BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

A. P. M. E. P.

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

Le GROUPEMENT E de 2001 à 2010

2001 3

2002 4

2003 6

2004 7

2005 9

2006 12

2007 14

2008 16

2009 18

2011 25

Brevet de technicien supérieur session 2001
Groupement E

Exercice 1 **12 points**

Soit f la fonction numérique de la variable x définie, pour tout x élément de $[-1~;~3]$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

Soit $(\mathscr{P})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. **a.** Déterminer la dérivée de f

   b. Étudier le signe de cette dérivée.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur $[-1~;~3]$.

   d. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$									

   e. Construire la courbe $(\mathscr{P})$ et placer les points A$(-1~;~-1)$, B$(3~;~-1)$ et C$(7~;~-1)$.

2. **a.** Montrer que l'aire en cm^2 du domaine (M) limité par $(\mathscr{P})$ et le segment [AB] est égale à

$$I = \int_{-1}^{3} [f(x) + 1]\,\text{d}x.$$

   b. Calculer l'aire du domaine (M) au mm^2 près.

3. **a.** Construire l'image (M_1) de (M) par la symétrie de centre B.

   b. Construire l'image (M_2) de la réunion de (M) et (M_1) par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$.

   c. Construire l'image (M_3) de la réunion de (M), (M_1) et (M_2) par la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   d. Déterminer l'aire globale de la figure obtenue.

Exercice 2 **8 points**

Soient (EFGH) un carré de côté 6 cm, D le point du segment [EF] tel que ED = 2 cm et J le milieu de [FG].

1. Construire le point K de [HG] tel que $\widehat{\text{DIK}} = 67°$.
2. **a.** Calculer la distance DI.

   b. Calculer l'angle $\widehat{\text{DIF}}$ (donner sa mesure au degré près).

   c. En déduire l'angle $\widehat{\text{KIG}}$.
3. **a.** Calculer la distance KI.

   b. Calculer l'aire du triangle DIK. Donner sa mesure au mm^2 près.
4. **a.** Calculer la distance KD.

   b. Calculer l'angle $\widehat{\text{KDI}}$. Donner sa mesure au degré près.

Brevet de technicien supérieur session 2002 - Groupement E

Exercice 1 **12 points**

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;5]$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 24x\right)$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthononné d'unité 1 cm.

   a. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[0\,;5]$.

   c. Dresser le tableau des variations de f.

   d. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'origine O du repère.

   e. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $g(x) = -x^2 + ax + b$.
Déterminer les réels a et b sachant que la courbe représentative de g passe par l'origine O du repère et par le point A de coordonnées $(5\,;5)$.

3. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\ 5]$ par $h(x) = -x^2 + 6x$.

   a. Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h.
Étudier le signe de $h'(x)$ lorsque x varie dans $[0\,;5]$.

   b. Dresser le tableau des variations de h.

   c. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ ont, en O, la même tangente T.

   d. Construire la courbe $\mathscr{C}_h$ dans le même repère que précédemment.

4. Soit $\mathscr{S}$ la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$. Calculer l'aire de $\mathscr{S}$ en cm^2 ; on en donnera la valeur exacte et une valeur arrondie au centième.

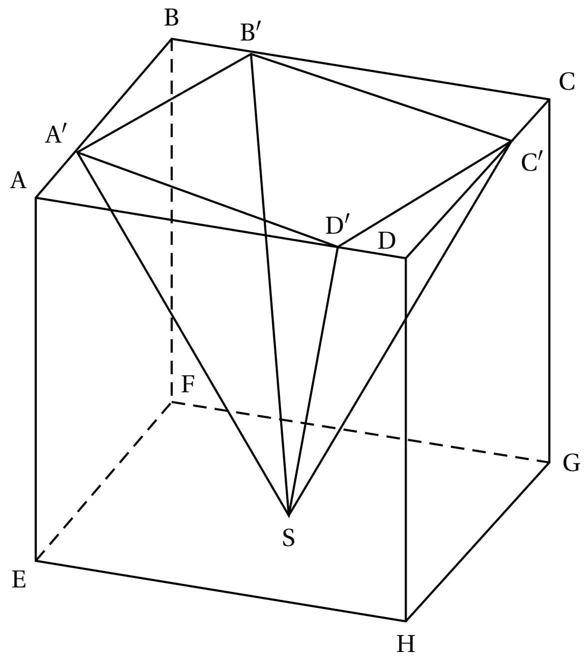
5. Construire les images $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_h$, de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$, par la rotation de centre O et d'angle 90 ° dans le sens direct (c'est à dire inverse des aiguilles d'une montre).
Construire ensuite les images des quatre courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_h$, $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_h$ par la symétrie de centre O.

Exercice 2 **8 points**

Toutes les mesures de longueur sont en cm et celles de volume en cm^3.
On considère la figure ci-contre, dans laquelle :

- ABCDEFGH est un cube d'arête 6.
- On a placé :
  - A$'$ sur [AB] tel que AA$'$ = x ;
  - B$'$ sur [BC]tel que BB$'$ = x ;
  - C$'$ sur [CD] tel que CC$'$ = x ;
  - D$'$ sur[DA] tel que DD$'$ = x,

  où x est un nombre réel de l'intervalle [0 ; 6]
  (On sait alors que A$'$B$'$C$'$D$'$ est un carré)
- On note S le centre du carré EFGH



1. Montrer que le volume noté $V(x)$ de la pyramide SA$'$B$'$C$'$D$'$ est $V(x) = 4\left(x^2 - 6x + 18\right)$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est égal à $\dfrac{1}{3}b \times h$ où b désigne l'aire de sa base et h la mesure de sa hauteur.

2. On prend maintenant $x = 2$.

a. Calculer alors les mesures, arrondies au centième, des arêtes de la pyramide.

b. Calculer ensuite la mesure en degré, arrondie au centième, de l'angle $\widehat{\text{A}'\text{SC}'}$.

Brevet de technicien supérieur session 2003 - Groupement E

Exercice 1 **13 points**

Soit la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$g(x) = ax^3 + bx + c \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ désignent trois nombres réels.}$$

1. Déterminer les réels a, b et c sachant que la courbe représentative de g passe par les points A(0 ; 2) et B(2 ; 14) et que $g'(1) = 5$, où g' désigne la fonction dérivée de g.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonetion f dans un repère orthogonal d'unité 1 cm pour l'axe des abscisses et 0,5 cm pour l'axe des ordonnées.

a. Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.

c. Dresser le tableau des variations de f sur cet intervalle.

d. Tracer la partie Ω de la courbe $\mathscr{C}$, correspondant à l'intervalle $[-2 ; 2]$, après avoir recopié et rempli le tableau suivant :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

3. **a.** Placer sur la courbe Ω les points A(0 ; 2), B(2 ; 14) et le point C d'abscisse -2.

b. Déterminer une équation de la droite (AB).

c. Montrer que le point C appartient à la droite (AB).

4. Calculer l'aire, exprimée en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe Ω, la droite (AB) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
5. Construire l'image Ω_1 de Ω par la symétrie orthogonale d'axe la droite (AB).
6. Soit Ω_2 la réunion des courbes Ω et Ω_1. Construire l'image Ω_3 de Ω_2 par la rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens direct (c'est à dire celui inverse des aiguilles d'une montre).
7. Calculer l'aire du motif obtenu après ces transformations.

Exercice 2 **7 points**

La figure est à faire à l'échelle $\dfrac{1}{10}$.

1. Construire un triangle ABC tel que : AC = 1 mètre, $\widehat{\text{BAC}} = 40°$ et $\widehat{\text{ACB}} = 25°$.
2. Soit D le milieu du segment [AC]. Construire le triangle ADE tel que $\widehat{\text{DAE}} = 85°$, $\widehat{\text{ADE}} = 50°$ et tel que E et B soient de part et d'autre du segment [AC].
3. Calculer les valeurs arrondies au mm des longueurs AE et AB.
4. Calculer les valeurs arrondies au cm^2 des aires des triangles ABC et ADE.
5. **a.** Construire l'image de la figure ABCDE par la symétrie orthogonale d'axe (AE). On obtient alors le contour d'un cerf-volant à recouvrir de tissu.

b. Calculer la valeur arrondie au **dm^2**, de la surface de tissu nécessaire au recouvrement de la structure de ce cerf-volant.

Brevet de technicien supérieur session 2004 - Groupement E

Exercice 1 **10 points**

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

2. Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $h(x) = ax^2 + bx$ où a et b sont deux nombres réels donnés.

Déterminer les réels a et b pour que la représentation graphique de la fonction h passe par le point A de coordonnées $(1\,;\,1)$ et admette en ce point une tangente horizontale, c'est à dire parallèle à l'axe des abscisses.

3. Soit la fonction g définie sur l'intcrsalle $[0\,;\,2]$ par : $g(x) = -x^2 + 2x$.

Déterminer g', fonction dérivée de g. Étudier son signe et donner le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

4. Soit un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique : 1 cm et dont on placera l'origine au centre dc la feuille. Construire dans ce repère la courbe $\mathscr{C}_1$ représentative de la fonction f et la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de la fonction g.

5. On appelle $\mathscr{D}$ le domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Calculer l'aire de ce domaine $\mathscr{D}$ en cm^2 en valeur exacte, puis en valeur approchée à 10^{-2}, près.

6. Construire le domaine $\mathscr{D}_1$, symétrique du domaine $\mathscr{D}$ par rapport à l'origine O du repère.

Construire le domaine $\mathscr{D}_1$, image, par la rotation de centre O et d'angle 90 °, de la réunion des deux domaines $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$.

Exercice 2 **10 points**

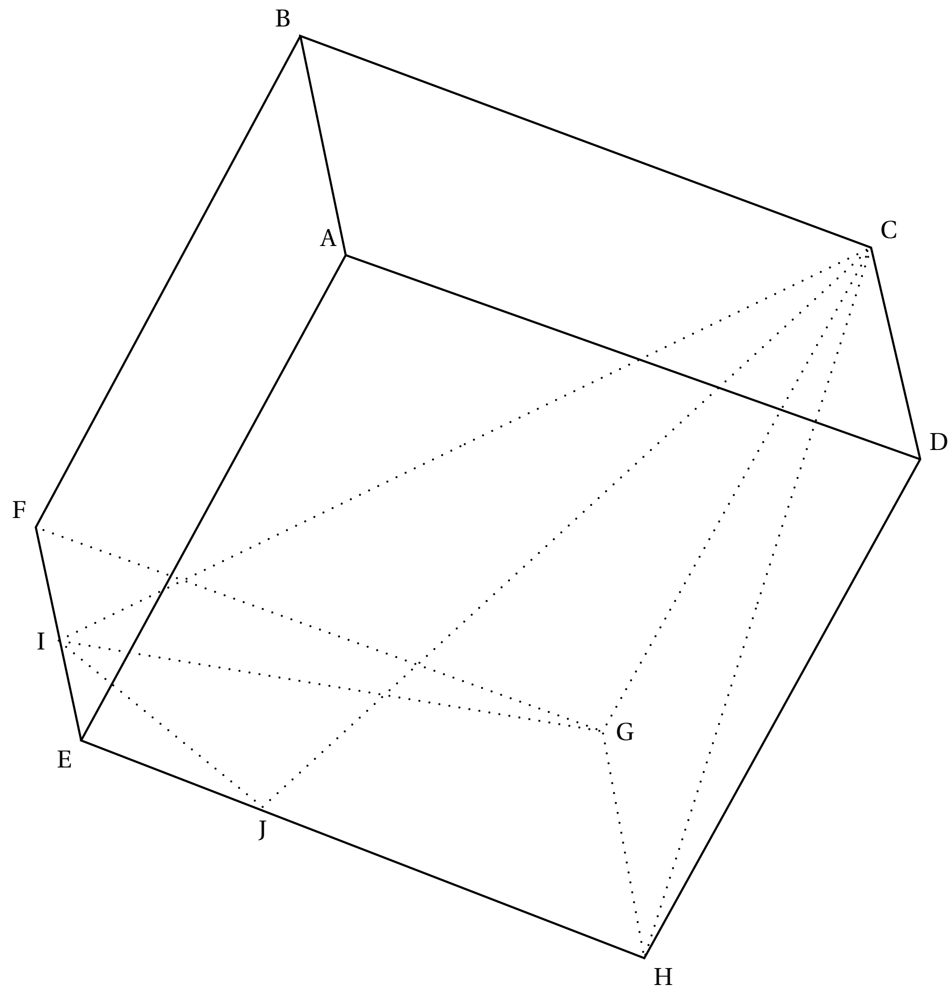
On dispose d'un cube ABCDEFGH, dessiné ci-dessous, dont l'arête mesure 6 cm.
Soit I le milieu du segment [FF] et J le point du segment [EH] tel que EJ = 2 cm.

On considère la pyramide CIJHG.

1. Calculer le volume V de la pyramide CIJHG.

On rappelle que le volume d'une pyramide est $\dfrac{1}{3}b \times h$ où b désigne l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

2. Calculer la longueur de toutes les arêtes de cette pyramide CIJHG.
3. Calculer la valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{\text{JIC}}$.
4. Calculer l'aire latérale (c'est à dire la somme des aires des cinq faces) de cette pyramide CIJHG.


B
A
C
D
F
I
G
E
J
H

Brevet de technicien supérieur
session 2005 - Groupement E

Exercice 1 **10 points**

Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère la courbe (Ω) définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 5t^2 \\ y(t) & = & -10t^2+10t+1 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un paramètre réel appartenant à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

1. Quelles sont les coordonnées du point A de la courbe (Ω) correspondant à $t = 0$? Même question pour le point S de (Ω) obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que le point B de coordonnées $(5\,;\,1)$ est un point de la courbe (Ω).
3. Dresser le tableau de variations de la fonction x sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
4. On se propose d'étudier les variations de la fonction y sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   a. Calculer y' où y' désigne la fonction dérivée de y.
   b. Étudier le signe de $y'(t)$.
   c. Dresser le tableau des variations de y.
5. Regrouper tous les résultats obtenus en un seul tableau donnant, en fonction de t, les signes de $x'(t)$ et de $y'(t)$ et les variations de x et de y.
6. Montrer que la tangente en A à la courbe (Ω) est parallèle à l'axe des ordonnées.
7. Montrer que la tangente en S à la courbe (Ω) est parallèle à l'axe des abscisses.
8. Soit le point C(0 ; 6) Montrer que la tangente en B à la courbe (Ω) est la droite (BC).
9. Dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ placer les points A, B et S, tracer les tangentes à (Ω) en ces points puis tracer la courbe (Ω).
10. Tracer l'image (Ω')de la courbe (Ω) par la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BC).

Exercice 1 **10 points**

Le plan ($\mathscr{P}$) est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité est le centimètre.
La figure de l'annexe 1 (qui n'est pas dessinée à l'échelle) a été réalisée de la manière suivante :
On a tracé le cercle (Γ) de centre O de rayon 6 et les points A(0 ; 6) et B(3 ; 0) et on a complété avec les points :

- C qui est l'un des points d'intersection du cercle de centre B et de rayon BA avec l'axe des abscisses
- et E qui est l'un des points d'intersection du cercle (Γ) et du cercle de centre A et de rayon AC.

1. Calculer les longueurs AB, OC et AC. On donnera les valeurs exactes puis arrondies au mm.
2. On utilisera les valeurs exactes trouvées au **1.**.
   a. Montrer que $\cos\left(\widehat{AOE}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
   b. Calculer l'aire du triangle AIDE, on donnera la valeur exacte puis arrondie au mm^2.

3. On admettra que l'angle $\widehat{\text{AOE}}$ mesure exactement 72 °.

Soit r la rotation de centre O et d'angle 72 °dans le sens trigonométrique c'est à dire inverse de celui des aiguilles d'une montre.

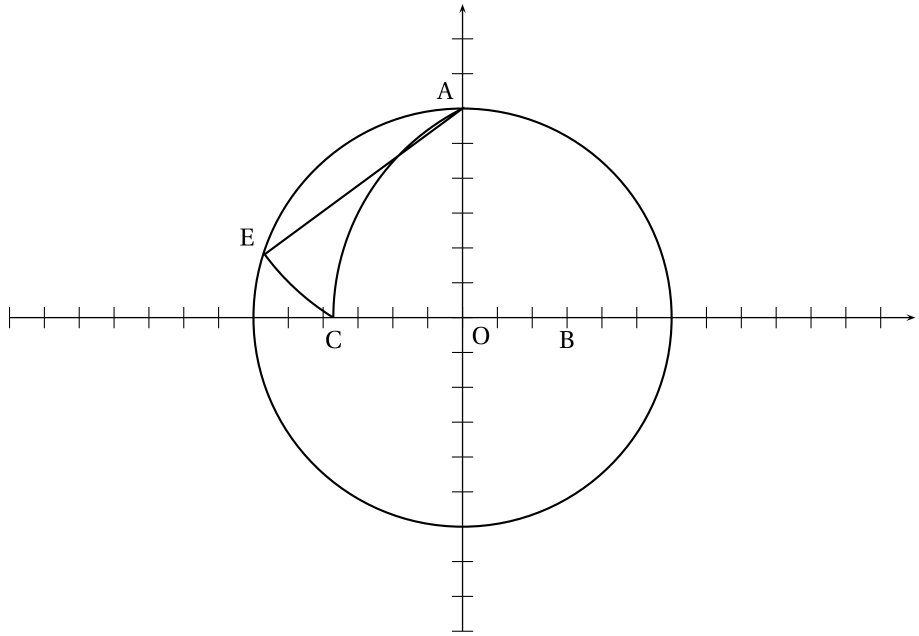
a. Quelle est l'image de A par r ? Justifier.

b. Placer sur l'annexe 1, **que vous remettrez avec votre copie**, l'image F de E par r, puis l'image G de F par r et enfin l'image H de G par r.

c. Quelle est l'image de H par r ? Justifier. Quelle est la nature du polygone AEFGH ? Justifier.

4. Calculer l'aire du polygone AEFGH ; on donnera la valeur exacte puis arrondie au mm^2.

5. Calculer le périmètre du polygone AEFOH ; on donnera la valeur exacte puis arrondie au mm.


A
E
C
O
B

Brevet de technicien supérieur
Groupement E session 2006

Exercice 1 **12 points**

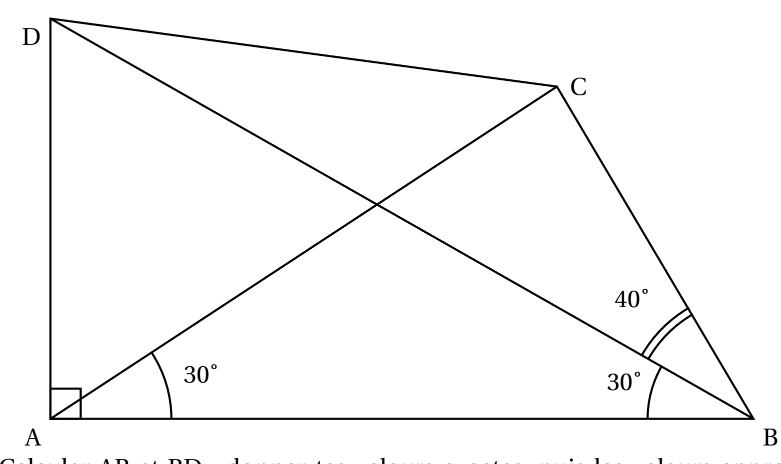
Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm, on considère la courbe $\mathscr{C}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x &=& f(t) &=& -t^3+3t \\ y &=& g(t) &=& -2t^3-\dfrac{3}{2}t^2+3t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

1. Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$ ou f' et g' sont les fonctions dérivées respectives des fonctions f et g.
2. Étudier les signes respectifs de $f'(t)$ et $g'(t)$ lorsque t varie dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
3. Rassembler les résultats dans un tableau de variations unique.
4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en chacun des trois points O, A, B obtenus respectivement pour $t = 0$, $t = 0,5$ et $t = 1$.
5. Placer les points O, A, B, tracer avec précision, sur une feuille de papier millimétré, la tangente en chacun des points, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 2 **8 points**

On considère le quadrilatère ABCD où : AB = 10 cm, $\widehat{\text{BAD}} = 90^\circ$, $\widehat{\text{CAB}} = 30^\circ$, $\widehat{\text{ABD}} = 30^\circ$ et $\widehat{\text{DBC}} = 40^\circ$ (voir la figure).



1. Calculer AB et BD : donner tes valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies au millimètre.
2. Calculer AC et BC : donner les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies au millimètre.
3. En déduire DC : préciser la formule utilisée et donner la valeur approchée arrondie au millimètre.

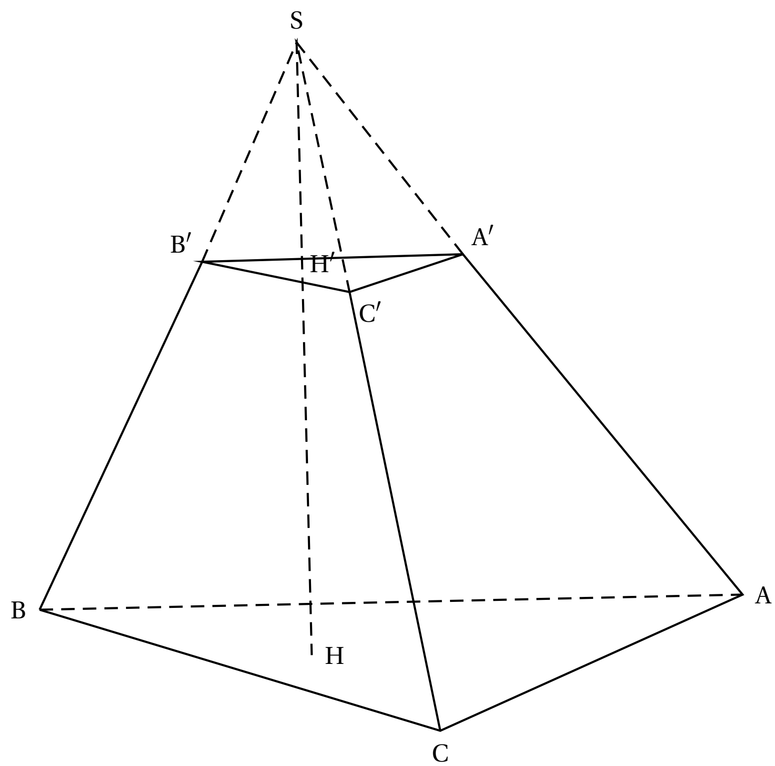
4. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du quadrilatère ABCD : préciser la méthode utilisée et donner la valeur approchée arrondie au millimètre cané.

La méthode utilisée dans cet exercice pour le calcul de DC *peut être utilisée pour calculer, à partir de deux points* A *et* B *situés sur une côte, la distance séparant deux points* D *et* C *situés en mer.*

Brevet de technicien supérieur
Groupement E session 2007

Exercice 1 **7 points**

L'objectif de cet exercice est de déterminer le volume du pied d'une table de salon composée d'un plateau carré et d'un pied en forme de tétraèdre tronqué. Le pied de cette table est donc un tétraèdre auquel on a enlevé la partie supérieure (voir figure).



On donne BC = 30 cm, AC = 45 cm, AB =60 cm et la hauteur SH = 81 cm.

1. **a.** Calculer l'angle $\widehat{C}$ du triangle ABC. Arrondir au degré.

   b. Calculer l'aire du triangle ABC. Arrondir au cm^2.

   c. Calculer le volume du tétraèdre SABC. Arrondir au cm^3.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3}B \times h.$$

   où B est l'aire de la base et h la hauteur du tétraèdre.

2. Les plans (ABC) et (A′B′C′) sont parallèles et la hauteur du tétraèdre SA′B′C′ est SH′ = 27 cm. On donne B′C′ = 10 cm, A′C′ = 15 cm et A′B′ = 20 cm.
   Calculer le volume V' du tétraèdre SA′B′C′. Arrondir au cm^3.

3. Déduire des questions précédentes le volume du pied de cette table.

Exercice 2 **13 points**

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère la courbe $\mathscr{C}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & \dfrac{5}{1+t^2} \\ y & = & g(t) & = & t^2-3t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [-2~;~3].$$

1. Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$ ou f' et g' sont les fonctions dérivées respectives des fonctions f et g.

2. Étudier les signes respectifs de $f'(t)$ et $g'(t)$ lorsque t varie dans l'intervalle $[-2~;~3]$.

3. Rassembler les résultats dans un tableau de variations unique.

4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en chacun des quatre points E, P, O et R obtenus respectivement pour $t=-2$, pour $t=0$, pour $t=1,5$ et pour $t=3$.

5. Placer les points E, F, G et H et tracer avec précision sur une feuille de papier millimétré la tangente en chacun de ces points, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Brevet de technicien supérieur
Groupement E session 2008

Exercice 1 **8 points**

On considère le triangle ABC tel que AC = 24 cm, BC = 28 cm et AB = 40 cm.

1. Faire un dessin à l'échelle $\dfrac{1}{4}$.
2. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ACB}}$ du triangle ABC.
   Arrondir à 10^{-1}.
3. On admet pour la suite que l'angle $\widehat{\text{ACB}}$ a une mesure de 100,3°.
   Calculer l'aire S du triangle ABC. Arrondir à 10^{-1}.
4. Pour la suite, on admet que $S = 330,6\text{ cm}^2$.
   Calculer l'aire S' du triangle dessiné à la première question.
5. On appelle H le pied de la hauteur issue du point C. Placer H sur le dessin.
   Donner l'expression de l'aire du triangle ABC en fonction de CH.
   En déduire CH.
6. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.
   Arrondir à 10^{-1}.
7. En utilisant un résultat admis au 3. et le résultat obtenu au 6., calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{\text{CBA}}$.
8. On appelle I le point situé sur la droite (CH) à l'extérieur du triangle ABC et tel que IH = 8 cm (sur le dessin, compte tenu de l'échelle, IH = 2 cm).
   Placer le point I et dessiner le triangle A′B′C′, image du triangle ABC par la rotation de centre I et d'angle −90°.

Exercice 2 **12 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique sur l'axe des abscisses est 1 cm et l'unité graphique sur l'axe des ordonnées est 2 cm. On considère la courbe $\mathscr{C}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & t^3+t^2-6t+2 \\ y & = & g(t) & = & t^2+t-4 \end{array}\right.$$

où t appartient à l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.

1. Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$ où f' et g' sont les fonctions dérivées respectives des fonctions f et g.
2. Résoudre dans $[-3\ ;\ 2]$ l'équation $g'(t) = 0$.
3. On admet que l'équation $f'(t) = 0$ a deux solutions : t_1 et t_2,où $t_1 \approx 1,1$ et $t_2 \approx -1,8$. Pour quelles valeurs de t la courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente horizontale ?
   Pour quelles valeurs de t la courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes verticales ?
4. On donne le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont arrondies à 10^{-1}.

t	-3	$-2,6$	$t_2 \approx -1,8$	-1	$-0,5$
$f(t)$	2	6,8	10,2	8	5,1
$g(t)$	2	0,2	$-2,6$	-4	$-4,3$

t	1	$t_1 \approx 1,1$	1,6	2
$f(t)$	-2	$-2,1$	$-0,9$	2
$g(t)$	-2	$-1,7$	0,2	2

Calculer $f(0)$, $g(0)$, $f(-2)$ et $g(-2)$.

5. Établir, sans explication, le tableau des variations conjointes de f et g.

6. On observe que les deux valeurs -3 et 2 du paramètre t correspondent à un même point E de la courbe $\mathcal{C}$.

a. Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{V}$ de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point E obtenu pour $t = -3$.

b. Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{V}'$ de la tangente T' à la courbe $\mathcal{C}$ au point E obtenu pour $t = 2$.

7. En respectant l'unité graphique imposée, !meer dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ la courbe $\mathcal{C}$, ses tangentes verticales, sa tangente horizontale et les deux tangentes T et T'.

Brevet de technicien supérieur
Groupement E et Design d'espace session 2009

Exercice 1 **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère la courbe $\mathscr{C}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & t^2-4t+1 \\ y & = & g(t) & = & \dfrac{1}{t} \end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0{,}2\,;\,5].$$

1. Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$ où f' et g' sont les fonctions dérivées respectives des fonctions f et g.

2. Étudier les signes respectifs de $f'(t)$ et $g'(t)$ lorsque t varie dans l'intervalle $[0{,}2\,;\,5]$.

3. Rassembler les résultats dans un tableau de variations unique pour les fonctions f et g.

4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en chacun des points A et B obtenus respectivement pour $t = 0,5$ et $t = 2$.

5. Dans le repère défini ci-dessus, placer les points A et B, tracer avec précision la tangente en chacun de ces points, puis la courbe $\mathscr{C}$.

La courbe $\mathscr{C}$, définie à l'aide d'un paramètre dans cet exercice, peut aussi être obtenue comme courbe représentative de la fonction associant x à y, ce qui n'est pas demandé ici.

Exercice 2 **10 points**

Le solide représenté en annexe est un solide formé de deux pyramides de base carrée, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux de côté 9 cm.

1. On rappelle que la projection orthogonale H de E sur le plan ABCD est le milieu du segment [AC].

   a. Calculer la valeur exacte de EH.

   b. Calculer le volume V de ce solide. Arrondir au mm^3.

Le volume v d'une pyramide de hauteur h, dont l'aire de la base est a, est : $v = \dfrac{1}{3}ah$.

2. **a.** Sur la figure donnée en annexe, placer les quatre points suivants :

le point M du segment [EA] tel que E$M = \dfrac{1}{3}$ EA, 3

le point N du segment [EB] tel que EN = EM,

le point P du segment [EC] tel que EP = EM,

le point Q du segment [ED] tel que EQ = EM.

   b. Donner sans justification la nature du quadrilatère $MNPQ$.

   c. Calculer le volume V' de la pyramide E$MNPQ$. Arrondir au mm^3.

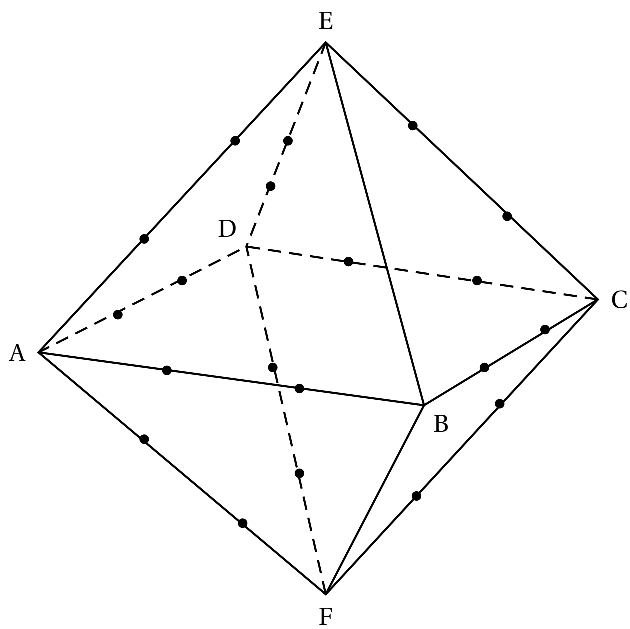
3. On enlève du solide la pyramide E$MNPQ$ et on fait de même en chacun des cinq autres sommets A, B, C, D, F.

a. Représenter sur la figure donnée en annexe chacune des faces du solide ainsi obtenu.

b. Donner sans justification le nombre de faces et la nature des deux types de faces de ce solide.

c. Calculer le volume V_1 de ce solide. Arrondir au mm^3.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



Brevet de technicien supérieur Groupement D session 2010

Exercice 1 **10 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-2t},$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0)\ :\ y' + 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-2t}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 pour $t = 0$.

B. Étude d'une fonction.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = (1 + 2t)\mathrm{e}^{-2t}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Vérifier que pour t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$: $f'(t) = -4t\mathrm{e}^{-2t}$.

   b. En déduire le signe de $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Compléter le tableau de valeurs donné en **annexe**. Arrondir à 10^{-2}.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère donné en **annexe**.

C. Application de la partie B

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide.

Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0~;~+\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(t) = 1 - f(t) = 1 - (1+2t)\mathrm{e}^{-2t},$$

où t est exprimé en heures et f est la fonction étudiée dans la **partie B**.

1. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-2}.
   - **a.** Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout d'une heure ?
   - **b.** Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?
2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75.
   - **a.** Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75 lorsque $f(t) \leqslant 0,25$.
   - **b.** En utilisant la courbe représentative de la fonction f tracée en **annexe**, déterminer graphiquement à 10^{-1} près, la durée d'utilisation du réfractomètre. On laissera les traits de construction apparents.

Exercice 2 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité des récipients cylindriques pour le laboratoire.

A. Loi normale

Le couvercle d'un récipient est conçu pour avoir un diamètre de 60 millimètres.
Il est non défectueux lorsque son diamètre, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[59,93~;~60,07]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe le diamètre, en millimètres, de son couvercle.
On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type $0,03$.
Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production ait un couvercle non défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

B. évènements indépendants

Les récipients fabriqués sont susceptibles de présenter deux défauts : un défaut au niveau de leur couvercle ou un défaut de convenance.
On prélève un récipient au hasard dans la production d'une journée.
On considère les évènements suivants :
E_1 : « le couvercle du récipient prélevé est défectueux » ;
E_2 : « le récipient prélevé présente un défaut de contenance ».
On suppose que les évènements E_1 et E_2 sont indépendants.
On admet que : $P(E_1) = 0,02$ et $P(E_2) = 0,01$.

Dans cette partie, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

1. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente les deux deux défauts.

2. a. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente au moins un des deux défauts.

   b. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée ne présente aucun des deux défauts.

C. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On prélève au hasard 50 récipients dans un stock pour vérification de leur couvercle. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 récipients.
On rappelle que la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard ait un couvercle défectueux est égale à 0,02.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 récipients, associe le nombre de récipients de ce prélèvement ayant un couvercle défectueux.

1. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, un seul récipient ait un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.
3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

   a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

   b. On désigne par Y_1 une variable aléatoire suivant la loi de ¶de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **a**.

   En utilisant la loi suivie par Y_1, calculer la probabilité qu'au plus trois récipients d'un prélèvement aient un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

D. Intervalle de confiance

Dans cette partie on s'intéresse à la contenance de chaque récipient, exprimée en centimètres cubes.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon dans un lot important.
Soit $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon prélevés au hasard et avec remise dans le lot, associe la moyenne des contenances des récipients de cet échantillon.
On suppose que $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{50}}$ avec $\sigma = 0,06$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est : $\overline{x} = 119,88$.
Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des contenances des récipients de ce lot, avec un taux de confiance supérieur ou égal à 95 %.
On arrondira à 10^{-2} les bornes de cet intervalle.

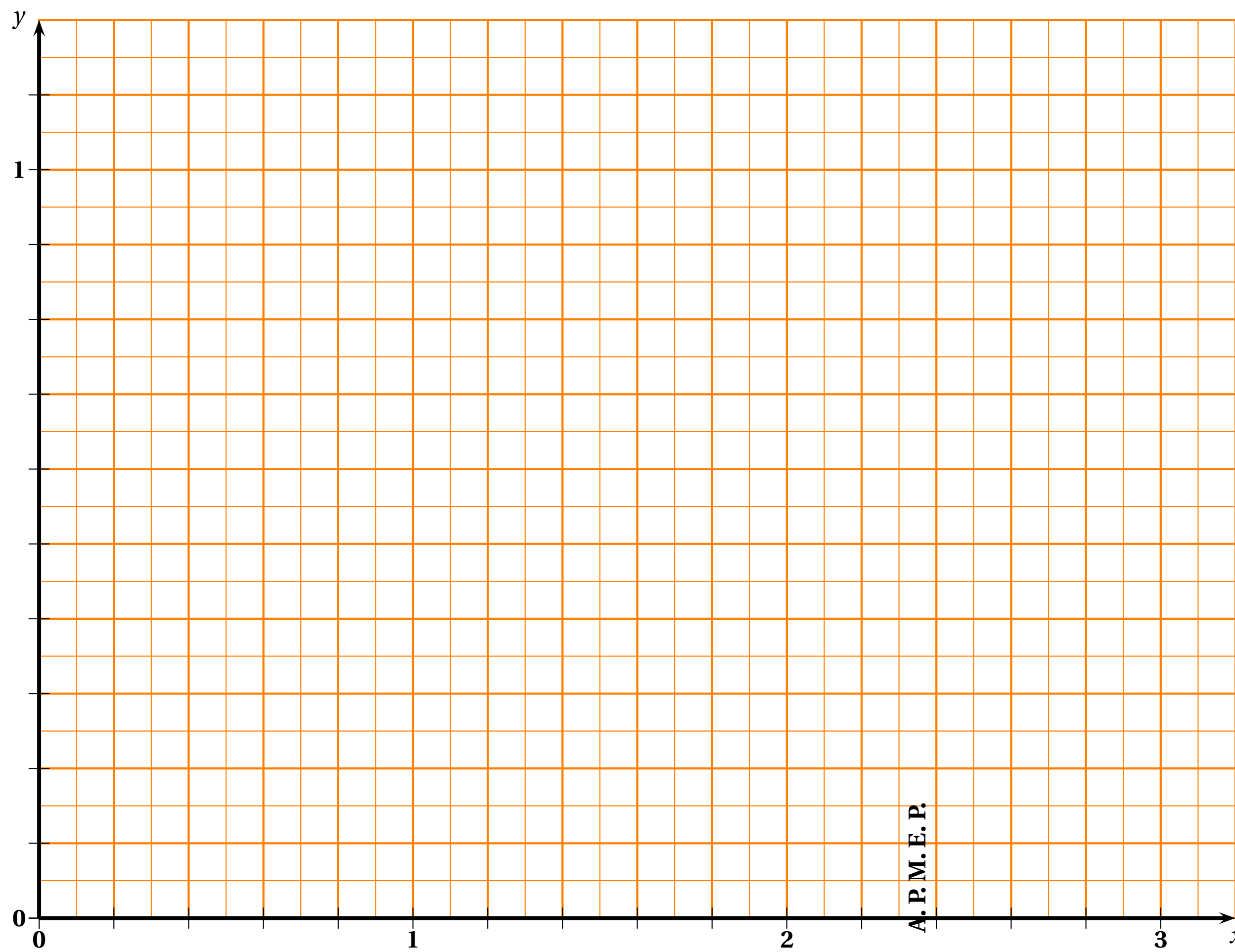
ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 1, Partie B, question 3.

1. Tableau de valeurs (arrondies à 10^{-2}) de la fonction f

x	0	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

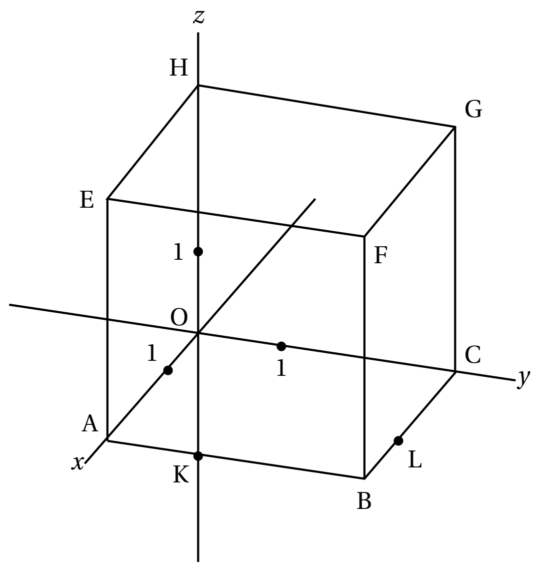
2. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$



Brevet de technicien supérieur
Groupement E et Design d'espace session 2011

Exercice 1 **10 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ d'unité graphique 1 cm.



On a représenté ci-dessus un cube ABCOEFGH d'arête 3 cm.

On appelle K le point de [AB] tel que : AK $= \dfrac{1}{3}$AB, et L le point de [BC] tel que :

BL $= \dfrac{1}{3}$BC.

A. Étude du triangle KLF

1. Donner les coordonnées des points B, F, K et L.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{FK}}$ et $\overrightarrow{\text{FL}}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{FK}}\,(0\,;\,-2\,;\,-3)\quad\text{et}\quad\overrightarrow{\text{FL}}\,(-1\,;\,0\,;\,-3).$$

3. **a.** Calculer les valeurs exactes de $\|\overrightarrow{\text{FK}}$; $\|\overrightarrow{\text{FL}}\|$ et $\overrightarrow{\text{FK}}\cdot\overrightarrow{\text{FL}}$.

   b. En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{KFL}}$.
4. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{FK}}\wedge\overrightarrow{\text{FK}}$.

   b. En déduire que l'aire du triangle KFL est égale à 3,5 cm^2.

B. Étude du solide tronqué AKLCOEFGH

On enlève au cube ABCOEFGH de départ, le tétraèdre KBLF. On obtient ainsi le solide tronqué AKLCOEFGH.

1. Donner sans justification la nature des faces du solide tronqué AKLCOEFGH.
2. Montrer que l'aire totale de toutes les faces du solide AKLCOEFGH est égale à 52 cm^2.
3. Calculer le volume du solide AKLCOEFGH.

   (On rappelle que le volume de la pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}B\times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.)

Exercice 2 **10 points**

On utilise un modèle de Bézier pour créer un logo.

Dans le plan muni d'un repère orthononnal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère les points :

$$\mathrm{P}_0(0\,;\,0) \quad ; \quad \mathrm{P}_1(1\,;\,0) \quad ; \quad \mathrm{P}_2(1\,;\,1) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_3(0\,;\,2).$$

La courbe de Bézier $\mathscr{C}$ définie par les quatre points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 est l'ensemble des points $M(t)$ tels que pour tout t de l'intervalle $[0\,;\ 1]$:

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M}\,(t) = (1-t)^3\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + t^3\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}.$$

1. Démontrer que les coordonnées x et y des points $M(t)$ de cette courbe ont pour expression :

$$x = f(t) = -3t^2 + 3t \quad \text{et} \quad y = g(t) = -t^3 + 3t^2.$$

2. Étudier les variations des fonctions f et g, définies sur $[0\,;\ 1]$ par :

$$f(t) = -3t^2 + 3t \quad \text{et} \quad g(t) = -t^3 + 3t^2.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. **a.** Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en chacun des points P_0, obtenu pour $t = 0$, $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$, obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$ et P_3, obtenu pour $t = 1$.

Sur une feuille de papier millimétré, placer ces points dans le repère défini ci-dessus et tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ correspondantes.

b. Placer le point P_2 sur la figure.

Que représente le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$ pour la courbe $\mathscr{C}$?

c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.