A. P. M. E. P.

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

Le GROUPEMENT D de 2001 à 2011

Durée : 2 heures

Spécialité	Coefficient
Analyses Biologiques	1
Bioanalyses et contrôles	2
Biotechnologie	1,5
Hygiène Propreté Environnement	2
Métiers de l'eau	1,5
Peintures, encre et adhésifs	2
Industries Plastiques à Référentiel Commun	1,5
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries	2

Métropole 2001 3
Métropole 2002 5
Métropole 2003 7
Métropole 2004 9
Métropole 2005 12
Métropole 2005 15
Métropole–Polynésie 2006 17
Métropole–Polynésie 2007 20
Métropole–Polynésie 2008 23
Métropole–Polynésie 2009 28
Métropole–Polynésie 2010 32
Métropole–Polynésie 2011 36

Brevet de technicien supérieur session 2001
Groupement D

Exercice 1 **12 points**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On se propose d'étudier l'évolution en fonction du temps des températures d'un bain et d'un solide plongé dans ce bain. Ces températures (à l'instant t) sont respectivement notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Le temps t est exprimé en seconde et les températures en ˚C.

Partie A

Les températures $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ vérifient les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl}(1)\ \alpha'(t) & = & -0,011(\alpha(t)-\beta(t))\\ (2)\ \beta'(t) & = & 0,021(\alpha(t)-\beta(t))\end{array}\right. \quad \text{avec} \left\{\begin{array}{lcl}\alpha(0) & = & 40\\ \beta(0) & = & 10\end{array}\right.$$

1. On pose $f(t)=\alpha(t)-\beta(t)$.
   a. Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $y'+0,032y=0$.
   b. Résoudre l'équation précédente.
   c. Calculer $f(0)$ et montrer que $f(t)=30e^{-0,032t}$.
2. Soit F la primitive de f qui vérifie $F(0)=0$.
   a. Exprimer $F(t)$ en fonction de t.
   b. À l'aide de la condition (2) justifier que $\beta(t)=K+0,021F(t)$ où K est une constante.
   c. Déterminer K et donner une expression de $\beta(t)$ en fonction de t.

Partie B

Pour tout t dans $[0\ ;\ +\infty[$ on pose $\left\{\begin{array}{l}\alpha(t)=\dfrac{5}{16}\left(95+33e^{\frac{-4t}{125}}\right)\\ \beta(t)=\dfrac{5}{16}\left(95-63e^{\frac{-4t}{125}}\right)\end{array}\right.$

1. Déterminer la limite de α ainsi que celle de β en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes représentatives de ces deux fonctions ?
2. Calculer la dérivée et donner les variations de chacune des fonctions α et β.
3. Construire les courbes représentatives des fonctions α et β dans un repère orthogonal (sur papier millimétré ; unités graphiques : 1 cm pour 5 secondes en abscisses et 2 cm pour 5˚C en ordonnée ; on fera varier t entre 0 et 120 secondes).
4. A partir de quel instant la différence de température entre le solide et le bain est-elle inférieure à 1˚C ?

Exercice 2 **8 points**

Un magicien prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal.
On appelle p la probabilité que le magicien donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.
Si le magicien est un imposteur on a $p = \frac{1}{2}$, sinon $p > \frac{1}{2}$.
On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.

Partie A

On suppose $p = \frac{1}{2}$ et on note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n, associe le nombre de succès du magicien.
(On arrondira les probabilités au dix millième le plus proche.)

1. Dans cette question on prend $n = 20$.
   - **a.** Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres.
   - **b.** Calculer la probabilité $P(Y = 15)$.

2. Dans cette question on prend $n = 100$. On admet que la variable aléatoire Y peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi normale.
   - **a.** Préciser les paramètres de cette loi normale.
   - **b.** Utiliser cette approximation pour calculer $P(Y > 60)$.

Partie B

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence des succès obtenus par le magicien au cours des n tirages d'une carte. On admet que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

- On construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5 %, si le magicien est un imposteur.
- On choisit comme hypothèse nulle $H_0 : p = \frac{1}{2}$, et comme hypothèse alternative $H_1 : p > \frac{1}{2}$.

1. Calculer, sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que $P\left(F \leqslant \frac{1}{2} + h\right) = 0,95$.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. Sur un échantillon de taille 100, le magicien a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque de 5 %, que le magicien est un imposteur ?

BTS : Groupement D
Session 2002

EXERCICE 1 **11 points**

Les trois parties traités indépendamment l'une de l'autre.
Pour une étude cardio-vasculaire, on effectue une perfusion lente à débit constant d'une solution marquée par un indicateur radioactif.

Partie A : Étude expérimentale

On relève l'évolution de la concentration au niveau du ventricule droit et on obtient les résultats suivants :

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i : temps en minutes	0	2	4	6	8	10	12
c_i : concentration en microgrammes par cm^3	0	54	84	100	109	114	117

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

1. On pose $z_i = \ln(120 - c_i)$. Donner les valeurs de z_i pour i variant de 1 à 7.
2. Déterminer par les méthodes des moindres carrés une équation de la droite de régression de z en t.
3. Donner une expression de la concentration c en fonction de t déduite de cet ajustement.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction c est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + 0,3y = 36.$$

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + 0,3y = 0$.
2. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de (E) et donner la fonction c solution qui vérifie $c(0) = 0$.

Partie C : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = 120\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right).$$

1. Chercher les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$; que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal (unités : 1,5 cm pour une unité en abscisse et 1 mm pour une unité en ordonnés).
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[2\,;\,12]$ et en donner une valeur approchée à une unité près.

EXERCICE 2 **9 points**

Un atelier produit en grande série des disques de diamètre nominal 25 mm.

Partie A

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque disque de la production associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ. Un disque est considéré comme valable si son diamètre est compris entre 24,90 mm et 25,08 mm, sinon il est considéré comme défectueux.

1. On suppose que $\sigma = 0,04$. Calculer la probbilité q'un disque pris au hasard dans la production soit défectueux, dans chacun des deux cas suivant :

a. $m = 25$

b. $m = 24,99$

2. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 disques de la production associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques. On admet que $\overline{X}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart type $0,04$.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 disques dans la production on souhaite construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, pour savoir si l'on peut considérer, au risque 5 % que la moyenne m des disques de la production est égale à 25.

a. Sous l'hypthèse nulle H_0 $(m = 25)$ calculer la valeur du réel d tel que : $P\left(\left|\overline{X} - 25\right| < d\right) = 0,95)$.

b. La moyenne des diamètres des 100 disques de l'échantillon prélevé dans la production est $24,994$. Quelle est la conclusion du test ?

Partie B

On suppose que 3 % des disques de laproduction sont défectueux. On prélève au hasard un lot de 60 disques dans la production ; la production étant très importante, ce prélèvement peut être assimilé à un tirage ave remise.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 60 disques, associe le nombre de disques défectueux.

1. **a.** Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième le plus proche).

2. On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson.

a. donner le paramètre de cette loi de Poisson.

b. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu 'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième le plus proche).

BTS : Groupement D session 2003

EXERCICE 1 **11 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad :\quad 4y' + y = 1\,200\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la constante réelle a telle que la fonction h_1 définie par $h_1(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $4y' + y = 0$ et en déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la fonction h solution de (E) qui vérifie $h(6) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[6\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 300(x-6)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = 75(10-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[6\ ;\ +\infty[$ et donner son tableau de variations.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. (unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 mm sur l'axe des ordonnées)

Partie C

Une société veut vendre des machines destinées à certaines entreprises. Le prix de vente minimal est fixé à 10 000 euros. Le nombre prévisible, y, de machines vendues, est fonction du prix proposé, en milliers d'euros, x. Une enquête auprès de clients potentiels a donné les résultats suivants :

x_i : Prix proposé pour une machine en milliers d'euros	10	12,5	15	17,5	20	25
y_i : Nombre prévisible de machines vendues au prix proposé	100	85	62	42	28	11

1. **a.** Représenter les six points du nuage sur le graphique de la question B4.

   b. On pose $z_i = \ln\left(\dfrac{y_i}{x_i - 6}\right)$. Donner les valeurs de z_i arrondies au millième le plus proche.

   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x ; les coefficients seront arrondis au millième le plus proche.

   d. En déduire une expression approchée de y de la forme $y = \alpha(x-6)\mathrm{e}^{\beta x}$.
2. On admet dans cette question que le chiffre d'affaires est $g(x) = xf(x)$ pour $x \geqslant 10$, où x est le prix proposé en milliers d'euros et f la fonction définie dans la partie B.

   En étudiant les variations de la fonction g déterminer pour quel prix le chiffre d'affaires est maximal et donner la valeur du maximum.

Exercice 2 **9 points**

Deux machines M_A et M_B produisent, en grande série, des objets de masse théorique 180 grammes.

Partie 1

On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un objet pris au hasard dans la production de la machine M_A (respectivement M_B) associe sa masse en grammes. On sait que X_A (respectivement X_B) suit une loi normale de moyenne m_A (respectivement m_B) et d'écart type σ_A (respectivement σ_B). Un objet est conforme si sa masse est comprise entre 178 g et 182 g.

1. On donne $m_A = 179,8$ et $\sigma_A = 1$. Calculer la probabilité qu'un objet pris au hasard dans la production de la machine M_A soit conforme.
2. On donne $m_B = 180$ et on sait que 98 % des objets fabriqués par la machine M_B sont conformes. Calculer l'écart type σ_B (résultat arrondi au centième).

Partie 2

Dans la production totale, 40 % des objets proviennent de la machine M_A et 60 % de la machine M_B. La machine M_A produit 5 % d'objets non conformes et la machine M_B en produit 2 %.

1. On prélève au hasard un objet dans la production. Calculer la probabilité que cet objet soit conforme.
2. On prélève au hasard un objet dans la production et on constate qu'il est conforme. Quelle est alors la probabilité (arrondie au millième) que cet objet provienne de la machine M_A ?

Partie 3

On admet que 96,8 % des objets de la production sont conformes. Les objets sont stockés par boîtes de vingt. On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à une boîte prise au hasard le nombre d'objets conformes de cette boîte.

1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par Y.
2. On choisit une boîte au hasard dans la production. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - tous les objets sont conformes ;
   - au moins dix-huit objets sont conformes.

Partie 4

On admet que la variable aléatoire $\overline{X}$ qui associe à un échantillon de taille 100 sa masse moyenne en grammes suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 0,092.

La valeur exacte de la masse moyenne m des objets étant inconnue, on prélève au hasard un échantillon de 100 objets dont la masse moyenne est 179,93 g . Déterminer un intervalle de confiance, au seuil de risque 10 %, de la valeur de m.

Brevet de technicien supérieur
Groupement D1 Analyses biologiques - Biochimiste
session 2004

Exercice 1 **10 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - y = 2(x+1)\mathrm{e}^x$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.
2. Déterminer les réels a et b de façon que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \left(ax^2 + bx\right)\mathrm{e}^x$$

soit une solution particulière de (E).
3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale : $f'(0) = 3$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^x = 0$).
   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $f'(x) = (x+1)(x+3)\mathrm{e}^x$.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan repéré par $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
5. Calcul d'aire :
   a. Vérifier que $F(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire l'aire exacte $\mathscr{A}$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$.
   c. Donner la valeur arrondie de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} près.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en plastique de longueur théorique 100 *mm.*
Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

Partie A : Loi normale

Une tige est considérée comme conforme pour la longueur lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, est dans l'intervalle $[99,64\ ;\ 100,36]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prise au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type $0,16$.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Déterminer le nombre réel a tel que $P(X < a) = 0,96$.

Partie B : Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, 2 % des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme.

1. Pour cette question on prend $n = 50$.
   a. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b. Calculer $P(Y = 3)$.
2. Pour cette question on prend $n = 100$. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale que l'on décide d'approcher par une loi de Poisson .
   a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson .
   b. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est le paramètre obtenu à la question 2. a. À l'aide de l'approximation de Y par Z, calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges de longueur non conforme.

Partie C : Text d'hypothèse

Un client reçoit un lot important de tiges de ce type. Il veut vérifier que la moyenne μ de l'ensemble des longueurs, en mm, des tiges constituant ce lot est égale à la longueur théorique.
On note L la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans le lot, associe sa longueur en mm. La variable aléatoire L suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $0,16$.
On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 90 tiges prélevé dans le lot, associe la moyenne des longueurs de ces tiges (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
$\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = \dfrac{0,16}{\sqrt{90}} \approx 0,017$.
Le client construit un test d'hypothèse :

- L'hypothèse nulle est $\mathbf{H}_0 : \mu = 100$.
- L'hypothèse alternative est $\mathbf{H}_1 : \mu \neq 100$.
- Le seuil de signification est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle $\mathbf{H}_0$ déterminer le réel positif h tel que :

$$P(100 - h < \overline{L} < 100 + h) = 0,95.$$

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. Le client prélève un échantillon aléatoire de 90 tiges dans la livraison et il constate que la moyenne des longueurs de l'échantillon est de 100,04 mm. Le client estime que le fournisseur n'a pas respecté ses engagements et renvoie tout le lot.

Le client a-t-il raison ? Justifier votre réponse.

Brevet de technicien supérieur
Groupement D2 session 2004

Exercice 1 **10 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad : \quad y'' - 2y' + y = 2(x+1)\text{e}^x$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' - y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2\text{e}^x$ est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\text{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha \text{e}^x = 0$.)

   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $f'(x) = (x+1)(x+3)\text{e}^x$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan repéré par $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
5. Calcul d'aire
   a. Vérifier que $F(x) = \left(x^2+1\right)\text{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire l'aire exacte $\mathscr{A}$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$.
   c. Donner la valeur arrondie de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} près.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en plastique de longueur théorique 100 *mm.*
Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

Partie A : Loi normale

Une tige est considérée comme conforme pour la longueur lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, est dans l'intervalle $[99,64\ ;\ 100,36]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prise au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type $0,16$.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Déterminer le nombre réel a tel que $P(X < a) = 0,96$.

Partie B : Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, 2 % des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme.

1. Pour cette question on prend $n = 50$.
   - **a.** Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   - **b.** Calculer $P(Y = 3)$.
2. Pour cette question on prend $n = 100$. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale que l'on décide d'approcher par une loi de Poisson .
   - **a.** Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson .
   - **b.** On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est le paramètre obtenu à la question 2. a. À l'aide de l'approximation de Y par Z, calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges de longueur non conforme.

Partie C : Text d'hypothèse

Un client reçoit un lot important de tiges de ce type. Il veut vérifier que la moyenne μ de l'ensemble des longueurs, en mm, des tiges constituant ce lot est égale à la longueur théorique.
On note L la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans le lot, associe sa longueur en mm. La variable aléatoire L suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $0,16$.
On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 90 tiges prélevé dans le lot, associe la moyenne des longueurs de ces tiges (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
$\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = \dfrac{0,16}{\sqrt{90}} \approx 0,017$.

Le client construit un test d'hypothèse :

- L'hypothèse nulle est $\mathbf{H}_0 : \mu = 100$.
- L'hypothèse alternative est $\mathbf{H}_1 : \mu \neq 100$.
- Le seuil de signification est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle $\mathbf{H}_0$ déterminer le réel positif h tel que :

$$P(100 - h < \overline{L} < 100 + h) = 0,95.$$

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. Le client prélève un échantillon aléatoire de 90 tiges dans la livraison et il constate que la moyenne des longueurs de l'échantillon est de 100,04 mm. Le client estime que le fournisseur n'a pas respecté ses engagements et renvoie tout le lot.

Le client a-t-il raison ? Justifier votre réponse.

Brevet de technicien supérieur
Groupement D session 2005

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, un certain type dc comprimés dont la masse est exprimée en milligrammes.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

Un comprimé de ce type est considéré comme acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[580\,;\,620]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque comprimé prélevé au hasard dans la production, associe sa masse.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne 600 et d'écart type 9.

1. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard dans la. production soit acceptable pour la masse.
2. Déterminer le nombre réel positif α tel que : $P(600-\alpha \leqslant X \leqslant 600+\alpha) = 0,90$.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale

On admet que 3 % des comprimés d'un lot important ne sont pas acceptables pour la masse. On prélève au hasard N comprimés de ce lot pour vérification de la masse. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de N comprimés.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de N comprimés, associe le nombre de comprimés non acceptables pour la masse.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Dans cette question, on prend $N = 10$.
   a. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, un comprimé exactement, ne soit pas acceptable pour la masse.
   b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, un comprimé au moins, ne soit pas acceptable pour la masse.
3. Dans cette question, on prend $N = 50$.
   a. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   b. On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au **a.**. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 comprimés, au plus 2 comprimés ne soient pas acceptables pour la masse.
4. Dans cette question, on prend $N = 1\,000$. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type $5,39$. On note Z_2 une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type $5,39$.
   a. Justifier les paramètres de cette loi normale.

b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 1 000 comprimés, au plus 25 comprimés ne soient pas acceptables pour la masse, c'est à dire calculer $P(Z_2 \leqslant 25,5)$.

C Intervalle de confiance

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse d'un stock important de comprimés. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 comprimés dans le stock. Soit $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 comprimés prélevés au hasard et avec remise dans le stock, associe la moyenne des masses des comprimés de cet échantillon.
On suppose que $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$ avec $\sigma = 9$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est 502. Déterminer un intervalle de confiance centré sur de la moyenne inconnue μ des masses des comprimés du stock considéré, avec le coefficient de confiance 95 %.

Exercice 2 **8 points**

On décide de mesurer en fonction du temps la quantité de principe actif d'un médicament présent dans le sang d'un groupe de patients en traitement dans un hôpital. À l'instant t, exprimé en minutes, on note $q(t)$ la quantité exprimée en milligrammes de ce principe actif, contenue dans le sang d'un patient.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad 4y' + y = -0,002t + 2,992$$

où y est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0 ; 1\,440]$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(\text{E}_0) \quad 4y' + y = 0$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $[0 ; 1\,440]$ par $g(t) = at + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution q de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $q(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

On admet dans cette partie que, pour tout t de $[0 ; 1\,440]$,

$$q(t) = 3 - 0,002t - 3\text{e}^{-\frac{t}{4}}.$$

On rappelle que le temps t est exprimé en minutes.

1. **a.** Calculer $q'(t)$ pour tout t de $[0 ; 1\,440]$.
   b. Résoudre dans $[0 ; 1\,440]$ l'inéquation $q'(t) \geqslant 0$.
   c. En déduire le sens de variation de q sur $[0 ; 1\,440]$.
   La fonction q admet un maximum pour $t = t_0$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de t_0 et $q(t_0)$.
2. Calculer la quantité de principe actif restant dans le sang d'un patient 24 heures après l'injection du médicament. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
3. Démontrer que la valeur moyenne V_m de la fonction q sur $[0 ; 1\,440]$ est :

$$V_m = \frac{1}{1\,440}\left(2\,234,4 + 12\text{e}^{-360}\right).$$

Brevet de technicien supérieur
Groupement D session 2006

Exercice 1 **12 points**

Les quatre parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine produit de l'eau minérale en bouteille. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est calcaire.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont, sauf indication contraire, à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un stock important de bouteilles, 7,5 % des bouteilles contiennent de l'eau calcaire.
On prélève au hasard 40 bouteilles dans le stock pour vérification du taux de calcium. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 40 bouteilles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent de l'eau calcaire.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi Poisson.
3. On désigne par X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **2.**.
   Calculer $P(X_1 \leqslant 4)$.
   Traduire le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

B. Loi normale

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source 1 » et « source 2 ». On rappelle que si le taux de calcium dépasse 6,5 mg par litre dans une bouteille, l'eau de cette bouteille est dite calcaire.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production de la source 1, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart-type 1,5.

1. Calculer $P(Y \leqslant 6,5)$.
2. En déduire la probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production de la source 1 soit calcaire.

C. Probabilités conditionnelles

On suppose que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source 1 contienne de l'eau calcaire est de $p_1 = 0,16$ et que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production de cette journée de la source 2 contienne de l'eau calcaire est de $p_2 = 0,10$.
La source 1 fournit 70 % de la production totale des bouteilles d'eau et la source 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une bouteille d'eau parmi la production totale de la journée.
Toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'êtres tirées.
On définit les évènements suivants :

A : « la bouteille d'eau provient de la source 1 » ;
B : « la bouteille d'eau provient de la source 2 » ;
C : « l'eau contenue dans la bouteille est calcaire ».

1. Déduire des informations figurant dans l'enoncé :
$P(A)$,$P(B)$, $P(C/A)$, $P(C/B)$.
(On rappelle que $P(C/A) = P_A(C)$ est la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.)

2. Calculer $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.

3. Déduire de ce qui précède $P(C)$.

4. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source 1 sachant qu'elle est calcaire.

D. Intervalles de confiance

Dans cette question on s'intéresse au taux de calcium de l'eau d'une grande quantité de bouteilles devant être livrées à une chaine d'hypermarchés.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 bouteilles dans cette livraison.
Soit $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à toute échantillon de 100 bouteilles au hasard et avec remise dans la livraison, associe la moyenne des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de cet échantillon.
On suppose que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{10}$ avec $\sigma = 0,99$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est $\overline{x} = 5,37$.

1. A partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de la livraison

2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de la livraison, avec le coefficient de confiance de 95%. Arrondir les bornes à 10^{-2}.

Exercice 2 — 8 points

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0,01y = 24$,
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,01y = 0$.

2. Déterminer la constante réelle a pour que la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$g(t) = a$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution v de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit v la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$v(t) = 2\,400\left(1 - \mathrm{e}^{-0,01t}\right).$$

1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

2. On désigne par v' la fonction dérivée de la fonction v.
Calculer $v'(t)$ pour tout t de $[0, +\infty[$.

3. Déduire de ce qui précède le sens de variation de la fonction v sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $v(t) = 1200$.
Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à 10^{-1}.

C. Application des résultats de la partie B

Un réservoir contient 60 m^3 d'eau destinée à abreuver du bétail.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en heures.
À l'instant $t = 0$, se déverse dans le réservoir une eau polluée par une substance M.
Un système de trop plein permet de conserver à tout instant à partir de l'instant $t = 0$ un volume de 60 m^3 dans le réservoir.
On admet, qu'à l'instant t (exprimé en heures), le volume **exprimé en litres**, de substance polluante M présente dans le réservoir est $v(t)$, où v est la fonction définie dans la partie B.

1. La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance M dans le réservoir atteint 2 % du volume total du réservoir. Déduire d'un résultat obtenu à la partie B la valeur de t à partir de laquelle la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de substance M.

2. Le volume de substance M dans le réservoir peut-il dépasser 4 % du volume du réservoir ? Justifier la réponse à l'aide d'un résultat de la partie B.

Brevet de technicien supérieur session 2007
Groupement D

Exercice 1 10 **points**

Dans cet exercice on s'intéresse à un flotteur réalisé en plastique allégé.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' - y = -\mathrm{e}^{x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0) \quad y' - y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^{x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[-2~;~2]$ par

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[-2~;~2]$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[-2~;~2]$.
   c. Établir le tableau de variation de f sur $[-2~;~2]$.
2. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.
3. **a.** Résoudre algébriquement dans $[-2~;~2]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 2 - x$.

b. Retrouver graphiquement le résultat du **3. a**. On fera apparaître sur la figure du 2 les constructions utiles.

4. a. Démontrer que la fonction F définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$ est une primitive sur $[-2\ ;\ 2]$ de la fonction $x \longmapsto [f(x)]^2$.

b. Application :

On considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la panic du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -2$.

Le solide obtenu est utilisé pour réaliser un modèle de flotteur en plastique allégé.

On admet que le volume V, en unités de volume, du solide S est :

$$V = \pi \int_{-2}^{2} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Établir que $V = \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^{x} - 41\mathrm{e}^{-4}\right)$.

c. Donner la valeur approchée de V en cm^3 arrondie à 10^{-3}.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Dans cet exercice, on s'intéresse au contrôle de la qualité de la fabrication du modèle de flotteur décrit dans l'exercice 1.

A. Loi binomiale

On considère un stock important de flotteurs.
Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} près.
On dit qu'un flotteur est acceptable si sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle [24,5 ; 25,5].
On prélève au hasard un flotteur dans le stock.
On note E l'évènement : « le flotteur prélevé dans le stock est acceptable ».
On suppose que $P(\mathrm{E}) = 0,26$. On prélève au hasard n flotteurs dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de n flotteurs à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de flotteurs acceptables dans le prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Dans cette question, on suppose $n = 6$.

a. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux flotteurs exactement soient acceptables.

b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux flotteurs soient acceptables.

3. Dans cette question, on considère un prélèvement de n flotteurs.

a. Donner, en fonction de n l'expression de $P(X = 0)$.

b. Soit F l'évènement : « dans le prélèvement, au moins un flotteur est acceptable ».

Calculer la valeur minimale n_0 de n telle que $P(\text{F}) \geqslant 0,95$.

B. Loi normale

Dans cette partie les résultats sont à arrondir 10^{-2} près.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa masse exprimée en grammes. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type $1,58$.

1. Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production de la journée ait une masse inférieure ou égale à 27 grammes.

2. Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production dc la journée ait une masse inférieure ou égale à $24,5$ grammes.

C. Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, les résultats sont à arrondir à 10^{-4} près.
Les flotteurs sont fabriqués par deux machines notées M_1 et M_2.
60 % des flotteurs proviennent de la machine M_1 et 40 % proviennent de la machine M_2.
On admet que 1,3 % des flotteurs provenant de la machine M_1 sont défectueux et que 1,8 % des flotteurs provenant de la machine M_2 sont défectueux.
On prélève au hasard un flotteur dans la production d'un mois. On considère les évènements suivants :

A_1 : « le flotteur provient de la machine M_1 » ;
A_2 : « le flotteur provient de la machine M_2 » ;
D : « le flotteur est défectueux ».

1. Déterminer $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(D/A_1)$ et $P(D/A_2)$.

On rappelle que $P(D/A_1) = P_{A_1}(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.

2. **a.** Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(A_1 \cap D)$ et $P(A_2 \cap D)$.

b. En déduire la valeur exacte de la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production du mois soit défectueux.

3. Calculer la probabilité qu'un flotteur provienne de la machine M_1 sachant qu'il est défectueux.

Brevet de technicien supérieur session 2008
Groupement D

Exercice 1 **10 points**

Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution de la température d'une tasse de thé.

Les deux parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0,05y = 1,05$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0,05y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $h(t) = a$, où a est un nombre réel. Déterminer le nombre réel a pour que la fonction h soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 100 pour $t = 0$.

B *Étude d'une fonction et calcul intégral*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 79\text{e}^{-0,05t} + 21$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathcal{C}$ est donnée annexe, à rendre avec la copie.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$.

   b. En déduire du a. que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

   Tracer la droite Δ sur la figure de l'annexe.
2. Résoudre par le calcul dans $[0~;~+\infty[$ l'équation $f(t) = 21,1$.

   Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à 10^{-1}.
3. **a.** On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0~;~+\infty[$.

   b. Établir le tableau de variation de f.

4. Démontrer que la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[0\,;\,120]$ est :

$$V_m = 21 + \frac{79}{6}\left(1 - e^{-6}\right).$$

C. *Exploitation des résultats des parties A et B*

Du thé est mis à infuser dans une tasse placée dans une pièce où la température ambiante, supposée constante, est de 21°C.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minutes.
On admet que la température du thé exprimé en degré Celsius est $f(t)$, où f est la fonction définie au début de la partie B.

1. En utilisant le résultat de la question B. 2°, donner, à la minute près, l'instant au-delà duquel la température du thé est inférieure à 21,1°C.
2. Déterminer graphiquement, à la minute près, l'instant où la température du thé est de 60°C.

   On fera apparaître les constructions utiles sur la figure.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un industriel de l'agroalimentaire conditionne du ketchup dans des bouteilles en verre.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}**.**

A. *Loi normale*

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée associe la masse de sauce, exprimée en grammes, contenue dans cette bouteille.
On suppose que la variable aléatoire x suit la loi normale de moyenne 570 et d'écart type 4.
Une bouteille n'est commercialisée que si la masse de sauce qu'elle contient est comprise entre 560 grammes et 580 grammes.

1. Calculer la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production de la journée soit commercialisée.
2. Calculer la probabilité que la masse de sauce soit supérieure ou égale à 565 grammes.

B. *Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

1. Dans un stock important de bouteilles destinées aux livraisons en France, 10 % des bouteilles contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

   Les bouteilles sont livrées en France par cartons de 16.

   On prélève au hasard 16 bouteilles de ce stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 16 bouteilles.

   On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 16 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

   a. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité qu'aucune bouteille de ce prélèvement ne contienne une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

   c. calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une bouteille au plus, contienne une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

2. Les bouteilles destinées à l'exportation sont conditionnées par colis de 100.

   On prélève au hasard 100 bouteilles pour vérification dans le stock destiné à l'exportation. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bouteilles.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 100 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à

565 grammes.

On admet que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale de paramètres 100 et $0,1$.

a. On considère que la loi z peut être approchée par une loi de Poisson.

Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

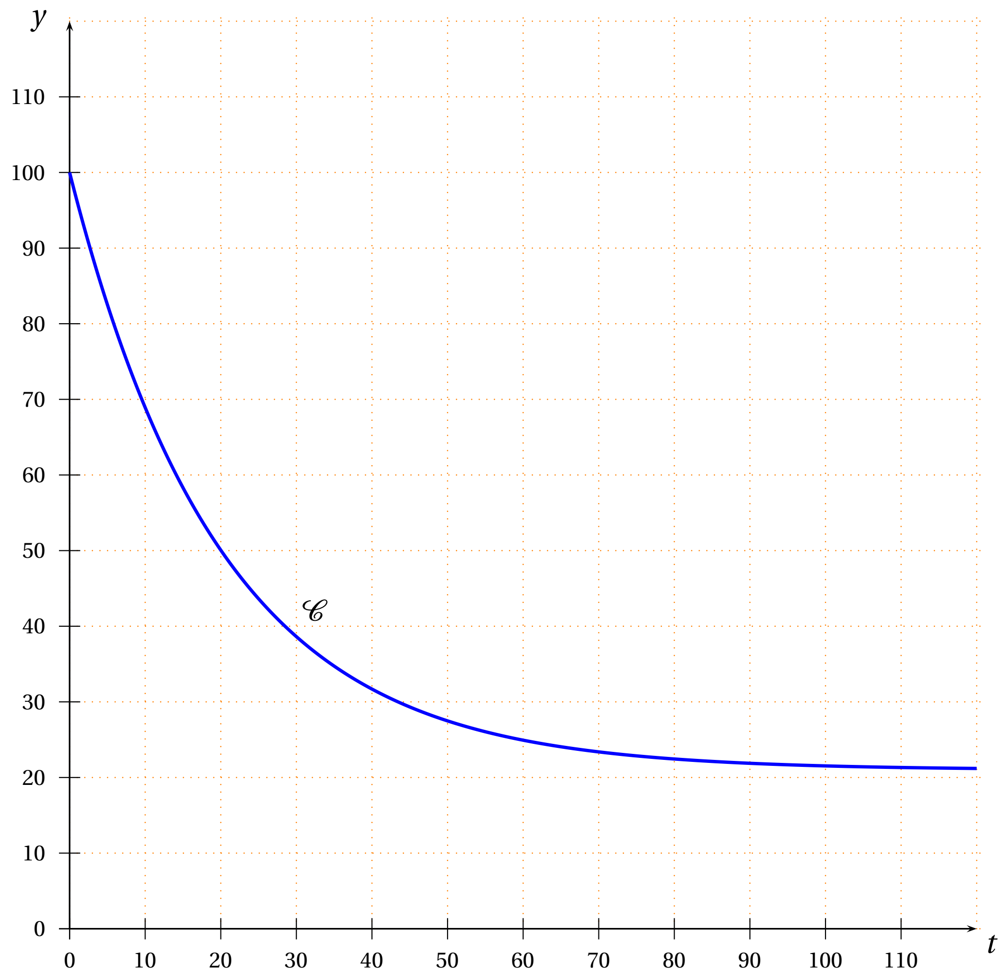
b. On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue en **a.**.

Calculer $P(Z_1 \leqslant 5)$.

C. *Intervalle de confiance*

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse de sucre, exprimée en grammes, contenue dans chaque bouteille.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 25 bouteilles dans un lot important.
Soit $\overline{S}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 25 bouteilles prélevées au hasard et avec remise dans ce lot, associe la moyenne des masses de sucre contenue dans les bouteilles de cet échantillon.
On suppose que $\overline{S}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$ avec $\sigma = 7$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-1}, est $\overline{s} = 137,7$.
Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{s}$ de moyenne μ des masses de sucre contenu dans chacune des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95 %.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



Brevet de technicien supérieur session 2009
Groupement D

Exercice 1 **9 points**

Un industriel fabrique des tuyaux en PVC destinés à l'évacuation des eaux sanitaires des habitations.

A Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

1. On s'intéresse à une livraison importante de tuyaux en PVC pour un grand groupe du secteur de la construction.

   On note E l'évènement : « un tuyau prélevé au hasard dans la livraison est défectueux ».

   On suppose que $P(E) = 0,015$.

   On prélève au hasard 20 tuyaux dans la livraison pour vérification. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 tuyaux.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout a tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tuyaux défectueux de ce prélèvement.

   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des tuyaux ne soit défectueux.

   c. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tuyaux au plus soient défectueux.

2. Les tuyaux sont expédiés dans les dépôts régionaux par lots de 200.

   On prélève au hasard 200 tuyaux pour vérification dans un stock important. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement a un tirage avec remise de 200 tuyaux. On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 200 tuyaux, associe le nombre de tuyaux de ce prélèvement qui sont défectueux.

   On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 200 et $0,015$.

   a. On considère que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson.

   Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au a. Calculer $P(Z \leqslant 4)$.

B. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

Dans cette partie on s'intéresse au diamètre extérieur des tuyaux, exprimé en millimètres.

1. On note D_1 la variable aléatoire qui, à tout tuyau prélève au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre extérieur. On suppose que la variable aléatoire D_1 suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 0,2. Un tuyau ne peut être commercialisé que lorsque son diamètre extérieur est compris entre 39,6 mm et 40,4 mm.

Calculer la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production de la journée soit commercialisable.

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la fabrication des tuyaux : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les tuyaux.

On note D_2 la variable aléatoire qui, à chaque tuyau prélevé au hasard dans la production journalière future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D_2 suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart type σ.

Déterminer σ pour que la probabilité qu'un tuyau prélèvé au hasard dans la production journalière future puisse être commercialisable soit égale à 0,99.

Exercice 2 **11 points**

Les deux parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad 2y' + y = 8\mathrm{e}^{-0,5t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad 2y' + y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par , $h(t) = 4t\mathrm{e}^{-0,5t}$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de 1'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

B Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,15]$ par

$$f(t) = (4t + 1)\mathrm{e}^{-0,5t}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. On admet que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,15]$, $f'(t) = (3,5 - 2t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.

   Ce résultat n'a pas à être démontré.

   a. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,15]$.

   b. Établir alors le tableau de variation de f.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.
3. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,15]$ par : $F(t) = (-18 - 8t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.

   a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,15]$.

   b. On note $I = \displaystyle\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que, $I = 18 - 106\mathrm{e}^{-5,5}$.

C. Application des parties A et B

Dans une usine, on se propose de tester un nouveau modèle de hotte aspirante pour les laboratoires. Avant de lancer la fabrication en série, on a réalisé l'expérience suivante avec un prototype : dans un local clos de volume 500 m^3, équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minutes.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche. Les mesures réalisées permettent d'admettre qu'au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte, avec $0 \leqslant t \leqslant 15$, le volume de dioxyde de carbone, exprimé en m^3, contenu dans le local est $f(t)$ où f est la fonction définie dans la partie B.

1. Déterminer le volume de dioxyde de carbone, en m^3, présent dans le local au moment de la mise en marche de la hotte aspirante.
2. L'atmosphère « ordinaire » contient 0,035 % de dioxyde de carbone, ce qui correspond pour le local où a été réalisée l'expérience à un volume de 0,175 m^3 de dioxyde de carbone.

À l' aide d'une lecture graphique sur la figure réalisée à la question B. 2., déterminer au bout de combien de temps de fonctionnement de la hotte aspirante l'atmosphère dans le local clos contenait un volume de dioxyde de carbone inférieur ou égal a 0,175 m^3.

3. Calculer le volume moyen V_m de dioxyde de carbone présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante. Donner la valeur exacte de V_m puis la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-1}.

La formule donnant la valeur moyenne dune fonction est dans le formulaire ci-joint.

Brevet de technicien supérieur
Groupement D session 2010

Exercice 1 **10 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-2t},$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0)~:~y' + 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $h(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-2t}$.
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 pour $t = 0$.

B. Étude d'une fonction.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = (1 + 2t)\mathrm{e}^{-2t}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   - **a.** Vérifier que pour t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$: $f'(t) = -4t\mathrm{e}^{-2t}$.
   - **b.** En déduire le signe de $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3.
   - **a.** Compléter le tableau de valeurs donné en **annexe**. Arrondir à 10^{-2}.
   - **b.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère donné en **annexe**.

C. Application de la partie B

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide.

Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0\,;\,+\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = 1 - f(t) = 1 - (1+2t)\mathrm{e}^{-2t},$$

où t est exprimé en heures et f est la fonction étudiée dans la **partie B**.

1. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-2}.

   a. Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout d'une heure ?

   b. Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?

2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75.

   a. Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75 lorsque $f(t) \leqslant 0,25$.

   b. En utilisant la courbe représentative de la fonction f tracée en **annexe**, déterminer graphiquement à 10^{-1} près, la durée d'utilisation du réfractomètre. On laissera les traits de construction apparents.

Exercice 2 — 10 points

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité des récipients cylindriques pour le laboratoire.

A. Loi normale

Le couvercle d'un récipient est conçu pour avoir un diamètre de 60 millimètres.
Il est non défectueux lorsque son diamètre, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[59,93\,;\,60,07]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe le diamètre, en millimètres, de son couvercle.
On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type $0,03$.

Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production ait un couvercle non défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

B. évènements indépendants

Les récipients fabriqués sont susceptibles de présenter deux défauts : un défaut au niveau de leur couvercle ou un défaut de convenance.
On prélève un récipient au hasard dans la production d'une journée.
On considère les évènements suivants :
E_1 : « le couvercle du récipient prélevé est défectueux » ;
E_2 : « le récipient prélevé présente un défaut de contenance ».
On suppose que les évènements E_1 et E_2 sont indépendants.
On admet que : $P(E_1) = 0,02$ et $P(E_2) = 0,01$.

Dans cette partie, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

1. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente les deux deux défauts.
2. a. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente au moins un des deux défauts.

   b. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée ne présente aucun des deux défauts.

C. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On prélève au hasard 50 récipients dans un stock pour vérification de leur couvercle. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 récipients.
On rappelle que la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard ait un couvercle défectueux est égale à 0,02.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 récipients, associe le nombre de récipients de ce prélèvement ayant un couvercle défectueux.

1. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, un seul récipient ait un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.
3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

   a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

   b. On désigne par Y_1 une variable aléatoire suivant la loi de ¶de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **a**.
   En utilisant la loi suivie par Y_1, calculer la probabilité qu'au plus trois récipients d'un prélèvement aient un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

D. Intervalle de confiance

Dans cette partie on s'intéresse à la contenance de chaque récipient, exprimée en centimètres cubes.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon dans un lot important.
Soit $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon prélevés au hasard et avec remise dans le lot, associe la moyenne des contenances des récipients de cet échantillon.
On suppose que $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{50}}$ avec $\sigma = 0,06$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est : $\overline{x} = 119,88$.
Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des contenances des récipients de ce lot, avec un taux de confiance supérieur ou égal à 95 %.
On arrondira à 10^{-2} les bornes de cet intervalle.

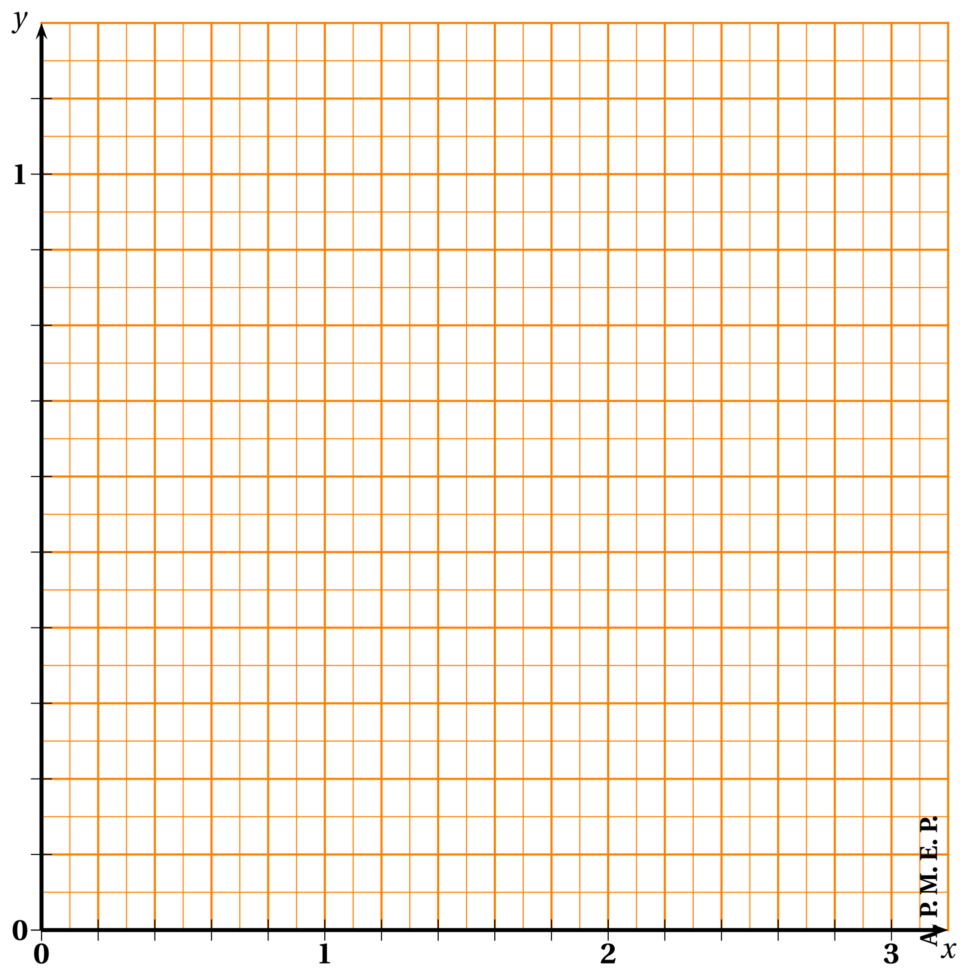
ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 1, Partie B, question 3.

1. Tableau de valeurs (arrondies à 10^{-2}) de la fonction f

x	0	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

2. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$



Brevet de technicien supérieur
Groupement D session 2011

EXERCICE 1 11 points

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad 5y' + y = \mathrm{e}^{-0,2t},$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, et y' la fonction dérivée de la fonction y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad 5y' + y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $h(t) = at\mathrm{e}^{-0,2t}$,

où a est une constante réelle.

Déterminer a pour que la fonction h soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale :

$$f(0) = 0.$$

B. Étude d'une fonction.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$: $f'(t) = (-0,04t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,2t}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et donner son tableau de variations. On précisera les valeurs remarquables de t et $f(t)$.

4. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On arrondira les résultats à 10^{-2}.

x	0	2,5	5	10	15	20	25
$f(x)$							

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille de papier millimétré fournie.

Sur l'axe des x, 2 cm représentent 5 unités. Sur l'axe des y, 2 cm représentent 0,05 unités.

C. Application

À l'aide d'une perfusion, on injecte pendant cinq minutes un médicament antalgique à un patient. Après l'injection, l'organisme élimine peu à peu le médicament.
On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient au cours du temps. L'instant $t = 0$ correspond au début de l'injection.
On fait l'hypothèse qu'à l'instant t, exprimé en minute (min), la quantité de médicament exprimée en millilitre (ml), est égale à $f(t) = 0,2t\,\mathrm{e}^{-0,2t}$, où f est la fonction étudiée dans la partie **B**.

1. Déterminer graphiquement, à une minute près, l'instant à partir duquel la quantité de médicament **redevient** inférieure à 0,05 ml.

   On fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique.

2. **a.** On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$F(t) = (-t-5)\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.

   b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,23]$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

   c. Que représente la valeur moyenne calculée au **b.** dans le contexte de l'exercice ?

EXERCICE 2 — 9 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique des tubes en polyéthylène pour le chauffage géothermique.
On s'intéresse à trois types de tubes appelés tubes de type 1, tubes de type 2 et tubes de type 3.

A. Loi normale

Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée associe son épaisseur exprimée en millimètre.

   On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 1,5 et d'écart-type 0,07.

   Calculer la probabilité qu'un tube de type 1 prélevé au hasard dans la production de la journée soit accepté au contrôle. On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1 : Il est envisagé pour cela de modifier le réglage des machines produisant ces tubes .

   On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1, prélevé dans la production future, associera son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale de moyenne 1,5 et d'écart-type σ_1.

   Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'un tube de type 1 prélévé au hasard dans la production future soit accepté au contrôle soit égale à 0,99.

   On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

On considère un lot de tubes de type 2.
On note E l'évènement : « un tube prélevé au hasard dans ce lot de tubes de type 2 est défectueux ». On suppose que $P(E) = 0,02$.
On prélève au hasard 20 tubes de type 2 dans ce lot pour vérification.
Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de 20 tubes de type 2 à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire Y_1 qui, à tout prélèvement de 20 tubes de type 2, associe le nombre de tubes défectueux de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un tube soit défectueux.

   On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

C. Test d'hypothèse

Un client a passé une commande de tubes de type 3. La longueur de ces tubes doit être de 300 millimètres. On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne μ de l'ensemble des longueurs, en millimètres, des tubes de type 3.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 3 prélevé au hasard dans la livraison, associe sa longueur en millimètres. La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 1$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 tubes de type 3 prélevés dans la livraison, associe la moyenne des longueurs, en millimètres, des tubes de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 300$. L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 300$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 300 et d'écart-type $\dfrac{1}{\sqrt{100}} = 0,10$.

Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel positif h tel que :

$$P(300 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 300 + h) = 0,95.$$

On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

2. En déduire la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. On prélève un échantillon de 100 tubes de type 3 dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des longueurs des tubes est :

$$\overline{z} \approx 299,90 \text{ valeur arrondie à } 10^{-2}.$$

Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour la longueur ?