.

1. Démontrer que pour tout t de l'intervalle $[-2\,;\,2]$: $f'(t) = \dfrac{g(t) \cdot \mathrm{e}^t}{\left(\mathrm{e}^t + 1\right)^2}$.
2. En déduire le signe de $f'(t)$ puis le sens de variation de f sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$.

Partie D

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Pour dessiner un profil de branche de lunettes, on utilise la courbe $\mathscr{C}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & \dfrac{t \cdot \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + 1} \\ y & = & g(t) & = & t + 1 + \mathrm{e}^t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [-2\,;\,2].$$

1. À l'aide des résultats des parties B et C, établir un tableau des variations conjointes de f et de g sur $[-2\,;\,2]$.
2. Déterminer un vecteur directeur de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_1 obtenu pour la valeur $t = \alpha$.
3. Déterminer un vecteur directeur de la tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_2 obtenu pour la valeur $t = 0$.

4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant.
On prendra $-1,28$ comme valeur approchée de α.
Les valeurs seront arrondies au centième.

t	-2	$-1,28$	0	1	2
$f(t)$					
$g(t)$					

5. Placer les points dont les coordonnées ont été calculées à la question précédente, tracer les droites T_1 et T_2 et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 2 **10 points**

Les parties A et B sont indépendantes. Les résultats sont à arrondir au centième.

Au cours d'une année, le service ophtalmologie d'un centre hospitalier a examiné 5 000 patients. Pour chaque patient, une fiche a été remplie sur laquelle sont indiqués l'âge de la personne et le diagnostic posé.

Partie A

Le tableau suivant donne une répartition des sujets en classes d'âge.

Classe d'âge (ans)	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[
Effectif n_i	400	600	750	1 000	800	650	450	350

1. On prélève une fiche au hasard dans le fichier. On note A et B les évènements suivants :
A : la fiche prélevée est celle d'un sujet dont l'âge est strictement inférieur à 40 ans.
B : la fiche prélevée est celle d'un sujet dont l'âge est supérieur ou égal à 20 ans.
   a. Calculer la probabilité de chacun des évènements A, B et A ∩ B.
   b. Calculer la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé.
2. On prélève au hasard et avec remise 40 fiches dans le fichier. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement de 40 fiches le nombre de fiches correspondant à des sujets dont l'âge est supérieur ou égal à 80 ans.
   a. Justifier que la variable X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement : $(X = 3)$.
3. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.
   a. Calculer le paramètre X de cette loi de Poisson.
   b. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre X. Calculer la probabilité de l'évènement : $(Y = 3)$.

Partie B

Parmi les pathologies rencontrées chez les 5 000 patients figure l'aniséïconie [1].
On considère un échantillon de 60 fiches prélevées au hasard dans le fichier des patients. Le nombre de fiches du fichier est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 15 fiches de cet échantillon signalent une aniséïconie.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des fiches du fichier qui signalent une aniséïconie.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 fiches prélevées au hasard et avec remise dans le fichier, associe la fréquence des fiches qui signalent une aniséïconie. On admet que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{60}}$, où p désigne la fréquence inconnue des fiches du fichier qui signalent une aniséïconie.

   Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p au seuil de confiance 95 %.

1. L'aniséïconie se définit comme la perception d'images différentes en taille et/ou en forme par les deux yeux fixant un même objet.

Brevet de technicien supérieur Opticien –lunetier session 2009

Exercice 1 **10 points**

La direction de la chaîne des magasins OPTITAN, qui commercialise des lunettes solaires, se propose de déterminer le prix de vente unitaire d'un de ses modèles pour réaliser la meilleure recette possible.
La direction raisonne à partir des deux hypothèses suivantes :

- pour un prix de base de 50 euros, il y a 10 000 clients acheteurs en une année ;
- toute augmentation de 20 euros entraîne une diminution de 20 % du nombre de clients.

A. Modèle discret

1. La suite (p_n), avec n entier naturel compris entre 0 et 4, des différents prix testés, en euros, par l'entreprise est une suite arithmétique de premier terme $p_0 = 50$ et de raison $r = 20$.
   Déterminer $P_1,\ P_2, P_3$ et P_4.
2. Pour n entier naturel compris entre 0 et 4, on désigne par c_n le nombre de clients acheteurs potentiels, lorsque le prix unitaire est égal à p_n.
   a. Montrer que (c_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer, pour tout n entier naturel compris entre 0 et 4, c_n en fonction de n.
3. Pour n entier naturel compris entre 0 et 4, on désigne par r_n la recette correspondant au prix unitaire p_n.
   a. Reproduire et compléter le tableau suivant.

n	0	1	2	3	4
p_n	50	70			130
c_n	10 000				
r_n	500 000				

   b. D'après le tableau précédent, quel prix p_n permet à OPTITAN de réaliser la meilleure recette ?

B. Modèle continu

I. On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' = -\dfrac{20}{100}y$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$, et y' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
   b. Déterminer la solution C de l'équation différentielle (E) qui vérifie $C(0) = 10000$.
2. **a.** Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant, dans lequel les valeurs c_n ont été obtenues à la question A. 3. et les valeurs $C(n)$ sont à calculer avec la fonction C obtenue au B. I. 1. b. Arrondir les valeurs $C(n)$ à l'unité.

n	0	1	2	3	4
Nombre de clients potentiels obtenu avec le premier modèle c_n		8 000			
Nombre de clients potentiels obtenu avec le deuxième modèle : $C(n)$		8 187			
$C(n) - c_n$		187			

b. Pour quelle valeur de n l'écart entre le nombre de clients acheteurs potentiels obtenu avec le deuxième modèle et le nombre de clients acheteurs potentiels obtenu avec le premier modèle est-il le plus important ? Quel est alors cet écart ?

II. On considère la fonction R de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par :

$$R(x) = (5+2x)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

1. **a.** Calculer $R'(x)$, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$.

b. Étudier le signe de $R'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

En déduire le tableau de variations de R, dans lequel on fera figurer les valeurs exactes de $R(0)$, de $R(4)$ et de $R(x_0)$, où x_0 est la valeur de x pour laquelle la fonction R admet un maximum.

c. Donner les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} de $R(2,5)$ et $R(4)$.

En utilisant le tableau de variations précédent, donner le nombre de solutions de l'équation $R(x) = 6$ dans l'intervalle $[0\,;\,4]$. On ne demande pas de justification.

2. On admet que, lorsque le prix de vente unitaire du modèle de lunettes solaires considéré au début de l'exercice est $(50+20x)$ euros, avec $0 \leqslant x \leqslant 4$, la recette correspondante est $R(x)$, en centaines de milliers d'euros.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la question B. II. 1.

a. Déterminer le prix unitaire, en euros, du modèle de lunettes permettant d'obtenir la meilleure recette. Quelle est alors cette recette, arrondie à l'euro ?

b. Deux prix permettent une recette égale à 600 000 euros. Expliquer pourquoi l'un est favorable à l'acheteur et l'autre au vendeur.

Exercice 2 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Dans le service d'ophtalmologie d'un centre hospitalier, on dispose de deux fichiers, concernant un grand nombre de patients. Le fichier 1 contient les fiches cartonnées de patients atteints d'un glaucome. Le fichier 2 concerne des patients non atteints de glaucome.

A. Évènements indépendants

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

On s'intéresse aux allergies déclenchées chez les patients du fichier 1 par deux collyres C_1 et C_2. L'examen du fichier montre que 5 % des patients sont allergiques à C_1 et 10 % des patients allergiques à C_2.
On prélève une fiche au hasard dans le fichier 1.
On note A l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un patient allergique à C_1 ».
On note B I' évènement : « la fiche prélevée est celle d'un patient allergique à C_2 ».
On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Donner les probabilités $P(\text{A})$ et $P(\text{B})$.

2. Calculer la probabilité de l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un patient allergique aux deux collyres ».

3. Calcule la probabilité de l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un patient allergique à l'un au moins des deux collyres ».

Dans les parties B, C et D, les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}

B. Loi binomiale et loi de Poisson
Dans le fichier 1, seulement 10 % des fiches indiquent une « pression intraoculaire »normale (la pression intraoculaire est la pression de l'humeur aqueuse à l'intérieur de l' ?il).
On prélève au hasard et avec remise n fiches dans le fichier 1.
On désigne par X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de n fiches associe le nombre de fiches indiquant une pression intraoculaire normale.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Dans cette question, on prend $n = 10$.
Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune fiche ne présente une pression intraoculaire normale.

3. Dans cette question, on prend $n = 100$.
On considère que la loi suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

- **a.** Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.
- **b.** On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au a.
Calculer, à l'aide de la table du formulaire, $P(Y \leqslant 3)$.

C. Loi normale

Dans cette question, on considère la variable aléatoire Z qui, à toute fiche prélevée au hasard dans le fichier 1, associe la pression intraoculaire du patient, exprimée en millimètres de mercure.
On admet que Z suit la loi normale de moyenne 19 et d'écart type 2.
Calculer, à l'aide de la table du formulaire, la probabilité $P(15 \leqslant Z \leqslant 23)$.

D. Test d'hypothèse

Dans cette partie, on cherche à déterminer s'il existe une différence significative entre la moyenne des « pressions systoliques » (la pression systolique est la pression artérielle au moment de la contraction du cœur) des patients du fichier 1, atteints de glaucome, et celle des patients du fichier 2, non atteints de glaucome. Ne pouvant consulter toutes les fiches, on décide de procéder à un test d'hypothèse.
On note X_1 la variable aléatoire qui à chaque fiche prélevée au hasard dans le fichier 1 associe la pression systolique du patient, exprimée en millimètres de mercure.

On note X_2 la variable aléatoire qui à chaque fiche prélevée au hasard dans le fichier 2 associe la pression systolique du patient, exprimée en millimètres de mercure.
On admet que X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1, 25)$ et que X_2 suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_2, 20)$, où μ_1 et μ_2 sont les moyennes inconnues des pressions systoliques des patients des fichiers 1 et 2.
On désigne par X_1 la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire de 200 fiches prélevées avec remise dans le fichier 1 associe la moyenne des pressions systoliques.
On désigne par X_2 la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire de 200 fiches prélevées avec remise dans le fichier 2 associe la moyenne des pressions systoliques.
On note D la variable aléatoire telle que : $D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.
Le seuil de signification est fixé à 5 %.
On admet que sous l'hypothèse nulle H_0 la variable aléatoire D suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sqrt{\dfrac{25^2+20^2}{200}}\right)$.

1. Sous l 'hypothèse nulle H_0 déterminer le nombre réel positif h tel que :

$$P(-h \leqslant D \leqslant h) = 0,95.$$

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. On prélève un échantillon aléatoire de 200 fiches dans chacun des fichiers. La moyenne observée sur l'échantillon du fichier 1 est $\overline{x_1} = 133$. Celle observée sur l'échantillon du fichier 2 est $\overline{x_1} = 130$.

Peut-on, au seuil de signification de 5 %, accepter l'hypothèse H_0 ?

Brevet de technicien supérieur Opticien –lunetier session 2010

Exercice 1 **11 points**

Les deux parties A et D peuvent être traitées indépendamment des parties B et C

A. Ajustement affine

Une entreprise souhaite lancer un nouveau produit sur le marché. Une enquête statistique effectuée avant le lancement auprès des consommateurs potentiels a permis d'établir le tableau suivant, où x désigne le prix unitaire exprimé en euros et y la quantité demandée, exprimée en milliers d'unités.

x	40	50	60	70	80	90	100
y	66	50	37	26	16	8	0

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées seront à arrondir à 10 - 3.
2. Donner une équation de la droite de régression de y en t, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme y = at + b, où a et b sont à arrondir à l'unité. (Pour cette question, on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé).
3. En déduire une expression de yen fonction de x, selon cet ajustement.

B. Étude de fonctions et calcul intégral

On considère les fonction f et g définies sur l'intervalle $I = [40\ ;\ 100]$ par :

$$f(x) = -72\ln(0,01x) et g(x) = 72\ln(0,1x-3).$$

Les courbes représentatives de f et de g, tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe.

1. Démontrer que f est décroissante sur I et que g est croissante sur I.
2. Démontrer que, comme le suggère le graphique, pour tout x de I, $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$.
3. **a.** Résoudre, algébriquement, dans I l'équation $f(x) = g(x)$.
   b. Vérifier graphiquement le résultat de la question précédente, en faisant apparaître les traits de construction sur la figure donnée en annexe.
4. **a.** Hachurer, sans justification, la partie du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, est égale à l'intégrale $A = \displaystyle\int_{50}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = 72x[1 - \ln(0,01x)]$ est une primitive de f sur l'intervalle I.
   c. En déduire la valeur exacte de A, puis une valeur approchée arrondie à l'unité.

C Application de la partie B

La demande est la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros. On admet que la fonction f, étudiée dans la partie B, modélise la demande. L'offre est la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que l'entreprise est prête à vendre au prix unitaire de x euros. On admet que la fonction g, étudiée dans la partie B, modélise l'offre.

1. On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. Quel est ce prix d'équilibre ?
2. Donner une valeur approchée, à un millier d'unités près, de la demande correspondant au prix d'équilibre.

Commentaire : l'aire A représente, en milliers d'euros, la somme que les consommateurs sont prêts à payer collectivement pour l'achat de ce produit si son prix unitaire est compris entre 50 *et* 100 *euros*

D. Étude de suites

L'entreprise commercialise le produit et décide, chaque année, d'adapter son offre à la demande de l'année précédente en utilisant le modèle des suites étudiées dans cette partie. Pour tout entier naturel n, on note :

- O_n la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que l'entreprise met sur le marché l'année de rang n (c'est l'offre cette année-là) ;
- D_n la quantité de produit, exprimée en milliers d'unités, que les consommateurs achètent l'année de rang n (c'est la demande cette année-là) ;
- p_n le prix unitaire, exprimé en euros, du produit l'année de rang n.

On admet que $p_0 = 50$ et que, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} O_{n+1} & = & \frac{1}{2}D_n + 20 \\ D_n & = & -P_n + 100 \\ O_n = D_n & & \end{array}\right.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + 30$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = p_n - 60$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n, puis p_n, en fonction de n.
   c. En déduire la limite p de la suite (p_n).

Commentaire : à long terme, p est le prix unitaire du produit sur le marché.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

Une machine remplit des flacons de produit de nettoyage pour lentilles de contact Dans la production d'une journée, on prélève au hasard un flacon. On désigne par V la variable aléatoire qui, à chaque flacon prélevé, associe le volume de produit contenu dans ce flacon, exprimé en millilitres.

1. On suppose que V suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 4. Calculer la probabilité que le volume de produit contenu dans le flacon prélevé soit compris entre 245 et 255 millilitres.
2. Le réglage de la machine est modifié de façon que 95 % des flacons contiennent entre 245 et 255 millilitres de produit. On suppose qu'après réglage, la variable aléatoire V suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type σ. Calculer σ.

B. Probabilités conditionnelles, loi binomiale et loi de Poisson

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse a, b, c, d est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total est négatif, la note pour cette partie est ramenée à 0.

On admet qu'à l'issue du remplissage, 95 % des flacons sont remplis correctement, et on procède à un contrôle. Cependant, le contrôle n'est pas parfait : 4 % des flacons remplis correctement sont refusés, et 4 % des flacons mal remplis sont acceptés.
On prélève au hasard un flacon à l'issue du contrôle dans un stock important.
On appelle A l'évènement : « le flacon est accepté ».
On appelle C l'evènement : « le flacon est correctement rempli ».

1. La probabilité que le flacon soit rempli correctement et refusé est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$P\left(C \cup \overline{A}\right)$	$P(C) \times P(A)$	0,04	$0,04 \times 0,95$

On admet que la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle sur un flacon tiré au hasard dans ce stock à l'issue du contrôle est $0,04$. On prélève un échantillon de 50 flacons à l'issue du contrôle. La quantité de flacons est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque échantillon de 50 flacons ainsi prélevé, le nombre d'erreurs de contrôle dans l'échantillon.

2. La valeur arrondie à 10^{-3} de la probabilité $P(X = 1)$ est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
0,04	0,005	0,271	$1 - 0,96^{50}$

3. La probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs de contrôle dans l'échantillon, arrondie à 10^{-2}, est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
0,40	0,32	0,60	0,68

4. On approche la loi suivie par X par une loi de Poisson. Soit Y une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson. Avec la précision de la table, la probabilité $P(Y \leqslant 4)$ est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
0,090	0,857	0,947	0,628

C Test d'hypothèse

Un site de vente par correspondance commercialise ces flacons. À la suite d'une série de réclamations, le gestionnaire du site décide de mettre en oœuvre un test unilatéral, pour décider si, au seuil de signification de 5 %, le volume moyen des flacons qui lui sont livrés est inférieur à 250 millilitres.
On note Z la variable aléatoire qui, à tout flacon prélevé au hasard dans la livraison, associe le volume de liquide contenu, exprimé en millilitres. La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $2,5$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 25 flacons prélevés dans la livraison, associe la moyenne des volumes de liquide contenus

dans les flacons de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 250$.
L 'hypothèse alternative est $H_1 : \mu < 250$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type $0,5$.

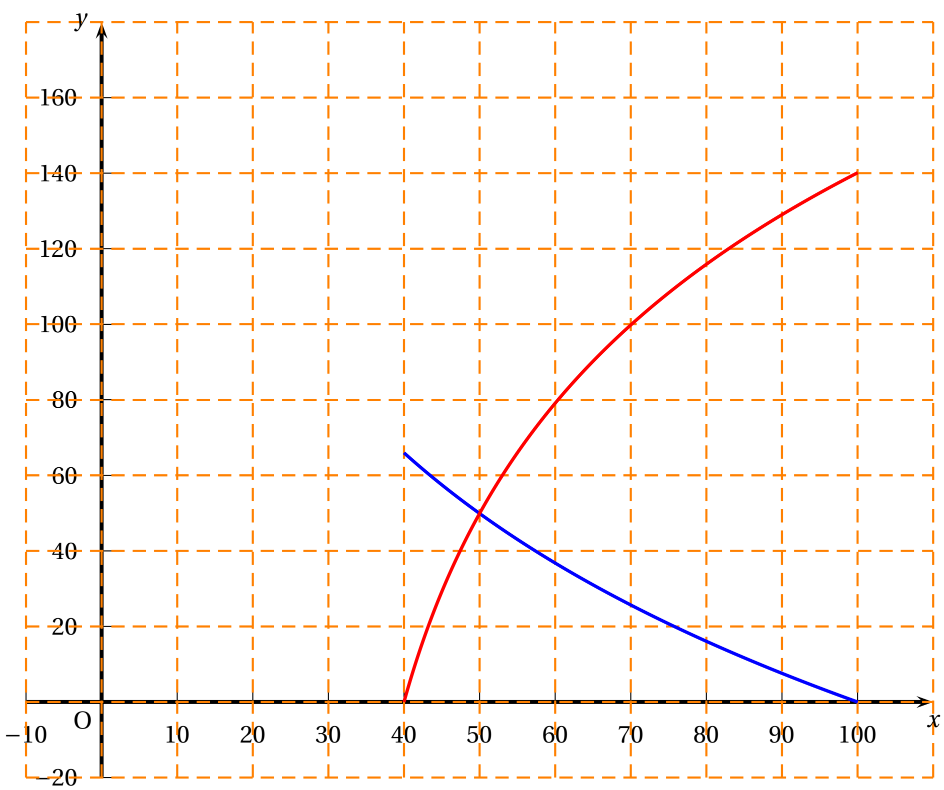
On admet également que : $P\left(\overline{Z} \geqslant 249,2\right) = 0,95$. Ce résultat n'a pas à être démontré. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. Le gestionnaire prélève un échantillon aléatoire de 25 flacons et observe que, pour cet échantillon, le volume moyen de liquide est $\overline{x} = 249,4$ millilitres.

Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que le volume moyen des flacons livrés est inférieur à 250 millilitres ?

ANNEXE À COMPLÉTER PUIS À RENDRE AVEC LA COPIE

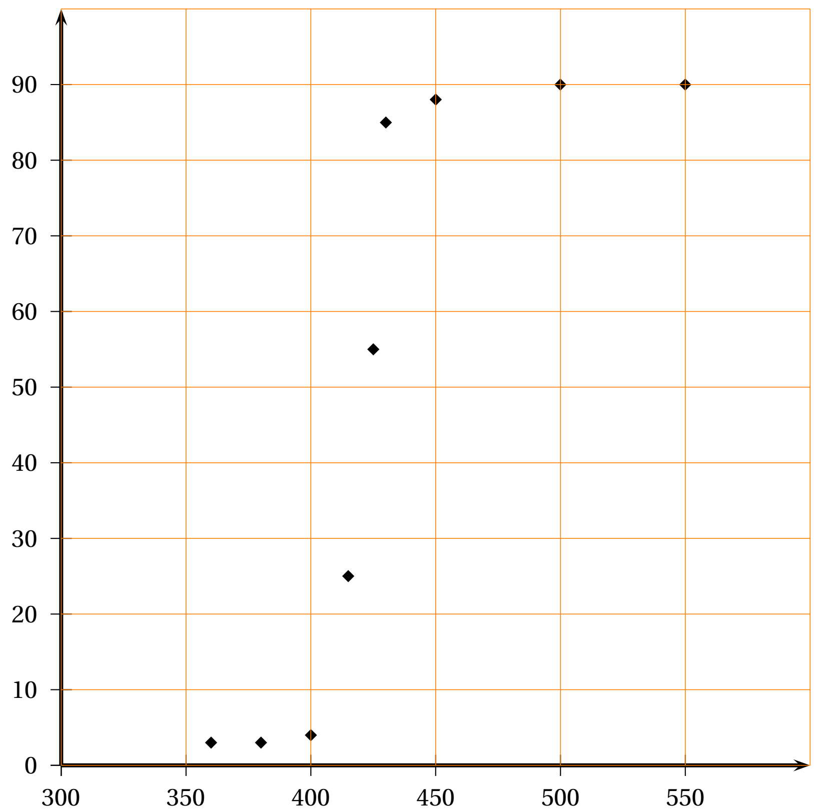
Exercice 1
Questions $B\,3$. b. et $B\,4$. a.



Brevet de technicien supérieur
Opticien –lunetier session 13 mai 2011

Exercice 1 **9 points**

Les verres photochromiques s'assombrissent ou s'éclaircissent en fonction de la luminosité. On étudie dans cet exercice le coefficient de transmission d'un verre minéral photochromique en fonction de la longueur d'onde de la lumière.
Suite à une étude expérimentale, on a obtenu le nuage de points suivant, où x correspond à la longueur d'onde en nm, et y au coefficient de transmission, exprimé en pourcentage.



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

On s'intéresse tout d'abord à la phase de transition entre l'état sombre et l'état clair, correspondant aux données du tableau suivant.

Longueur d'onde x (en nm)	400	410	420	430
Coefficient de transmission y (en %)	4	25	55	85

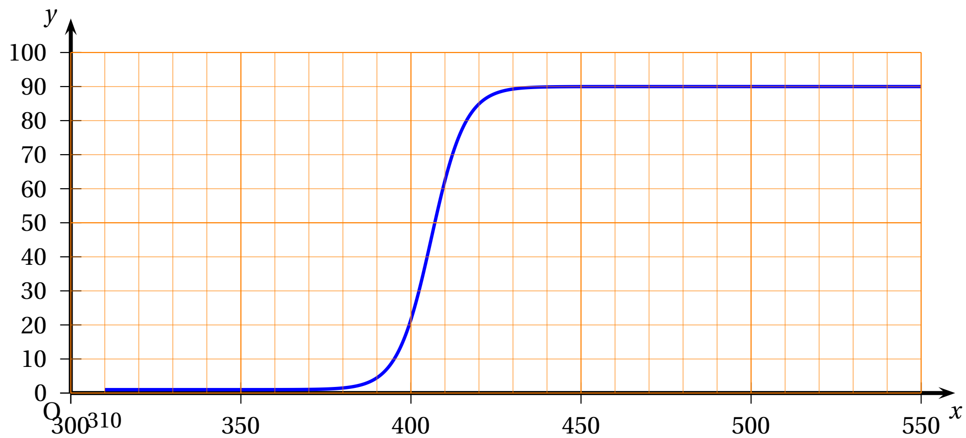
1. Donner une équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, où a est arrondi à 10^{-2} et b est arrondi à l'unité.
2. Utiliser l'équation précédente pour estimer le coefficient de transmission pour une longueur d'onde de 416 nm. Arrondir à l'unité.

B. Étude de fonctions et calcul intégral

Un modèle global de la situation expérimentale conduit à exprimer le coefficient de transmission, exprimé en pourcentage, en fonction de la longueur d'onde x, en nm, à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 90 - \frac{89}{1 + \mathrm{e}^{0,2(x-416)}}.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée par le graphique suivant.



1. **a.** Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = 89 \times 0,2\frac{\mathrm{e}^{0,2(x-416)}}{\left(1+\mathrm{e}^{0,2(x-416)}\right)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. *Les questions a., b. et c. suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse enlève 0,5 *point.*
Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total est négatif, la note pour cette partie est ramenée à 0.

a.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 90$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont une équation est :

$x = 90$	$y = 89$	$y = 90$

c. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 416 est :

$y = -4,45x - 18923,55$	$y = 4,45x - 1805,7$	$y = 45,5x - 18923,55$

Le coefficient directeur de cette tangente correspond à la vitesse de transition.

3. **a.** Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = 90 - 445 \times 0,2\dfrac{\mathrm{e}^{-0,2(x-416)}}{1+\mathrm{e}^{-0,2(x-416)}}$

b. Utiliser l'expression précédente pour donner une primitive de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'aire, en unités d'aire, limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 380$ et $x = 550$.

Cette aire correspond à la quantité d'énergie absorbée par le verre durant la transition sombrelclair.

Exercice 2 **11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une entreprise fabrique et distribue un produit de consommation courante en grande quantité.

A. Lois de probabilités

1. On considère un stock important de produits fabriqués par l'entreprise pendant un mois. On note E l'évènement : « un produit prélevé au hasard dans ce stock est défectueux ». On suppose que $P(E) = 0,05$.

   On prélève au hasard 40 produits dans le stock pour vérification. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 40 produits.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de produits de ce prélèvement qui sont défectueux.

   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité qu'aucun produit de ce prélèvement ne soit défectueux. Donner le résultat arrondi à 10^{-3}.

   c. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Donner le paramètre λ, de cette loi de Poisson.

   d. On note X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ, est la valeur obtenue au c.

   – Donner, avec la précision permise par la table, la probabilité de l'évènement « $X_1 \leqslant 4$ ».
   – En déduire la probabilité qu'il y ait plus de quatre produits défectueux dans le prélèvement.

2. On prélève au hasard 400 produits dans le stock pour vérification. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 400 produits.

   On considère la variable aléatoire Y, qui à tout prélèvement ainsi défini associe le nombre de produits défectueux de ce prélèvement, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(400\ ;\ 0,05)$.

   On admet que la loi de Y peut être approchée par la loi normale de moyenne 20 et d'écart type $4,4$.

   a. Justifier les paramètres de cette loi normale.

   b. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(20\ ;\ 4,4)$. En utilisant cette variable aléatoire, calculer la probabilité qu'il y ait au plus 30 produits défectueux dans le prélèvement, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 30,5)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-3}.

B. Intervalle de confiance

On s'intéresse dans cette partie à la proportion inconnue p de produits dans le stock présentant une erreur d'étiquetage.
Pour cela, on prélève au hasard et avec remise 100 produits dans le stock.
Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des produits présentant une erreur d'étiquetage. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.
Pour l'échantillon prélevé, on constate que 6 produits présentent une erreur d'étiquetage.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 90 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.

C. Probabilités conditionnelles et suites

L'entreprise décide de réaliser une campagne publicitaire dans une région donnée, pendant quelques semaines, afin d'assurer la promotion du produit de consommation courante qu'elle fabrique.

Avant le début de la campagne, la proportion de consommateurs du produit est de 25 %. L'impact de campagne est le suivant :

– 97 % des consommateurs du produit une semaine donnée restent consommateurs la semaine suivante ;
– 15 % des non consommateurs du produit une semaine donnée deviennent consommateurs la semaine suivante.

On interroge au hasard un individu dans la région. Tous les individus ont la même probabilité d'être interrogés.
On note C_0 l'évènement : « l'individu est consommateur du produit la semaine précédant le début de la campagne publicitaire » et p_0 la probabilité de l'évènement C_0.
Pour tout entier naturel n non nul, on note C_n l'évènement : « l'individu est consommateur du produit la semaine n » et p_n la probabilité de l'évènement C_n.

1. Donner, à l'aide de l'énoncé :

a. la probabilité p_0 ;

b. pour tout entier naturel n, les probabilités conditionnelles $P_{C_n}(C_{n+1})$ et $P_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$.
(On rappelle que $P_A(B)$ désigne la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé.)

2. Justifier que la probabilité que l'individu interrogé soit consommateur du produit la semaine 1 est égale à $0,355$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,82p_n + 0,15$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = p_n - \dfrac{5}{6}$.

a. Montrer que la suite de terme général u_n est une suite géométrique. Calculer u_n puis p_n en fonction de n.

b. Quelle est la limite de la suite $\left(p_n\right)$?
Ce nombre représente la proportion maximale de consommateurs que peut envisager l'entreprise à l'issue de la campagne promotionnelle.