Brevet de technicien supérieur

A. P. M. E. P.

Le groupement A de 2001 à 2011

BTS Groupement A session 2001

EXERCICE 1 **12 points**

Partie A

1. On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}.$$

Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

2. On considère le signal, modélisé par la fonction réelle e, de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} e(t) = \sin t & \text{si } t \in [0\,;\,\pi] \\ e(t) = 0 & \text{si } t \in]\pi\,;\,2\pi[. \end{cases}$$

   a. Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction e pour t variant dans l'intervalle $[-2\pi\,;\,4\pi]$.

   b. Calculer les coefficients de Fourier a_0 , a_1 et a_2 de la fonction e. On admettra dans la suite de l'exercice que les coefficients b_1 et b_2 valent : $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

3. **a.** Calculer le carré E^2 de la valeur efficace du signal e.

   b. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2.

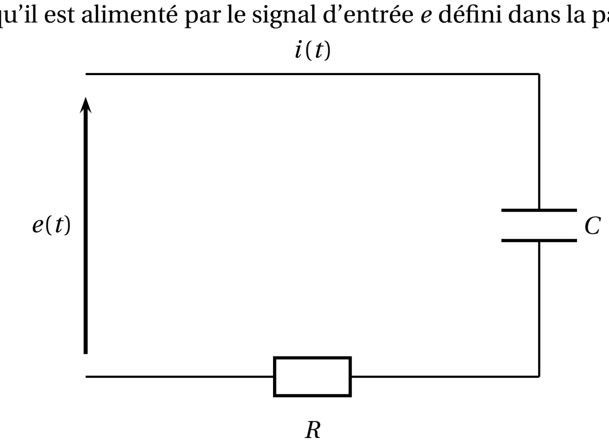
Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2\right)$.

Calculer P, puis donner une approximation décimale à 10^{-3} près du rapport $\dfrac{P}{E^2}$.

La comparaison de E^2 et P justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 3.

Partie B

On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité i du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée e défini dans la partie A.



L'équation permettant de trouver l'intensité du courant est, pour $t \in [0~;~+\infty[$,

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = e(t) \quad (1).$$

Pour déterminer la fonction i on remplace le signal d'entrée e par son développement en série de Fourier tronqué à l'ordre 2. L'équation (1) devient alors :

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{2}{3\pi}\cos(2t) \quad (2).$$

On admet que l'intensité t du courant est une fonction dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que $R = 5\,000\Omega$ et $C = 10^{-4}$ F.

1. Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)+2i(t)=\left(10^{-4}\right)\cos t+\left(\dfrac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}\right)\sin(2t)\\ t\in[0~;~+\infty[\end{array}\right. \quad (3).$$

2. Vérifier que la fonction i_1 telle que $i_1(t)=\left(4\cdot10^{-5}\right)\cos t+\left(2\cdot 10^{-5}\right)\sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)+2i(t)=\left(10^{-4}\right)\cos t\\ t\in[0~;~+\infty[\end{array}\right.$$

3. Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)+2i(t)=\left(\dfrac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}\right)\sin(2t)\\ t\in[0~;~+\infty[\end{array}\right.$$

4. Résoudre alors l'équation différentielle (3). En déduire la solution particulière vérifiant la condition $i(0) = 0$.

EXERCICE 2 — 8 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse dans cet exercice à deux courbes de Bézier C_1 et C_2.
C_1 est définie par les quatre points de contrôle $\mathrm{A}_0(0~;~3)$, $\mathrm{A}_1(0~;~-2)$, $\mathrm{A}_2(10~;~-2)$, $\mathrm{A}_3(5~;~3)$;
C_2 est définie par les trois points de contrôle $\mathrm{A}_0(0~;~3)$, $\mathrm{T}(0~;~8)$, $\mathrm{A}_3(5~;~3)$.
On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de contrôle A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M}(t)=\sum_{i=0}^{n} B_{i,\,n}(t)\overrightarrow{\mathrm{O}A_i} \quad \text{où} \quad B_{i,\,n}(t)=\mathrm{C}_n^i t^i(1-t)^{n-i} \quad \text{avec } t\in[0~;~1].$$

1. Construction de la courbe C_1.

a. Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,\,3}(t)$, $(0 \leqslant i \leqslant 3)$.

b. Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe C_1 sont :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x &=& f_1(t) &=& 30t^2-25t^3\\ y &=& g_1(t) &=& 3-15t+15t^2\end{array}\right. \quad t\in[0~;~1].$$

c. Étudier les variations de f_1 et g_1 et dresser le tableau des variations conjointes de ces deux fonctions.

d. Préciser les coordonnées des points de C_1 à tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

e. Montrer que la droite $(\mathrm{A_2A_3})$ est tangente à C_1 en $\mathrm{A_3}$.

f. Tracer, en exploitant les résultats précédents, la courbe C_1 sur la feuille annexe.

2. Étude géométrique de la courbe C_2

La représentation paramétrique de la courbe C_2 est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_2(t) & = & 5t^2 \\ y & = & g_2(t) & = & 3+10t-10t^2 \end{array}\right.$$

La courbe C_2 est donnée sur la feuille annexe.

a. On définit, pour tout $t \in [0~;~1]$, les points $N_1(t)$ et $N_2(t)$ par :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}N_1(t)} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA_0}} + t\overrightarrow{\mathrm{OT}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{O}N_2(t)} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OT}} + t\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}.$$

Justifier que les points $N_1(t)$ et $N_2(t)$ appartiennent respectivement aux segments $[\mathrm{A_0T}]$ et $[\mathrm{TA_3}]$.

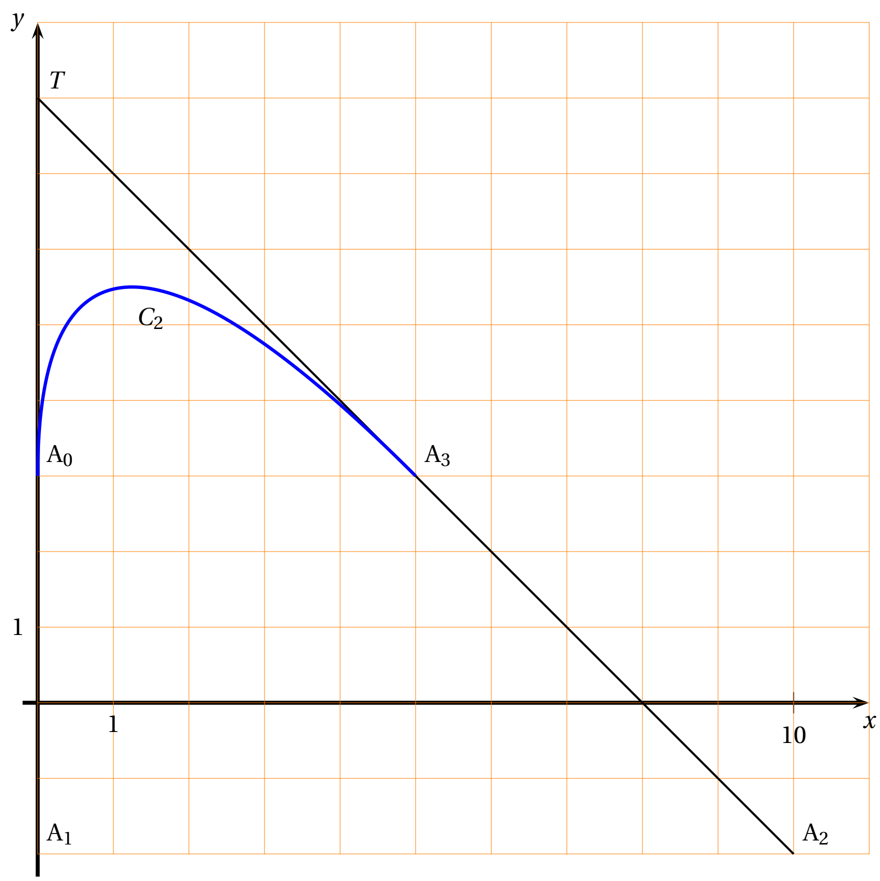
b. Soit $G(t)$ le point défini, pour tout $t \in [0~;~1]$, par

$$\overrightarrow{\mathrm{O}G(t)} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{O}N_1(t)} + t\overrightarrow{\mathrm{O}N_2(t)}.$$

Montrer que $G(t)$ appartient à C_2 et que la droite $(N_1(t)N_2(t))$ est tangente à C_2 en $G(t)$.

c. Placer les points $N_1\left(\dfrac{1}{5}\right)$, $N_2\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $G\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et la tangente à C_2 en $G\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

Feuille annexe à rendre avec la copie



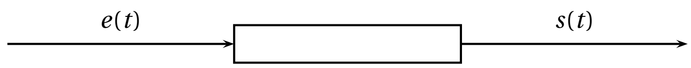
BTS Groupement A 2002

EXERCICE 1 **12 points**

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geqslant 0.$$

On considère le système « entrée - sortie »représenté ci-dessous :



On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E.
La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.
On considère le signal d'entre e défini par :

$$e(t) = t\mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1) - (t-2)\mathcal{U}(t-2)$$

et la fonction H définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal.
2. Pour $p > 0$, déterminer $E(p)$.
3. Déterminer tes nombres réels A, B, et C tels que, pour tout $p > 0$, on ait :

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1}$$

   On admet que :

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}$$

4. **a.** Déterminer $S(p)$ puis $s(t)$.

   b. En déduire que la fonction s est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s(t) & = & 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ s(t) & = & t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ s(t) & = & t - 3 + \mathrm{e}^{-t}(1 + 2\mathrm{e}) & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ s(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\left(1 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2\right) & \text{si} \quad t \geqslant 2 \end{array}\right.$$

5. On rappelle que la notation $f\left(a^+\right)$ représente la limite de la fonction f lorsque la variable t tend vers a par valeurs supérieures : $f\left(a^+\right) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f(t)$. De même, $f\left(a^-\right) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t < a}} f(t)$.

   a. Calculer $s\left(1^+\right)$, $s\left(1^-\right)$, $s\left(2^+\right)$, $s\left(2^-\right)$. Que peut-on en conclure pour la fonction s lorsque $t = 1$ et $t = 2$?

   b. Calculer $s'(t)$ sur chacun des intervalles $]0\,;\,1[$, $]1\,;\,2[$ et $]2\,;\,+\infty[$.
   On admet que s' est strictement positive sur $]0\,;\,1[\cup]2\,;\,+\infty[$.
   Déterminer le signe de $s'(t)$ sur l'intervalle $]1\,;\,2[$.

   c. Calculer la valeur exacte de $s[\ln(1+2\mathrm{e})]$. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$ et dresser le tableau des variations de la fonction s sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. Calculer $s'\left(1^+\right)$, $s'\left(1^-\right)$, $s'\left(2^+\right)$, $s'\left(2^-\right)$. On admet que ces nombres sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche aux points d'abscisse 1 et d'abscisse 2 de la courbe Γ représentative de la fonction s.

6. On se place dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 50 cm sur l'axe des ordonnées.

a. Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs numériques seront données à 10^{-2} près.

t	1	1,2	1,4	1,6	2	2,5	3	3,5
$s(t)$								

b. Tracer alors les tangentes ou demi-tangentes à la courbe Γ représentative de la fonction s aux points d'abscisses 0, 1, et 2. Tracer alors la courbe Γ.

EXERCICE 2 — 8 points

On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière.

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcll} x'(t)+2y(t) & = & -2\sin t & (E_1)\\ 2x(t)-y'(t) & = & -2\cos t & (E_2)\end{array}\right.$$

Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A

1. Montrer en utilisant les équations (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie, pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$x''(t)+4x(t)=-6\cos t \qquad (E)$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). En déduire les solutions du système (S).

3. Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0)=-1$ et $y(0)=0$.

Partie B

On considère la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcccl} x & = & f(t) & = & \cos(2t)-2\cos t\\ y & = & g(t) & = & \sin(2t)-2\sin t\end{array}\right.$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$.

1. Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.

2. **a.** Calculer $f'(t)$.

Montrer que : $f'(t)=-4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right)$.

b. Établir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

3. On admet que $g'(t)=-4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)$ et que le signe de g' est donné par le tableau suivant :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $g'(t)$	0	$-$	0	$+$	

Dresser sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ le tableau des variations conjointes des fonctions f et g.

4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètre respectifs $t_B = \dfrac{\pi}{3}$, $t_C = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_D = \pi$.

5. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On admet que la tangente à la courbe (Γ) au point A de paramètre $t_A = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{i}$. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ).

BTS Groupement A 2003

EXERCICE 1 **10 points**

Le but de cet exercice est de déterminer les premiers coefficients de Fourier et les principales harmoniques d'un signal.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $I_n = -\dfrac{1}{n}\sin n\dfrac{\pi}{2}$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que
$J_n = \dfrac{\pi}{2n}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{n^2}\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{n^2}$
3. Déterminer I_1, I_2 et I_3, puis J_1, J_2 et J_3.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},\ \ f(t) = \dfrac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi,\ \ f(t) = E \end{array}\right.$$

où E est un nombre réel donné, strictement positif.

1. Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ (on prendra $E = 2$ uniquement pour construire la courbe représentant f).
2. Soit a_0 et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à f.
   a. Calculer a_0.
   b. Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de b_n.
   c. En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
   Calculer a_{4k} pour tout entier $k \geqslant 1$.

Partie C

1. Déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3.
2. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
   On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T, on a :
$$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$
3. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :
$$F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$
   Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$.

Calculer P, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\dfrac{P}{F^2}$.
Ce dernier résultat très proche de 1*, justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à* 3.

EXERCICE 2 **10 points**

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère la fonction H définie, pour tout nombre complexe p distinct de 0 et de -1, par :

$$H(p) = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Dans toute la suite de l'exercice on prend $p = \mathrm{j}\omega$, où ωdésigne un réel strictement positif.

1. On note $r(\omega)$ le module du nombre complexe $H(\mathrm{j}\omega)$ et on considère la fonction G définie, pour tout réel ω par :

$$G(\omega) = \frac{20}{\ln 10}\ln r(\omega).$$

a. Montrer que $G(\omega) = -\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$.

b. Déterminer les limites de la fonction G en 0 et en $+\infty$.
Montrer que la fonction G est strictement décroissante sur $]0~;~+\infty[$.

2. a. Montrer qu'un argument $\varphi(\omega)$ de $H(j\omega)$ est :

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\omega$$

b. Étudier les variations de la fonction φ sur $]0~;~+\infty[$ (on précisera les limites en 0 et en $+\infty$).

3. On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\omega \\ y(\omega) = -\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right) \end{array}\right. \quad \text{pour } \omega \text{ strictement positif.}$$

a. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions x et y.

b. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales arrondies au centième) :

ω	0,5	0,7	0,786	0,9	1,5
$x(\omega)$			$-2,24$		
$y(\omega)$			0		

c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal, on prendra pour unités graphiques 5 cm sur l'axe des ordonnées.

La courbe $\mathscr{C}$ correspond au diagramme de Black associé à la fonction de transfert H.

Brevet de technicien supérieur
Groupement A session 2004

Exercice 1 **8 points**

Les questions 1, 2 *et* 3 *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

Une entreprise fabrique des pièces. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre 79,8 mm et 80,2 mm.

1. On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce fabriquée, associe sa longueur en mm.

On admet que la variable L suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart type 0,0948.

On prélève une pièce au hasard dans la production.

Déterminer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite, la probabilité que cette pièce soit conforme.

2. On admet que si on prélève, au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme, est $p = 0,035$.

a. On note X, la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 100 pièces. Les pièces sont prélevées au hasard et le tirage est assimilé à un tirage avec remise.

Justifier que X suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,035$.

b. Le tableau ci-dessous, donne la probabilité des évènements "$X = k$" pour k variant de 0 à 9, à l'exception de l'évènement "$X = 2$".

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$	0,0284	0,1029		0,2188	0,1924	0,1340	0,0770	0,0375	0,0158	0,0059

On considère les évènements :

A : « le nombre de pièces défectueuses du lot est égal à 2 » ;
B : « le nombre de pièces défectueuses du lot est au moins égal à 2 ».

Calculer $P(A)$ au dix millième près, puis $P(B)$ au millième près.

c. Un lot de 100 pièces est envoyé à un client, le lot est accepté s'il contient au plus 4 pièces défectueuses.

En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer au millième près, la probabilité que le client refuse ce lot.

d. En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer la plus petite valeur entière n telle que :

$$P(X > n) < 0,03$$

3. L'entreprise souhaite améliorer la qualité de la production. Pour cela on projette de changer le processus de fabrication des pièces.

On définit alors une nouvelle variable L_1 qui à chaque pièce à construire selon le nouveau processus associera sa longueur en mm.

La variable aléatoire L_1 suit une loi normale de moyenne $m = 80$ et d'écart type σ'.

Déterminer σ' pour que, en prenant une pièce au hasard dans la future production, la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à 0,99.

Exercice 1 **8 points**

Pour les spécialités Contrôle industriel et régulation automatique, électronique, Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Dans tout cet exercice, le nombre n est un entier relatif.
La suite $n \mapsto e(n)$ représente l'échelon discrétisé causal défini par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 \text{ pour } n < 0 \\ e(n) = 1 \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

On considère un filtre numérique dans lequel le signal d'entrée est $n \mapsto e(n)$ et le signal de sortie est un signal discret causal noté $n \mapsto x(n)$.
Ce filtre est régi par l'équation récurrente :

$$x(n) - 2x(n-1) = e(n) \quad (E)$$

Partie 1

*D*ans cette partie, on résout l'équation récurrente (E) sans utilisation de la transformation en Z.

1. **a.** Justifier que $x(0) = 1$.

   b. Calculer $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.

2. Pour tout entier naturel n l'équation (E) s'écrit :

$$x(n) - 2x(n-1) = 1 \quad (E)$$

   a. On considère la suite y définie pour tout entier naturel n par :

$$y(n) = x(n) + 1$$

   Montrer que la suite y est une suite géométrique de raison 2.
   Donner l'expression de $y(n)$ en fonction de de l'entier naturel n.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $x(n)$. Vérifier que l'on retrouve les mêmes valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$ qu'à l'équation 1.

Partie 2

*D*ans cette partie on résout l'équation récurrente (E) en utilisant la transformation en Z.

1. On rappelle que $x(0) = 1$.
   On se place dans le cas où $n \geq 1$ et on admet que le signal $n \mapsto x(n)$, solution de l'équation récurrente (E), a une transformation en Z notée $(Zx)(z)$.

   a. Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :

$$(Zx)(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$$

   b. Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

   c. En déduire par lecture inverse du dictionnaire d'images, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$ pour $n \geq 1$.

2. Représenter dans un repère orthogonal, pour les nombres entiers n tels que $-2 \leqslant n \leqslant 3$, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$. Prendre comme unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 2 **12 points**

Pour toutes les spécialités

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Dans le système représenté ci-dessus, e et s sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, causaux (nuls pour t négatif).
On suppose que le système est régi par l'équation différentielle :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}(t)+RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)+s(t)=e(t) \qquad (1)$$

L, R et C sont des constantes réelles strictement positives. De plus à l'instant initial :

$$s(0^+)=0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)=0$$

Partie A

On suppose que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

1. La fonction de transfert H du système est définie par $S(p)=H(p)\times E(p)$.
   En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (1), exprimer $H(p)$ en fonction de L, R et C.
2. On suppose que $e(t)=\mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-2)$
   où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité : $\begin{cases}\mathcal{U}(t)=0 \text{ si } t<0\\ \mathcal{U}(t)=1 \text{ si } t\geq 0\end{cases}$
   a. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère du plan.
   b. Déterminer $E(p)$.
3. **Dans la suite de l'exercice, on considère que** $L=2$, $R=1000$ et $C=2.10^{-6}$.
   a. Vérifier que $H(p)=\dfrac{500^2}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}$.
   b. On admet que :
   $$\frac{1}{p}H(p)=\frac{1}{p}-\frac{p+250}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}-\frac{250}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}$$
   Déterminer l'original h_1 de la fonction $p\mapsto\dfrac{1}{p}H(p)$.
   Exprimer $s(t)$ à l'aide de $h_1(t)$.
   c. Donner l'expression de $s(t)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$, $[1,2[$ et $[2,+\infty[$.

Partie B

On rappelle que $H(p)=\dfrac{500^2}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}$.

1. On considère la fonction r définie pour tout réel $\omega>0$ par :
   $$r(\omega)=\left|\ H(\mathrm{j}\omega)\ \right|$$
   où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
   Montrer que $r(\omega)=\dfrac{500^2}{\sqrt{\omega^4-500^2\omega^2+500^4}}$.

2. On considère la fonction f définie pour tout réel $\omega > 0$ par :

$$f(\omega) = \omega^4 - 500^2\omega^2 + 500^4$$

Montrer que $f'(\omega) = 4\omega\left(\omega - 250\sqrt{2}\right)\left(\omega + 250\sqrt{2}\right)$.

3. Montrer que $r'(\omega)$ est du signe de $-f'(\omega)$.

4. En déduire que $r(\omega)$ est maximal pour une valeur de ω_0 de ω. Donner la valeur de ω_0 et calculer $r(\omega_0)$.

La partie B permet de déterminer le maximum du gain pour le système étudié en régime harmonique.

Brevet de technicien supérieur
Groupement A session 2005

Exercice 1 **9 points**

Spécialités CIRA, Électronique, Électrotechnique, Génie optique et TPIL

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0;\pi]$ par

$$g(t) = \left(1+\cos^2 t\right)\sin^2 t.$$

a. Montrer que $g'(t) = 4\sin t\cos^3 t$.

b. En déduire les variations de g sur $[0\ ;\ \pi]$.

2. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(t) & = & \dfrac{1}{2}-\tau & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ f(t) & = & -\tau & \text{si } \tau \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < \dfrac{1}{2}$$

a. *Uniquement dans cette question, on prendra* $\tau = \dfrac{1}{6}$.
Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ dans un repère orthonormal.

b. On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.
Montrer que :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$$

On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

a. À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.

b. Montrer que $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\, g(2\pi\tau)$.

4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 2 **11 points**

Toutes spécialités

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.
On note $\omega(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.
La fonction ω est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146 \quad (1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. **a.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
   On cherchera une solution particulière constante.

   b. Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4\mathrm{e}^{-200t}$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$. due au couple résistant.

   b. On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\dfrac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à 1 %.
   Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
   On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation γ du couple résistant sur la vitesse de rotation du moteur.
On note $f(t)$ la différence, à l'instant t, entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.
La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200} f'(t) + f(t) = \gamma(t) \text{ avec } f\left(0^+\right) = 0 \quad (2)$$

On admet que la fonction f possède une transformée de Laplace notée F.
La fonction γ est définie par :

$$\gamma(t) = K[U(t) - U(t - \tau)]$$

où τ et K sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et U est la fonction échelon unité ($U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geqslant 0$).

1. **a.** Représenter la fonction γ pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.

   b. Déterminer, en fonction de τ et K, la transformée de Laplace Γ de la fonction γ.

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (2), déterminer $F(p)$.

3. **a.** Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{200}{p(p + 200)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + 200}$$

   pour tout réel p strictement positif.

   b. En déduire l'original f de la fonction F. On vérifiera notamment que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(t) & = & K\left(1 - \mathrm{e}^{-200t}\right) & \text{si } t \in [0\ ;\ \tau[\\ f(t) & = & K\left(\mathrm{e}^{200\tau} - 1\right)\mathrm{e}^{-200t} & \text{si } t \in [\tau\ ;\ +\infty[\end{array}\right.$$

   c. Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $[0\ ;\ \tau[$ et $[\tau\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ces deux intervalles.

   d. Représenter la fonction f pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.
   On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions γ et f dans le même repère.

Brevet de technicien supérieur
Groupement A 2006

Exercice 1 **11 points**

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés d'un filtre numérique N et de comparer des effets de ce filtre avec ceux d'un filtre analogique A.

Partie I

On rappelle que tout signal discret causal est nul pour tout entier strictement négatif.

Soient $x(n)$ et $y(n)$ les termes généraux respectifs de deux signaux discrets causaux représentant, respectivement, l'entrée et la sortie d'un filtre numérique N. Ce filtre est conçu de telle sorte que, pour tout nombre entier n positif ou nul, on a :

$$y(n) - y(n-2) = 0,04\ x(n-1).$$

1. On note $\mathcal{Z}x$ et $\mathcal{Z}y$ les transformées respectives des signaux causaux x et y. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 et 1, on a :

$$\left(\mathcal{Z}y\right)(z) = \frac{0,04z}{(z-1)(z+1)}\left(\mathcal{Z}x\right)(z)$$

2. On suppose que le signal d'entrée est l'échelon unité discret :

$$x(n) = e(n) \text{ avec } e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 et 1, on a :

$$\left(\mathcal{Z}y\right)(z) = \frac{0,04z^2}{(z-1)^2(z+1)}$$

b. Calculer les constantes réelles A, B et C telles que :

$$\frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1}$$

c. En remarquant que :

$$\frac{\left(\mathcal{Z}y\right)(z)}{z} = \frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)}$$

montrer que, pour tout entier n positif ou nul, on a :

$$y(n) = 0,02n + 0,01\left(1 - (-1)^n\right)$$

d. Déterminer $y(2k)$ puis $y(2k+1)$ pour tout nombre entier naturel k.

e. En déduire que pour tout nombre entier naturel k, on a : $y(2k+1) = y(2k+2)$.

f. Représenter graphiquement les termes du signal causal y lorsque le nombre entier n est compris entre -2 et 5.

Partie II

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = \sin(20t)U(t)$$

On note F la transformée de Laplace de la fonction f. Le signal de sortie du filtre analogique A est représenté par la fonction s dont la transformée de Laplace S est telle que :

$$S(p) = \frac{F(p)}{p}$$

1. Justifier que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$$

2. En déduire que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = \frac{1 - \cos(20t)}{20}$$

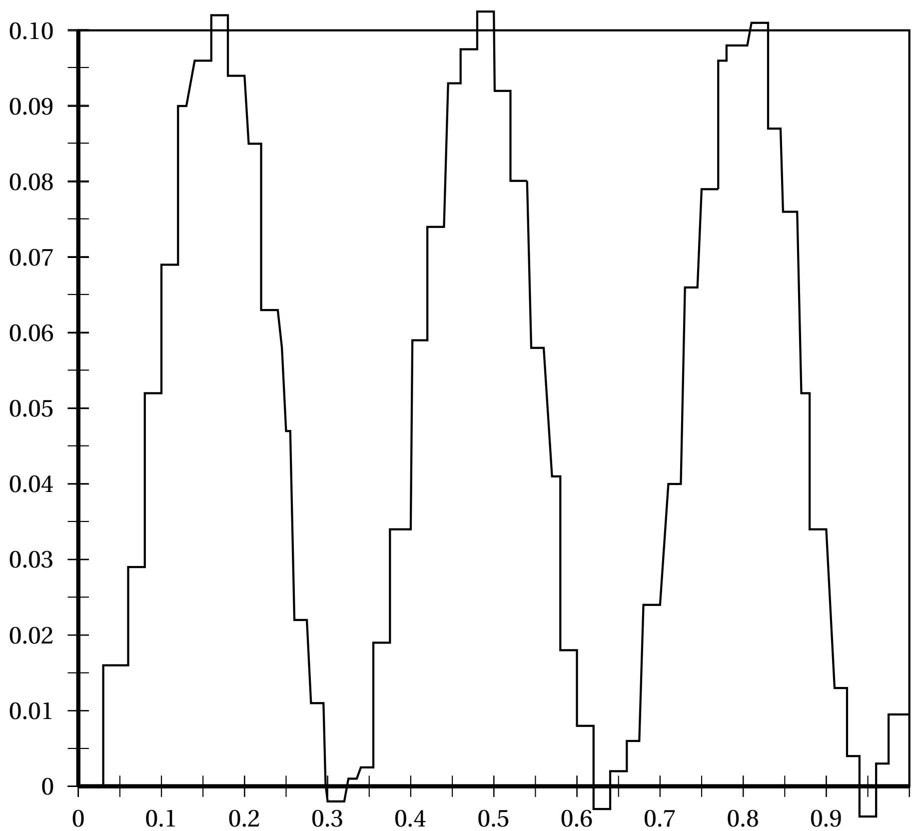
3. Donner sans justification la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction s.

4. Tracer, sur le graphique du document réponse, l'allure de la courbe représentative de la fonction s.

Il n'est pas demandé d'étudier la fonction s.

La figure du document réponse montre une simulation du résultat obtenu en sortie du filtre numérique soumis à une version échantillonnée de la fonction f, lorsque la période d'échantillonnnage est $0,02$.

Document à rendre avec la copie



Exercice 1 - Spécialités électrotechnique, Génie optique, TPIL - (sur 11 points)

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Une entreprise produit, en grande quantité, des appareils. Chaque appareil fabriqué peut présenter deux défauts que l'on appellera défaut a et défaut b.
On prélève un appareil au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'évènement : « l'appareil présente le défaut a » et B l'évènement : « l'appareil présente le défaut b ».
Les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « l'appareil présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 : « l'appareil est défectueux, c'est-à-dire qu'il présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « l'appareil ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que l'appareil est défectueux, quelle est la probabilité qu'il présente les deux défauts ?
   Le résultat sera arrondi au millième.

Dans les parties B et C, les résultats seront à arrondir au centième.

Partie B

Les appareils sont conditionnés par lots de 100 pour l'expédition aux distributeurs de pièces détachées. On prélève au hasard un échantillon de 100 appareils dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 appareils.
Pour cette partie, on considère que, à chaque prélèvement, la probabilité que l'appareil soit défectueux est $0,05$.
On considère la variable aléatoire X_1 qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire X_1 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_1.
2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. On choisit $\lambda = 5$; justifier ce choix.
   b. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux appareils défectueux dans un lot.

Partie C

Les appareils sont aussi conditionnés par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage. On prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire X_2 qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X_2 par la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type $6,2$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.
2. Déterminer le réel x tel que $P(X_2 > x) = 0,01$.
   En déduire, sans justification, le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure à $0,01$.

Exercice 2 - Toutes spécialités (sur 9 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient α et β deux nombres réels.
Soit f une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle $[0~;~1[$ par $f(t) = \alpha t + \beta$.
On appelle a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

1. Montrer que $a_0 = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$.

2. Montrer que $b_n = -\dfrac{\alpha}{n\pi}$ pour tout nombre entier naturel n non nul.

On admet que $a_n = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement S en série de Fourier de la fonction f soit défini pour tout nombre réel t par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi t)$.

a. Déterminer les nombres réels α et β tels que $a_0 = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$.
En déduire l'expression de la fonction f.

b. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2~;~2]$ dans un repère orthogonal.

Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = f(t)$$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction s en remplaçant $f(t)$ par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

Soit (E) l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

1. Vérifier que la fonction s_1 définie pour tout nombre réel t par :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

Brevet de technicien supérieur session 2007 Groupement A

Exercice 1 **12 points**

On s'intéresse à un système entrée-sortie susceptible d'être contrôlé.
Dans la partie A, on étudie le système en l'absence de contrôle.
Dans la partie B, on étudie le système soumis à un contrôle.
Les parties A, B et C sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 10 - \beta \quad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t et β une constante réelle.

1. Montrer que la fonction h définie pour tout nombre réel t par $h(t) = 10 - \beta$ est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
3. Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0) = 10$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \beta\mathrm{e}^{-2t} + 10 - \beta$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$ que l'on note f_∞.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

et qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle pour tout nombre réel strictement négatif.

On considère la fonction causale g qui vérifie la relation (E_2) suivante :

$$\frac{1}{2}g'(t) + g(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,\mathrm{d}u + (10 - \beta)U(t) \quad (E_2)$$

et la condition $g(0) = 10$.

On admet que la fonction g admet une transformée de Laplace notée G.

1. Montrer que la transformée de Laplace I de la fonction i définie par :

   $$i(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,\mathrm{d}u$$

   est telle que

   $$I(p) = \frac{130}{p^2} - 13\frac{G(p)}{p}.$$

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de la relation (E_2), déterminer une expression de $G(p)$.
3. Vérifier que $G(p) = \dfrac{10}{p} - \dfrac{2\beta}{(p+1)^2 + 5^2}$.

4. Dans cette question, on va déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$, que l'on note g_∞ et qui est la valeur finale du signal représenté par la fonction g.
On rappelle que, d'après le théorème de la valeur finale, $g_\infty = \lim\limits_{p \to 0^+} pG(p)$.
Déterminer g_∞.

5. **a.** Déterminer la transformée de Laplace de la fonction qui à tout nombre réel t associe $\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)U(t)$.

b. En déduire l'expression de $g(t)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend $\beta = 5$.

En **annexe 1, à rendre avec la copie**, on a représenté, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g définies dans les parties A et B avec $\beta = 5$.
On admet ici que pour tout nombre réel t positif ou nul :
$f(t) = 5\mathrm{e}^{-2t} + 5$ et $g(t) = 10 - 2\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)$.
On rappelle que f_∞ et g_∞ sont les limites respectives des fonctions f et g en $+\infty$.
On a donc : $f_\infty = 5$ et $g_\infty = 10$.

1. **a.** Vérifier que pour tout nombre réel t positif ou nul on a : $\dfrac{f(t) - f_\infty}{f_\infty} = \mathrm{e}^{-2t}$.

b. Soit t_1 le nombre réel tel que :

$$\frac{f(t) - f_\infty}{f_\infty} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Calculer la valeur exacte de t_1, puis une valeur approchée de t_1 arrondie au dixième.

2. Soit t_2 le nombre réel tel que :

$$-0,02 \leqslant \frac{g(t) - g_\infty}{g_\infty} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geqslant t_2.$$

Graphiquement, déterminer une valeur approchée de t_2, arrondie au dixième.

Dans ce problème, on a étudié un système entrée-sortie, dans la partie A libre de tout asservissement, puis dans la partie B contrôlé par une commande intégrale.
On a montré que grâce à cette commande on peut stabiliser la sortie à la valeur 10 indépendamment de la perturbation β, au prix d'une détérioration du temps de réponse du système et de l'apparition d'oscillations amorties.

Exercice 2 **8 points**

On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère un filtre dont la fonction de transfert T est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$T(\omega) = \frac{-\mathrm{j}\omega k}{1 - \mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}}.$$

Le nombre k est un nombre réel strictement positif compris entre 0 et 1.
En associant trois filtres identiques au précédent, on obtient un système dont la fonction de transfert H est définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$H(\omega) = (T(\omega))^3.$$

1. On note $r(\omega)$ le module de $H(\omega)$.
On a donc : $r(\omega) = |H(\omega)|$.

a. Montrer que le module de $T(\omega)$ est $\dfrac{k\omega}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4}}}$.

b. En déduire $r(\omega)$.

2. **a.** Justifier qu'un argument de $(-\mathrm{j}\omega)^3$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

Justifier qu'un argument de $1-\mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}$ est $-\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.

En déduire qu'un argument de $H(\omega)$, notée $\varphi(\omega)$, est défini sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

b. On note φ' la dérivée de la fonction φ. Calculer $\varphi'(\omega)$.
Déterminer le signe de φ' sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Déterminer les limites de la fonction φ en 0 et $+\infty$.

3. Dans le tableau ci-après on donne les variations de la fonction r sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
Recopier et compléter ce tableau en utilisant les résultats obtenus dans la question 2.

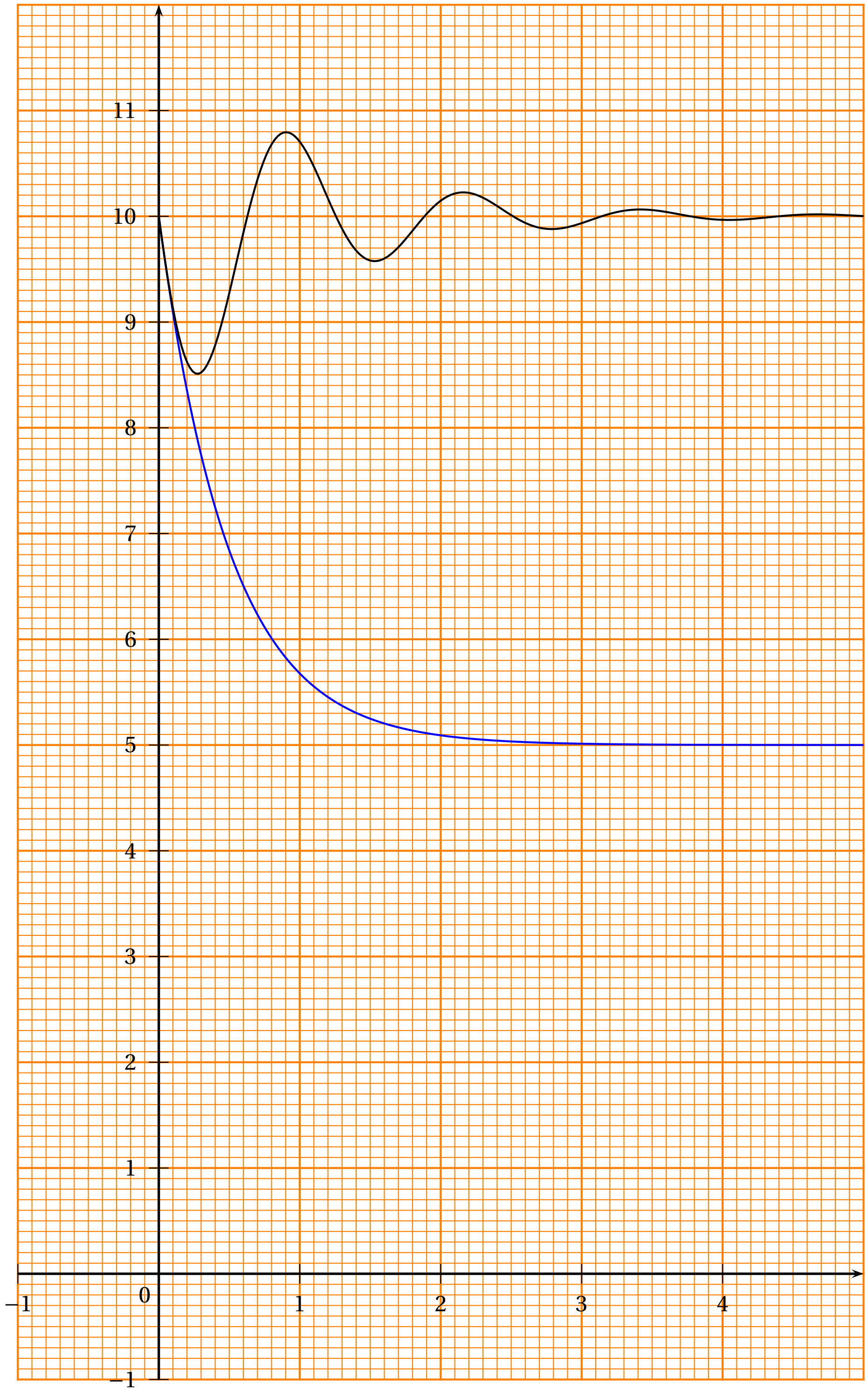
ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$		$+$	
$r(\omega)$		0 ↗	$8k^3$
$\varphi(\omega)$			
$\varphi'(\omega)$			

4. **Dans cette dernière question, on se place dans le cas où $k = 0,9$.**
Lorsque ω décrit l'intervalle $]0~;~+\infty[$, le point d'affixe $H(\omega)$ décrit une courbe $\mathscr{C}$.
En **annexe 2, à rendre avec la copie,** la courbe $\mathscr{C}$ est tracée dans le plan complexe.
On note ω_0 la valeur de ω pour laquelle le module de $H(\omega)$ est égal à 1.

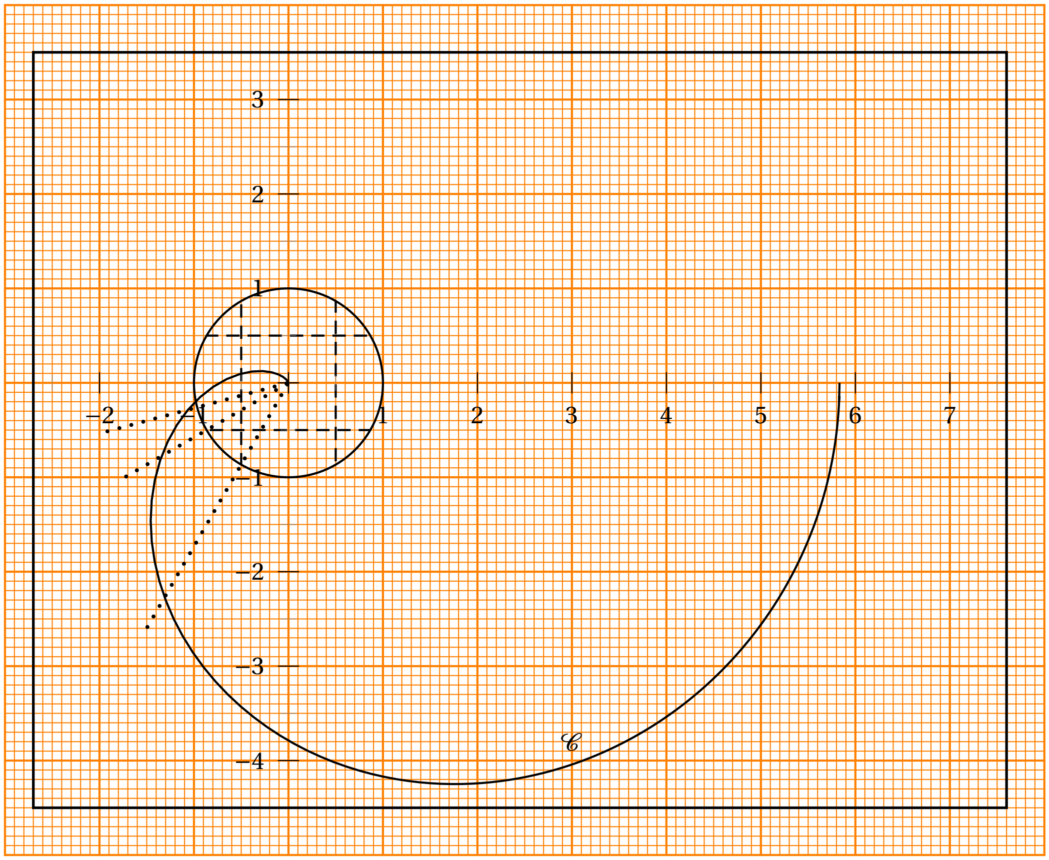
a. Placer précisément le point M_0 d'affixe $H(\omega_0)$ sur le document réponse donné en **annexe 2.**

b. Calculer une valeur arrondie à 10^{-2} près du nombre ω_0, puis de $\varphi(\omega_0)$.

Annexe 1
Document réponse à rendre avec la copie



Annexe 2
Document réponse à rendre avec la copie



Brevet de technicien supérieur session 2007
Groupement A1

Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Exercice 1 **12 points**

On s'intéresse à un système entrée-sortie susceptible d'être contrôlé.
Dans la partie A, on étudie le système en l'absence de contrôle.
Dans la partie B, on étudie le système soumis à un contrôle.
Les parties A, B et C sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 10 - \beta \quad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t et β une constante réelle.

1. Montrer que la fonction h définie pour tout nombre réel t par $h(t) = 10 - \beta$ est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
3. Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0) = 10$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \beta \mathrm{e}^{-2t} + 10 - \beta$.
4. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ que l'on note f_∞.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

et qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle pour tout nombre réel strictement négatif.

On considère la fonction causale g qui vérifie la relation (E_2) suivante :

$$\frac{1}{2}g'(t) + g(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,\mathrm{d}u + (10 - \beta)U(t) \quad (E_2)$$

et la condition $g(0) = 10$.

On admet que la fonction g admet une transformée de Laplace notée G.

1. Montrer que la transformée de Laplace I de la fonction i définie par :

   $$i(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,\mathrm{d}u$$

   est telle que

   $$I(p) = \frac{130}{p^2} - 13\frac{G(p)}{p}.$$

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de la relation (E_2), déterminer une expression de $G(p)$.
3. Vérifier que $G(p) = \dfrac{10}{p} - \dfrac{2\beta}{(p+1)^2 + 5^2}$.

4. Dans cette question, on va déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$, que l'on note g_{∞} et qui est la valeur finale du signal représenté par la fonction g.
On rappelle que, d'après le théorème de la valeur finale, $g_{\infty} = \lim\limits_{p \to 0^+} pG(p)$.
Déterminer g_{∞}.

5. a. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction qui à tout nombre réel t associe $\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)U(t)$.

b. En déduire l'expression de $g(t)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend $\beta = 5$.

En **annexe 1, à rendre avec la copie**, on a représenté, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g définies dans les parties A et B avec $\beta = 5$.
On admet ici que pour tout nombre réel t positif ou nul :
$f(t) = 5\mathrm{e}^{-2t} + 5$ et $g(t) = 10 - 2\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)$.
On rappelle que f_{∞} et g_{∞} sont les limites respectives des fonctions f et g en $+\infty$.
On a donc : $f_{\infty} = 5$ et $g_{\infty} = 10$.

1. a. Vérifier que pour tout nombre réel t positif ou nul on a : $\dfrac{f(t) - f_{\infty}}{f_{\infty}} = \mathrm{e}^{-2t}$.

b. Soit t_1 le nombre réel tel que :

$$\frac{f(t) - f_{\infty}}{f_{\infty}} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Calculer la valeur exacte de t_1, puis une valeur approchée de t_1 arrondie au dixième.

2. Soit t_2 le nombre réel tel que :

$$-0,02 \leqslant \frac{g(t) - g_{\infty}}{g_{\infty}} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geqslant t_2.$$

Graphiquement, déterminer une valeur approchée de t_2, arrondie au dixième.

Dans ce problème, on a étudié un système entrée-sortie, dans la partie A libre de tout asservissement, puis dans la partie B contrôlé par une commande intégrale.
On a montré que grâce à cette commande on peut stabiliser la sortie à la valeur 10 indépendamment de la perturbation β, au prix d'une détérioration du temps de réponse du système et de l'apparition d'oscillations amorties.

Exercice 2 **8 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de **manière indépendante**.

Le fournisseur d'accès Internet Mathoile propose des abonnements comportant la fourniture d'un modem ADSL. On appelle p la proportion de modems défectueux parmi ceux fournis aux clients.
Dans tout l'exercice, on considère que p est aussi la probabilité pour un client donné de recevoir un modem défectueux.
Une association de consommateurs lance une enquête auprès des abonnés à sa revue pour estimer leur degré de satisfaction concernant leur abonnement ADSL. On appelle p' la proportion de modems défectueux parmi ceux qui ont été fournis aux abonnés à la revue, clients de Mathoile.

Partie A : estimation de p'

Parmi les réponses à l'enquête reçues par l'association, 428 concernent des abonnés, clients du fournisseur d'accès Mathoile. Sur ces 428 abonnés, 86 déclarent avoir reçu un modem défectueux.

1. On note f_e la proportion de modems défectueux chez les abonnés, également clients de Mathoile, ayant répondu à l'enquête.
   Donner la valeur exacte de f_e, puis sa valeur arrondie au centième.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à un lot de n modems, pris au hasard parmi ceux fournis par Mathoile dans la population des abonnés à la revue, associe la fréquence d'appareils défectueux.
   On peut admettre, n étant assez grand, que la variable aléatoire F suit une loi normale de moyenne p' et d'écart type $\sigma = \sqrt{\dfrac{p'\left(1-p'\right)}{n}}$.
   Dans cette situation, l'écart type σ de la variable aléatoire F peut être approché par $\sqrt{\dfrac{f_e\left(1-f_e\right)}{n}}$.

   Les responsables de la revue font le raisonnement suivant : « le grand nombre de réponses reçues à notre enquête par les abonnés à notre revue, clients de Mathoile, est un échantillon pris au hasard dans l'ensemble de nos abonnés qui ont reçu un modem Mathoile ». Dans cette hypothèse, déterminer un intervalle de confiance de p',avec un coefficient de confiance de $0,95$.

Partie B : test de validité d'hypothèse

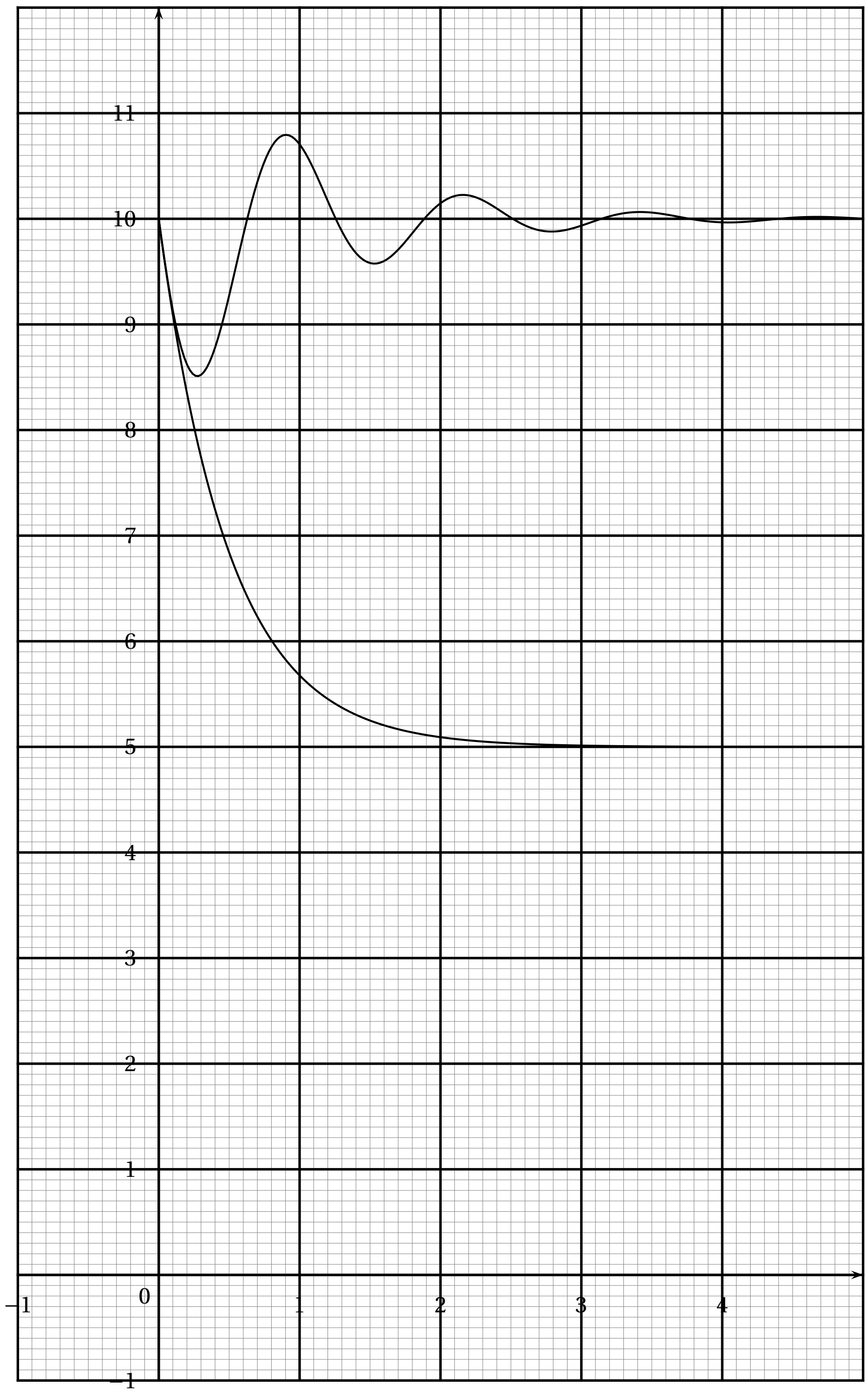
Le fournisseur d'accès Mathoile réfute que l'estimation de la proportion p' de modems défectueux obtenue dans la partie A puisse s'appliquer à l'ensemble de sa production.
Il considère en effet que l'échantillon des personnes qui ont répondu à l'enquête n'est pas représentatif de sa clientèle.
Ce fournisseur contacte alors un organisme indépendant qui procède à son tour à une enquête en interrogeant 400 clients Mathoile choisis de manière aléatoire.

On appelle G la variable aléatoire qui, à un échantillon de 400 modems, associe la fréquence d'appareils défectueux dans cet échantillon. À partir de cette enquête, on souhaite tester, au seuil de 5 %, l'hypothèse nulle H_0 : « la probabilité p est égale à 0,16 » contre l'hypothèse alternative H_1 : « la probabilité p est inférieure à $0,16$ ».

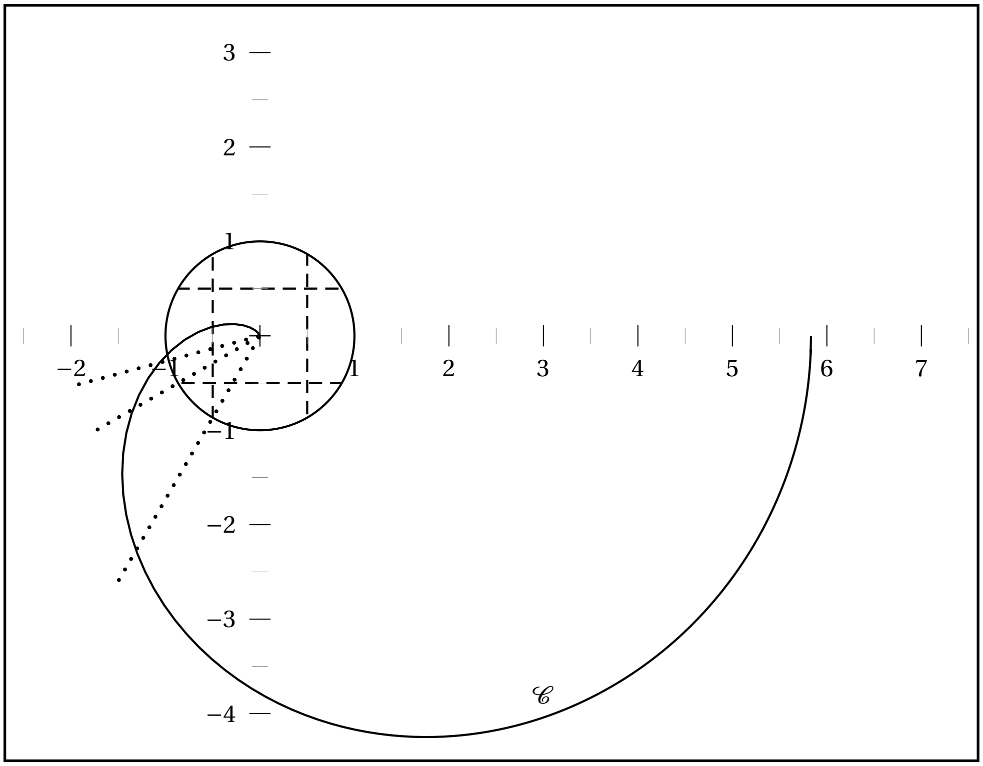
1. On peut supposer, **sous l'hypothèse nulle**, que G suit une loi normale de moyenne $0,16$ et d'écart type $s = \sqrt{\dfrac{0,16(1-0,16)}{400}}$.
   Soit a le nombre réel tel que : $p(G < 0,16 - a) = 0,05$.
   Montrer qu'une valeur arrondie à 10^{-1} du nombre a est égale à $0,030$.
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. Sur 400 personnes interrogées, 48 déclarent avoir reçu un modem défectueux.
   Quelle est la conclusion du test ?

L'estimation de la partie A repose sur un échantillon non aléatoire et, sans doute, pas représentatif des clients du fournisseur Mathoile.
En revanche, dans la partie B, la méthodologie de construction du test est acceptable.

Annexe 1
Document réponse à rendre avec la copie



Annexe 2
Document réponse à rendre avec la copie



Brevet de technicien supérieur session octobre 2006 Groupement A Nouvelle–Calédonie

Exercice 1 **8 points**

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et telle que :

$$\left\{\begin{array}{lllll}\varphi(t) & = & t & \text{si} & 0 \leqslant t < \pi\\ \varphi(t) & = & 0 & \text{si} & \pi \leqslant t < 2\pi\end{array}\right.$$

On note $S(t)$ développement de Fourier associé à la fonction φ ; les coefficients de Fourier associés à la fonction φ sont notés $a_0,\ a_n,\ b_n$ où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Représenter graphiquement la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 4\pi]$.

2. **a.** Calculer a_0, la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.

b. On rappelle que pour une fonction f, périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une période est donné par : $\mu_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

Montrer que μ_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période est égal à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

3. Montrer que. pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on a : $a_n = \dfrac{1}{\pi n^2}[\cos(n\pi) - 1]$.

On admet que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on a : $b_n = -\dfrac{\cos(n\pi)}{n}$.

4. On considère la fonction S_3 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)]$$

où les nombres $a_0,\ a_n,\ b_n$ sont les coefficients de Fourier associes à la fonction φ définie précédemment.

a. Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\dfrac{2}{9\pi}$	$\dfrac{1}{3}$

b. Calculer la valeur exacte de $S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ puis donner la valeur approchée de $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ arrondie à 10^{-2}.

5. On rappelle la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3.

$$\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\left[a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2\right]$$

a. Calculer la valeur exacte de μ_3^2.

b. Calculer la valeur approchée de $\dfrac{\mu_3^2}{\mu_{\text{eff}}^2}$ arrondie à 10^{-2}.

Exercice 2 **12 points**

Dans ce problème, on s'intéresse à un filtre modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} s'(t)+s(t) & = & e(t) \\ s(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

La fonction e représente l'entrée aux bornes du filtre et la fonction s la sortie.
On admet que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace respectivement notées E et S. La fonction de transfert H du filtre est définie par :

$$S(p) = H(p) \times E(p).$$

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie par :

$$\left\{\begin{array}{rclll} U(t) & = & 0 & \text{si} & t<0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si} & t \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Partie A

1. Montrer que : $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.
2. La fonction e est définie par : $e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$.

   a. Représenter graphiquement la fonction e.

   b. Montrer que : $E(p) = \dfrac{1}{p^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right)$.

   c. En déduire $S(p)$.

   d. Déterminer les nombres réels $a,\ b$ et c tels que :

   $$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1}$$

   e. En déduire l'original s de S.

   f. Vérifier que :

   $$\left\{\begin{array}{rcll} s(t) & = & 0 & \text{si}\quad t<0 \\ s(t) & = & t-1+\mathrm{e}^{-t} & \text{si}\quad 0 \leqslant t < 1 \\ s(t) & = & 1+(1-\mathrm{e})\mathrm{e}^{-t} & \text{si}\quad 1 \leqslant t \end{array}\right.$$

3. **a.** Comparer $s\left(1^-\right)$ et $s\left(1^+\right)$.

   b. Calculer $s'(t)$ et étudier son signe sur les intervalles $]0\,;\ 1[$ et $]1\,;\ +\infty[$.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $]0\ :\ +\infty[$.

   d. Déterminer la limite de la fonction s en $+\infty$.

Partie B

On note j le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On prend $p = \mathrm{j}\omega$ où ω désigne un nombre réel positif. On a alors : $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$.

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 10 cm.

1. Montrer que l'ensemble (Δ) des points m d'affixe $z = 1+\mathrm{j}\omega$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ est une demi-droite que l'on caractérisera.
2. Quel est l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M d'affixe $Z = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$?
3. Représenter, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ les ensembles (Δ) et $(\mathscr{C})$.

Brevet de technicien supérieur
session 2008 - groupement A (électrotechnique)

Exercice 1 **11 points**

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4\,[U(t) - U(t-2)]$$

a. Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.

b. On note E la transformée de Laplace de la fonction e.
Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0$$

On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S.
Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right)$$

3. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}}$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. **a.** Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

b. Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ s(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

6. **a.** Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2[$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 2 \\ t<2}} s(t)$.

7. a. Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Exercice 2 **9 points**

Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par E un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,3[$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t)=\begin{cases} E\times t & \text{si } 0\leqslant t<1\\ (3-E)t+2E-3 & \text{si } 1\leqslant t<2\\ 3 & \text{si } 2\leqslant t\leqslant \dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Partie A :
Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie,** on se place dans le cas où $E=2$.

1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0\,;\,1[$, $[1\,;\,2[$ et $\left[2\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,10]$.

Partie B :

Dans cette **partie,** on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.
On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.
On note $S(t)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right)$.

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0=2\dfrac{E+3}{5}$.
2. Déterminer b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. a. Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-1\right).$$

   b. On a calculé les intégrales $\int_1^2 f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$ et $\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$.
   On a ainsi obtenu pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t=\frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

   En déduire que pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$a_n=\frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelleu_n l'harmonique de rang n.
   On a alors
   $u_n(t)=a_n\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t.

a. Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t.

b. On appelle E_0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t.

Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0.

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.
Un tel signal avec $u_3(t) = u_5(t) = 0$ *permettra :*

✓ *s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple*
✓ *s'il est associé à un transformateur, d'éviter les pertes*
✓ *s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.*

Brevet de technicien supérieur session 2008 - groupement A2

Exercice 1 **11 points**

On considère un système analogique « entrée-sortie » dans lequel le signal d'entrée est représenté par une fonction e et celui de sortie par une fonction s.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle surl'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

Les fonctions e et s sont des fonctions causales et on suppose qu'elles admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On suppose, dans le cadre de cette étude, que $H(p) = \dfrac{1}{1+2p}$ et $e(t) = U(t)$.

a. Déterminer $S(p)$.

b. Déterminer les réels α et β tels que $S(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{p + \frac{1}{2}}$.

c. En déduire $s(t)$.

2. On se propose d'approcher la fonction de transfert analogique H par la fonction de transfert numérique F telle que $F(z) = H\left(10\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = H\left(\dfrac{10z-10}{z+1}\right)$.

L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisés respectivement par deux signaux causaux discrets x et y, admettant des transformées en Z notées respectivement X et Y.

On se place toujours dans le cas où le signal d'entrée du système analogique est $\boldsymbol{U(t)}$.

Le signal d'entrée du système analogique est échantillonné au pas de $0{,}2$.

Ainsi, le signal d'entrée x du système numérique est défini par $x(n) = U(0{,}2n)$ pour tout nombre entier naturel n.

Les transformées en Z des signaux x et y vérifient $Y(z) = F(z) \times X(z)$.

a. Montrer que $F(z) = \dfrac{z+1}{21z-19}$.

b. Déterminer $X(z)$.

c. Vérifier que $Y(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{20}{21}\left(\dfrac{z}{z-\frac{19}{21}}\right)$.

En déduire l'expression $y(n)$, pour tout nombre entier naturel n.

3. Compléter, sur **l'annexe, à rendre avec la copie,** le tableau en donnant des valeurs approchées à 10^{-3} près des résultats demandés.

La méthode utilisée dans l'exercice 1, pour discrétiser le système analogique, est souvent appelée transformation bilinéaire. Dans le cadre de l'exemple étudié, nous observons que cette transformation préserve la stabilité du système et que les signaux de sortie analogique et numérique convergent vers la même limite.

Exercice 1 **11 points**

Spécialités électrotechnique et génie optique

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4\left[U(t) - U(t-2)\right]$$

a. Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.

b. On note E la transformée de Laplace de la fonction e.
Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0$$

On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S.
Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right)$$

3. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}}$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\dfrac{1}{p + \frac{1}{4}}$	$\dfrac{1}{p + \frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. **a.** Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

b. Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ s(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

6. **a.** Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2[$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 2 \\ t < 2}} s(t)$.

7. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Exercice 3 **9 points**

Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par E un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,3[$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t)=\begin{cases} E\times t & \text{si } 0\leqslant t<1\\ (3-E)t+2E-3 & \text{si } 1\leqslant t<2\\ 3 & \text{si } 2\leqslant t\leqslant \dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Partie A :
Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie,** on se place dans le cas où $E=2$.

1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0;\,1[$, $[1\,;\,2[$ et $\left[2;\,\frac{5}{2}\right]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5;\,10]$.

Partie B :
Dans cette **partie,** on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.
On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.
On note $S(t)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right)$.

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0=2\dfrac{E+3}{5}$.
2. Déterminer b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. **a.** Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t=\frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-1\right).$$

   b. On a calculé les intégrales $\displaystyle\int_1^2 f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$.
   On a ainsi obtenu pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t=\frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

   En déduire que pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$a_n=\frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelle u_n l'harmonique de rang n.
   On a alors $u_n(t)=a_n\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t.
   a. Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t.
   b. On appelle E_0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t.
   Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0.

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.
Un tel signal avec $u_3(t) = u_5(t) = 0$ *permettra :*
✓ *s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple*
✓ *s'il est associé à un transformateur, d'éviter les pertes*
✓ *s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.*

Annexe
à rendre avec la copie

n	$y(n)$	$t = 0,2n$	$s(t)$
0		0	
1		0,2	
5		1	
10		2	
15		3	
20		4	
25		5	
50		10	

Brevet de technicien supérieur Nouvelle–Calédonie novembre 2007 - groupement A

Exercice 1 **9 points**

On considère la fonction numérique paire, 2π-périodique, définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} f(t) & = & \cos(t) & \text{si} & 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2}\\ f(1) & = & 0 & \text{si} & \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{array}\right.$$

On a tracé en pointillé sur le document-réponse la courbe representative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$.

1. Représenter. sur le document réponse à rendre avec la copie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$.
2. On admet que la fonction f satisfait aux conditions d'application du théorème de Dirichlet et, par conséquent qu'elle est décomposable en série de Fourier. On note :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right]$$

la série de Fourier associée à la fonction f.

   a. Donner la valeur de b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

   b. Calculer a_0.

   c. Calculer a_1.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left[(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{n-1} + \frac{\sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{n+1}\right)$$

3. On note $S_1(t)$ la série de Fourier associée à la fonction f tronquée au rang 1. On a donc : $S_1(t) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\cos t$.
   À partir de la courbe représentative de la fonction cosinus tracer sur le document réponse la courbe représentant la fonction S_1 sur l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$.
   On laissera figurer les tracés intermédiaires.

Exercice 2 **11 points**

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} f''(t) + \dfrac{6}{5}f'(t) + f(t) & = & 1 & \text{pour tout nombre réel } t\\ f(0) & = & 0 & \\ f'(0) & = & 0 & \end{array}\right.$$

1. Dans cette question on détermine une expression de $f(t)$.

   a. Résoudre l'équation différentielle (E)

$$y''(t) + \frac{6}{5}y'(t) + y(t) = 0 \quad \text{(E)}$$

   dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle t.

b. En déduire que la fonction f est définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}\left[\cos\left(\frac{4}{5}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{4}{5}t\right)\right].$$

2. Dans cette question on détermine la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

a. Justifier que, pour tout nombre réel t, on a :

$$-\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}\cos\left(\frac{4}{5}t\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}$$

b. En déduire que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}\cos\left(\frac{4}{5}t\right) = 0$$

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. **a.** Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t.

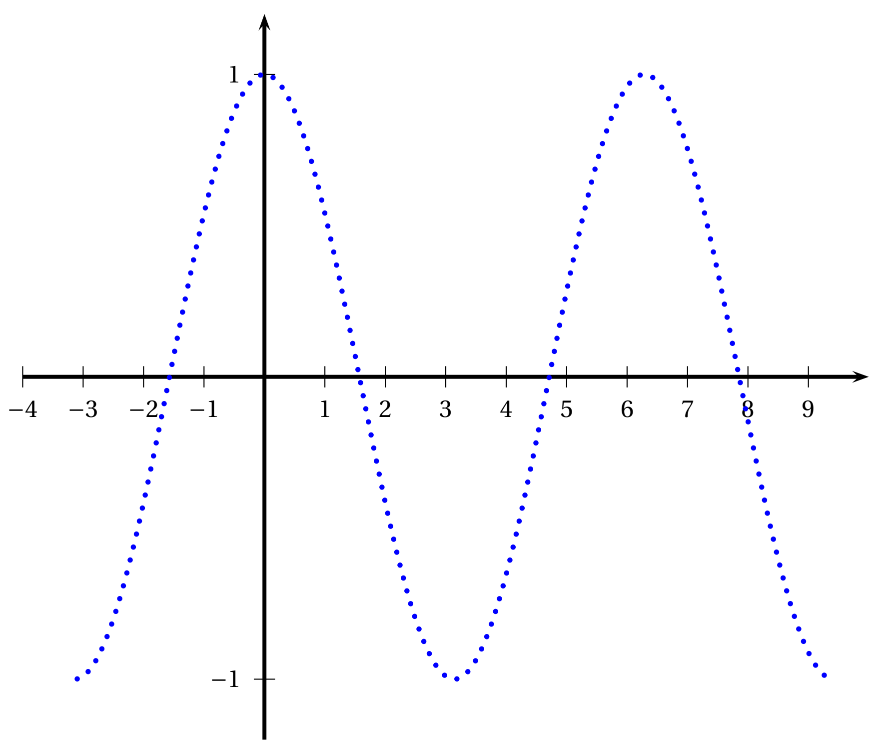
b. Montrer que : $f'(t) = 0$ équivaut à $t = \dfrac{5k\pi}{4}$, où k désigne un nombre entier relatif.

c. On note pour tout nombre entier relatif k, $t_k = \dfrac{5k\pi}{4}$ et on pose

$D_k = \left|f(t_k) - 1\right|$.

Montrer que : $D_k = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}k\pi}$.

Document-réponse à rendre avec la copie



Brevet de technicien supérieur
Métropole–Polynésie session 2009 - groupement A1

Exercice 1 **9 points**

Cet exercice se compose de trois parties qui peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
On s'intéresse aux requêtes reçues par le serveur web d'une grande entreprise, provenant de clients dispersés sur le réseau Internet.
La réception de trop nombreuses requêtes est susceptible d'engendrer des problèmes de surcharge du serveur.

Partie A :

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre de requêtes reçues par le serveur, au cours de certaines durées jugées critiques.
On désigne par τ un nombre réel strictement positif. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de requêtes reçues par le serveur dans un intervalle de temps de durée τ (exprimée en secondes). La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500\tau$.

1. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0,01$.

   Déterminer la probabilité que le serveur reçoive au plus une requête au cours d'une durée τ de 0,01 s.

   En expliquant votre démarche, détenniner le plus petit entier naturel n_0 tel que $p(X > n_0) < 0,05$.

   Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0,2$.

   On rappelle que la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100$ peut être approchée par la loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 10$.

   En utilisant cette approximation, calculer :

   a. la probabilité $P(X > 120)$;

   b. une valeur approchée du nombre réel positif a tel que $P(100 - a \leqslant X \leqslant 100 + a) = 0,99$.

Partie B :

Dans cette partie, on considère :
- d'une part, que la probabilité pour le serveur de connaître des dysfonctionnements importants au cours d'une journée donnée est $p = 0,01$;
- d'autre part, que des dysfonctionnements importants survenant au cours de journées distinctes constituent des évènements aléatoires indépendants.

1. On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'un mois de 30 jours.

   a. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.

   b. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le serveur connaisse au plus 2 jours de dysfonctionnements importants pendant un mois.

2. On appelle Z la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'une année de 365 jours.

   a. Donner, sans justification, la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

b. Donner l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire Z.

Partie C :

Dans cette partie. on s'intéresse à la durée séparant deux requêtes successives reçues par le serveur.
On appelle T la variable aléatoire qui prend pour valeurs les durées (exprimées en secondes) séparant l'arrivée de deux requêtes successives sur le serveur.

1. On désigne par t un nombre réel positif. La probabilité que T prenne une valeur inférieure ou égale à t est donnée par : $p(T \leqslant t) = \int_0^t 500\text{e}^{-500x}\,\text{d}x$.

a. Calculer $P(T \leqslant t)$ en fonction de t.

b. En déduire la valeur de t pour laquelle $P(T \leqslant t) = 0,95$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millième de seconde.

2. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I(t) = \int_0^t 500x\text{e}^{-500x}\,\text{d}x.$$

b. Déterminer la limite m de $I(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
Le nombre m est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T. Il représente la durée moyenne séparant la réception de deux requêtes successives.

Commentaire :
Ce modèle, très simple, intéresse les concepteurs de systèmes d'information ou de télécommunication car il fournit des évaluations de certaines performances d'un système, en particulier au sens du « scénario du pire des cas ».

Exercice 2 **11 points**

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 *seconde.*
On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) &= &0 &\text{si } t < 0\\ U(t) &= &1 &\text{si } t \geqslant 0\end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty~;~0[$.

Partie A :

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_1(t) + \int_0^t s_1(u)\,\text{d}u = U(t).$$

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.
La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la **figure 1 du document réponse.**

Partie B :

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_2(t)+\int_0^t s_2(u)\,\mathrm{d}u = U(t)-U(t-1).$$

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_2(t)=U(t)-U(t-1).$$

2. Déterminer $S_2(p)$.

3. **a.** En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.

b. Justifier que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s_2(t) & = & 0 & \text{si } t<0\\ s_2(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1\\ s_2(t) & = & -\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) & \text{si } t\geqslant 1\end{array}\right.$$

4. Établir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

5. Calculer $s_2\left(1^+\right)-s_2\left(1^-\right)$.

6. On appelle $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction s_2.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$					

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b. Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$ sur la figure 2 du document réponse, à rendre avec la copie.

Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_3(t)+\int_0^t s_3(u)\,\mathrm{d}u = U(t)-U(t-1)+U(t-1,1).$$

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par :
$e_3(t)=U(t)-U(t-1)+U(t-1,1)$.

a. Montrer que $e_3(t)=e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,1,1[$.

b. Déterminer $e_3(t)$ pour $t\geqslant 1,1$.

c. Représenter graphiquement la fonction e_3.

Pour la suite, on admet que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s_3(t) & = & s_2(t) & \text{si } t<1,1\\ s_3(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1,1}\right) & \text{si } t\geqslant 1,1.\end{array}\right.$$

2. Établir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1,1\,;\,+\infty[$.

3. Calculer $s_3\left(1,1^+\right)-s_3\left(1,1^-\right)$.

4. On appelle $\mathscr{C}_3$ la courbe représentative de la fonction s_3.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1,1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$				

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b. Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}_3$ sur la figure 3 du document réponse, à rendre avec la copie.

Brevet de technicien supérieur session 2009 - groupement A2

Exercice 1 **9 points**

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

1. On considère un entier n strictement positif. Montrer que :

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}.$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\displaystyle\int_0^1 \sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, telle que :

$$\begin{cases} f(t) &= t \text{ sur } [0~;~1[\\ f(t) &= 0 \text{ sur } [1~;~2[\end{cases}.$$

a. En utilisant le document réponse n° 1, à rendre avec la copie, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4~;~4]$.

b. On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f. On note $S_f(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)\right)$.

Calculer a_0.

Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n, et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right).$$

c. Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par $\mu_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 \left(f(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$.

d. Recopier et compléter, avec les valeurs exactes le tableau

n	1	2	3
a_n			
b_n			

e. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par :

$$A = \frac{a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}{\mu_{\text{eff}}^2}.$$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est tracée sur l'intervalle $[-4~;~4]$ dans le document réponse n° 1.

On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g, est défini par $S_g(t) = S_f(-t)$.

Justifier que :

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right).$$

4. Soit h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2, telles que : $h(t) = f(t) + g(t)$ et $k(t) = f(t) - g(t)$ pour tout nombre t.

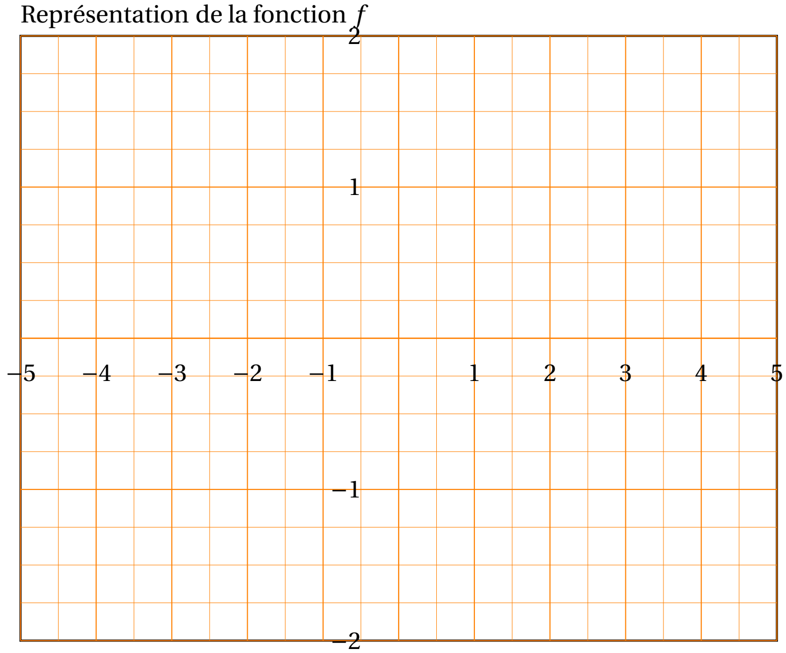
a. Sur le document réponse n° 1, à rendre avec la copie, tracer les courbes $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.

b. On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k, sont définis par :

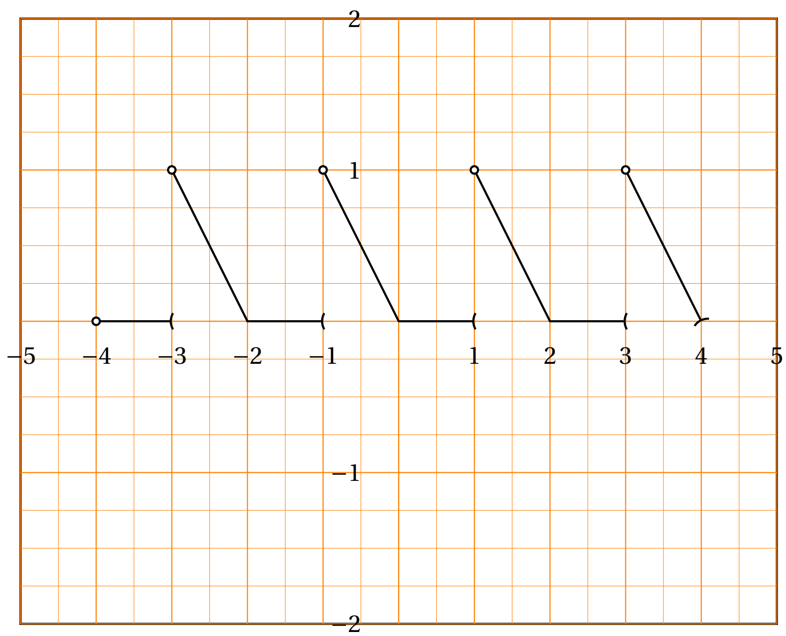
$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) \quad \text{et} \quad S_k(t) = S_f(t) - S_g(t).$$

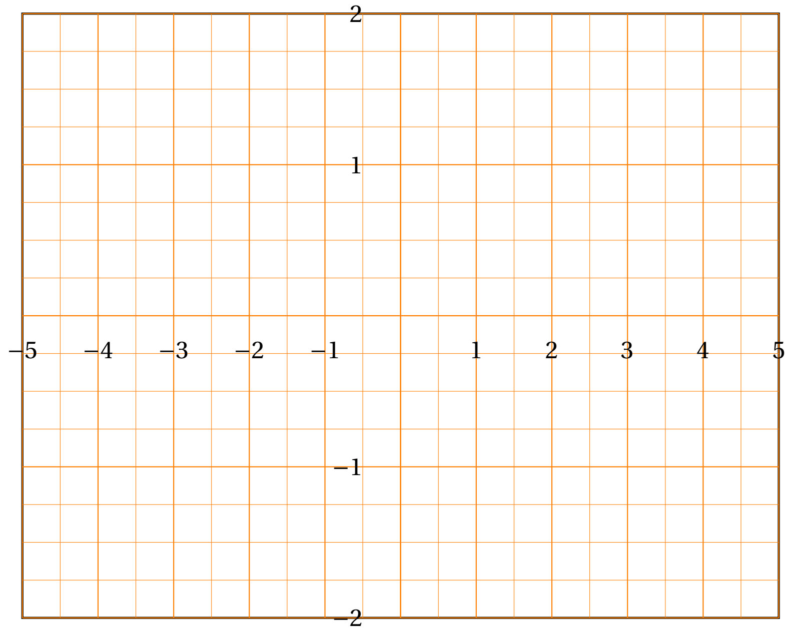
Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k.

Représentation de la fonction f

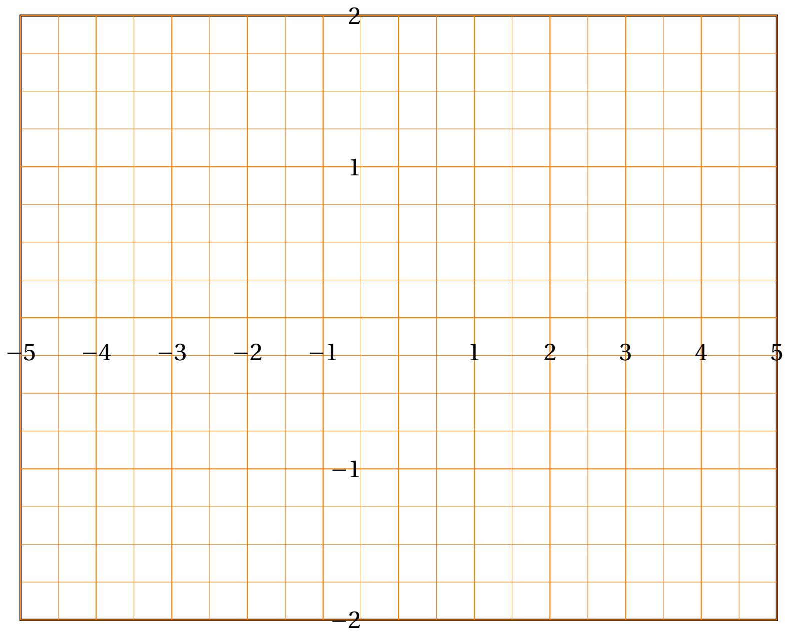


Représentation de la fonction g


2
1
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−1
−2



Représentation de la fonction h
Représentation de la fonction k



Exercice 2 **11 points**

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 *seconde.*

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl l} U(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

Partie A :

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_1(t) + \int_0^t s_1(u)\,\mathrm{d}u = U(t).$$

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.
La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la **figure 1 du document réponse.**

Partie B :

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_2(t) + \int_0^t s_2(u)\,\mathrm{d}u = U(t) - U(t-1).$$

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_2(t) = U(t) - U(t-1).$$

2. Déterminer $S_2(p)$.

3. **a.** En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.

b. Justifier que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s_2(t) & = & 0 & \text{si } t < 0\\ s_2(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1\\ s_2(t) & = & -\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) & \text{si } t \geqslant 1\end{array}\right.$$

4. Établir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

5. Calculer $s_2\left(1^+\right) - s_2\left(1^-\right)$.

6. On appelle $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction s_2.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$					

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b. Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$ sur la figure 2 du document réponse, à rendre avec la copie.

Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_3(t) + \int_0^t s_3(u)\,\mathrm{d}u = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1).$$

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par :
$e_3(t) = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1)$.

a. Montrer que $e_3(t) = e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,1,1[$.

b. Déterminer $e_3(t)$ pour $t \geqslant 1,1$.

c. Représenter graphiquement la fonction e_3.

Pour la suite, on admet que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s_3(t) & = & s_2(t) & \text{si } t < 1,1\\ s_3(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1,1}\right) & \text{si } t \geqslant 1,1.\end{array}\right.$$

2. Établir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1,1\ ;\ +\infty[$.

3. Calculer $s_3\left(1,1^+\right) - s_3\left(1,1^-\right)$.

4. On appelle $\mathcal{C}_3$ la courbe représentative de la fonction s_3.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1,1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$				

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b. Compléter le tracé de la courbe $\mathcal{C}_3$ sur la figure 3 du document réponse, à rendre avec la copie.

Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 2)

Figure 1 : représentation de la fonction s_1

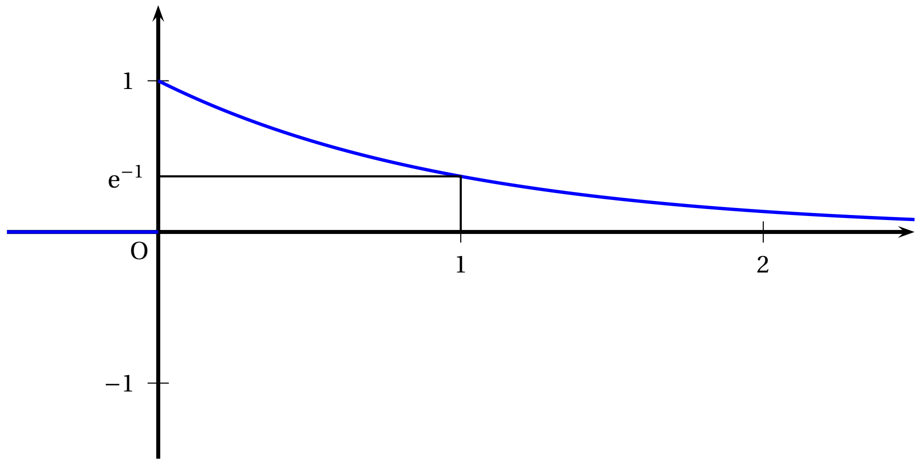


Figure 2 : représentation de la fonction s_2

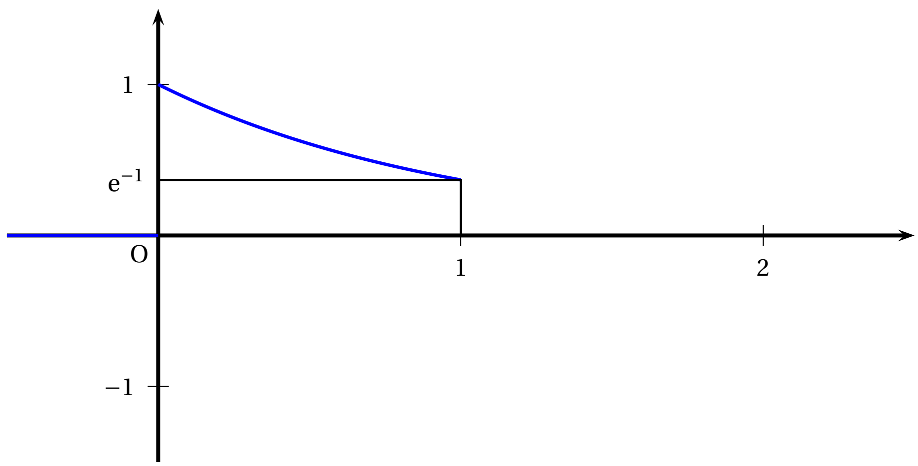
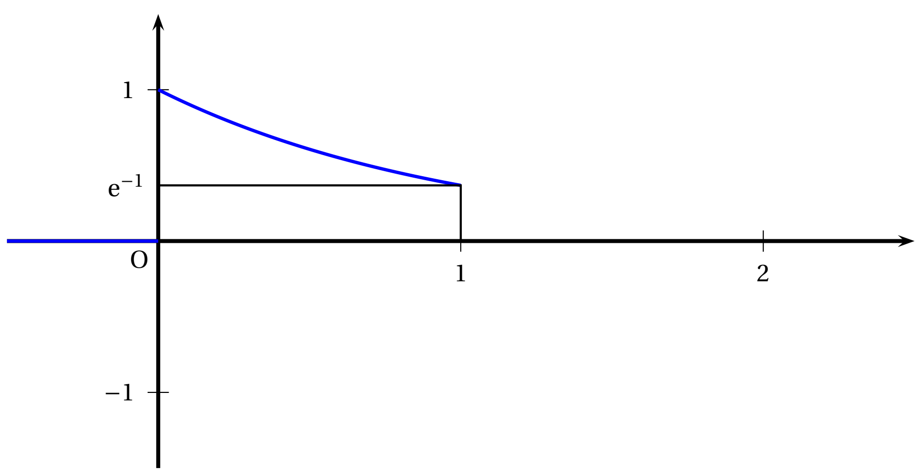


Figure 3 : représentation de la fonction s_3



Brevet de technicien supérieur novembre 2008 - groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **12 points**

On désigne par α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

On considère la fonction f définie sur R, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\left\{\begin{array}{lclll} f(t) & = & 1 & \text{si} & 0 \leqslant t \leqslant \alpha \\ f(t) & = & 0 & \text{si} & \alpha < t < \pi - \alpha \\ f(t) & = & -1 & \text{si} & \pi - \alpha \leqslant t \leqslant \pi \end{array}\right.$$

1. **Dans cette question**, le nombre réel α vaut $\dfrac{\pi}{3}$.

   Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

2. On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f

   On note $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$.

   Le but de cette question est de calculer les coefficients de la série de Fourier S pour une valeur x quelconque du nombre réel α tel que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

   a. Calculer a_0, valeur moyenne de la fonction f sur une période.

   b. Déterminer b_n, n désignant un nombre entier naturel strictement positif.

   c. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

   $$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\sin(n\alpha).$$

3. Déterminer la valeur α_0 de α pour laquelle on $a_3 = 0$.

4. **Pour toute la suite de l'exercice**, on se place dans le cas où $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

   Rappels :

   Si h désigne une fonction périodique de période T, le carré de la valeur efficace H de la fonction h sur une période est :

   $$H^2 = \frac{1}{T}\int_r^{r+T} [h(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

   r désignant un nombre réel quelconque.

   Si les coefficients de Fourier de la fonction h sont a_0, a_n et b_n alors :

   $$\frac{1}{T}\int_r^{r+T} [h(t)]^2\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \quad \text{formule de Parseval}$$

   a. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.

   b. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par :

   $$g(t) = a_0 + a_1\cos(t) + b_1 \sin t + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t).$$

   Montrer que $g(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos(t)$ pour tout nombre réel t.

   c. Calculer G^2, carré de la valeur efficace de la fonction g sur une période.

d. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient $\dfrac{G^2}{F^2}$.

Ce dernier résultat montre que la fonction g constitue une assez bonne approximation de la fonction f.

Exercice 2 **10 points**

On s'intéresse à un système entrée-sortie.
Dans les parties A et B, on étudie la réponse de ce système à deux entrées différentes.
Les parties A et B sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$y''(t) + 4y(t) = 8 \quad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t.

1. **a.** Donner la solution particulière constante de l'équation différentielle (E_1).
   b. Déterminer la solution générale de l'équation (E_1).
2. **a.** Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 2[1 - \cos(2t)].$$

   b. La fonction f est périodique. En donner une période.
   Préciser, sans justification, le maximum et le minimum de la fonction f.
   c. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U(t) & = & 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \\ U(I) & = & 1 \quad \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty~;~0[$.
On considère la fonction e définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$e(t) = 8\left[U(t) - U\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + U(t-\pi) - U\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

On considère la fonction causale g qui vérifie les conditions $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$, ainsi que la relation (E_2) suivante :

$$y''(t) + 4y(t) = e(t) \quad (E_2)$$

On admet que la fonction g possède une transformée de Laplace notée G.

1. **a.** Représenter la fonction e sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$.
   b. On appelle $\mathscr{E}$ la transformée de Laplace de la fonction e.
   Déterminer $\mathscr{E}(p)$.
2. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (E_2), montrer que :

$$G(p) = \frac{8}{p\left(p^2+4\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-p\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{-p\pi} - \mathrm{e}^{-p\frac{3\pi}{2}}\right).$$

b. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 2[1-\cos(2t)]U(t)$ a pour transformée de Laplace la fonction H définie par

$$H(p) = \frac{8}{p\left(p^2+4\right)}.$$

c. Donner une expression de la fonction g, en utilisant éventuellement la fonction h.

3. **a.** On donne les expressions de $g(t)$ sur les intervalles $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ et $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ +\infty\right[$:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} g(t) & = & -4\cos(2t) & \text{si} & t \in \left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[\\ g(t) & = & -8\cos(2t) & \text{si} & t \in \left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ +\infty\right[\end{array}\right.$$

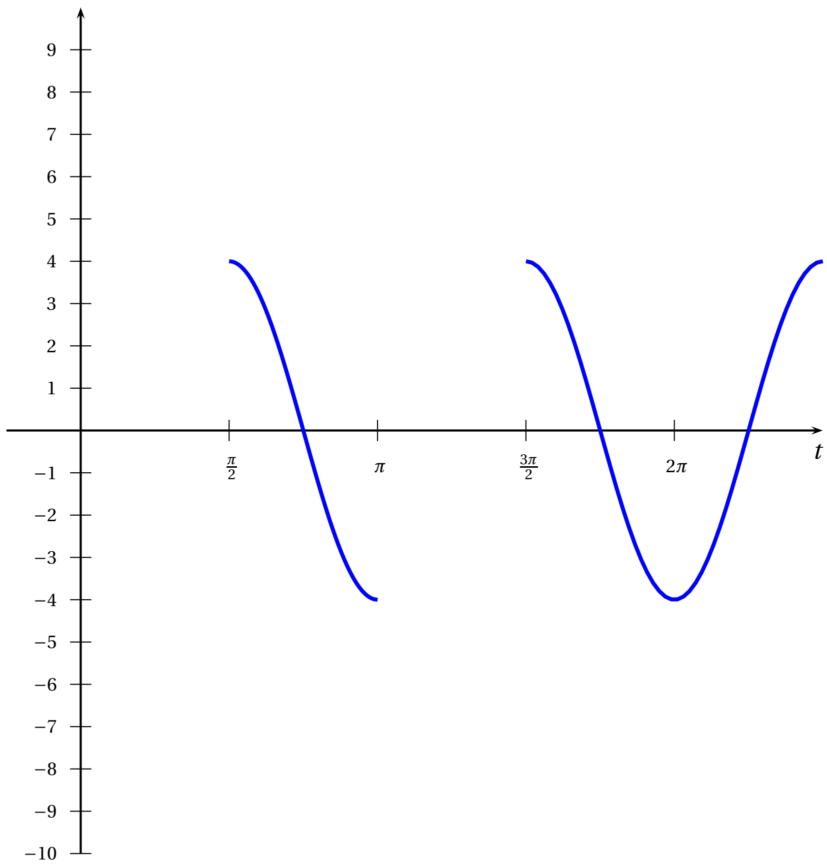
Donner des expressions similaires de $g(t)$ pour les intervalles $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left[\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[$.

b. On a représenté sur **l'annexe, à rendre avec la copie** la fonction g sur les intervalles $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ et $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Compléter le graphique en traçant la représentation graphique de g sur les intervalles $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left[\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[$.

Annexe

à rendre avec la copie



Brevet de technicien supérieur session 2010 - groupement A1

Exercice 1 **10 points**

Dans cet exercice, on se propose d'étudier dans la partie A une perturbation d'un signal continu et, dans la partie B, la correction de cette perturbation par un filtre analogique.

Partie A

Dans cet exercice, on note τ une constante réelle appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ et on considère les fonctions f et g définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, telles que :

- pour tout nombre réel t, $f(t) = 1$;
- la fonction g est périodique de période 2π et :

$$\left\{\begin{array}{lcll} g(t) & = & 0 & \text{si } 0 \leqslant t < \tau \\ g(t) & = & 1 & \text{si } \tau \leqslant t < 2\pi \end{array}\right.$$

Pour tout nombre réel t, on pose :

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

La fonction h ainsi définie représente la perturbation du signal.

1. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées sur le **document réponse n° 1**. (figures 1 et 2).

Sur la figure 3 du **document réponse n° 1**, tracer la représentation graphique de la fonction h.

2. On admet que la fonction h est périodique de période 2π.

Pour tout nombre réel t, on définit la série de Fourier $S(t)$ associée à la fonction h par

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

a. Déterminer a_0.

b. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
Calculer

$$\int_0^{\tau} \cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire que

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sin(n\tau).$$

c. Montrer que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1,

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos(n\tau)\right).$$

3. Soit n un nombre entier naturel. On associe à n le nombre réel A_n tel que :

- $A_0 = a_0$
- $A_n = \sqrt{\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$ si n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $A_n = \dfrac{1}{n\pi}\sqrt{1-\cos(n\tau)}$.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que $\tau = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Compléter le **tableau 1** du **document réponse n° 2** avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.
5. La valeur efficace h_{eff} de la fonction h est telle que :

$$h_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [h(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

   a. Calculer h_{eff}^2.

   b. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel P défini par $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{3} A_n^2$.

   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du quotient $\dfrac{P}{h_{\text{eff}}^2}$.

Partie B

On rappelle que j est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère la fonction de transfert H définie, pour tout nombre complexe p différent de $-\dfrac{3}{2}$ par :

$$H(p) = \frac{3}{2p+3}.$$

On définit la fonction r, pour tout nombre réel positif ω, par :

$$r(\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|.$$

Le but de cette partie est de déterminer le spectre d'amplitude du signal, noté k, obtenu en filtrant la perturbation h au moyen d'un filtre dont la fonction de transfert est H.

1. Montrer que $r(\omega) = \dfrac{3}{\sqrt{9+4\omega^2}}$.
2. Pour tout nombre entier naturel n, on définit le nombre réel positif B_n par :

$$B_n = r(n) \times A_n,$$

   où A_n est le nombre réel positif défini dans la question 3 de la partie A.

   Compléter le tableau 2 du **document réponse n° 2**, avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

   Le spectre d'amplitude du signal filtré k est donné par la suite des nombres réels B_n.

3. La figure 4 sur le **document réponse n° 2** donne le spectre d'amplitude de la perturbation h, c'est-à-dire une représentation graphique de la suite des nombres réels A_n.

   Sur la figure 5 du **document réponse n° 2**, on a commencé de même à représenter la suite des nombres réels B_n.

   Compléter cette représentation graphique à l'aide du tableau de valeurs n° 2 du document réponse n° 2.

4. Une valeur approchée à 10^{-4} près du carré de la valeur efficace du signal k est $k_{\text{eff}}^2 \approx 0{,}0516$.

   a. CaLculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel Q défini par $Q = \sum_{n=0}^{3} B_n^2$.

   b. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près du quotient $\dfrac{Q}{k_{\text{eff}}^2}$.

On a étudié le spectre de Fourier d'une perturbatîon d'un signal. On ne peut pas négliger les raies de hautes fréquences de ce spectre. Le filtrage dissipe une part importante de l'énergie de la perturbation et les raies de hautes fréquences de la perturbation filtrée sont négligeables.

Exercice 2 **10 points**

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y(t) = e(t) \qquad (1),$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t) = 20$ pour tout nombre réel t. L'équation,différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t) + 4y(t) = 20 \qquad (2).$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de L'équation différentielle (2).
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (2).
3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (2) qui vérifie les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

Dqns cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t) = 8tU(t) - 8(t - \tau)U(t - 1).$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.
On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} U(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{array}\right. .$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.
On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t) + 4g(t) = e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(p)$ en fonction de p et de τ.

2. En déduire que :

$$G(p) = \frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right).$$

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p^2+4}.$$

4. Déterminer alors l'original de $\dfrac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$.

5. En déduire que, pour tout nombre t :

$$g(t) = g_0(t) - g_0(t-\tau) \quad \text{avec} \quad g_0(t) = (2t - \sin(2t))U(t).$$

6. Montrer que pour $t \geqslant \tau$, on a

$$g(t) = 2\tau - \sin(2t) + \sin(2t - 2\tau).$$

7. On suppose maintenant que $\tau = \pi$.

a. Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t \geqslant \tau$.

b. La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau = \pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n° 3**.

Sur le même graphique, tracer la coutbe représentative de la fonotion g.

Document réponse n° 1, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : courbe représentative de f

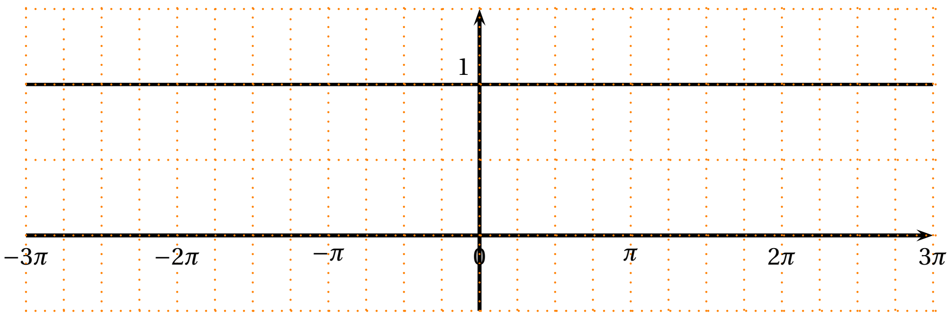


Figure 2 : courbe représentative de g

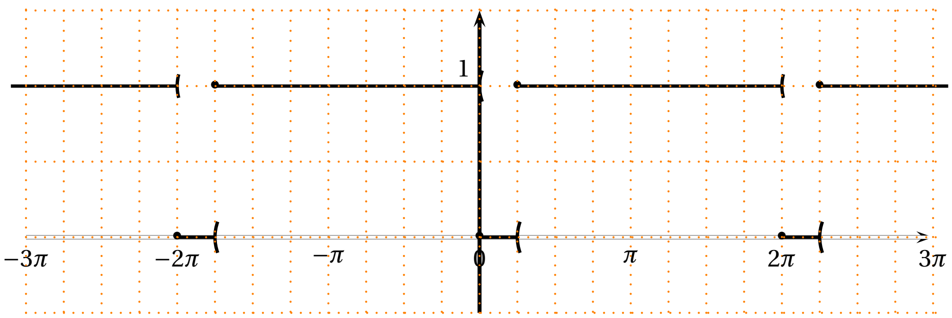
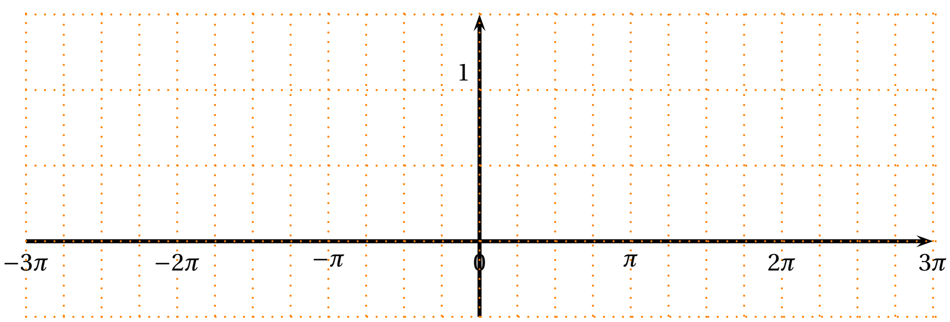


Figure 3 : courbe représentative de h



Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 1)

Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,125 00	0,172 27		0,138 63		0,083 18	0,053 05	0,024 61

n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n		0,019 14	0,031 83	0,037 81		0,031 99	0,022 74	0,011 48

Tableau 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n		0,143 34		0,062 00	0,039 52	0,023 90	0,012 87	0,005 16

n	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	0,000 00	0,003 15	0,004 72	0,005 11		0,003 87	0,002 42	0,001 14

Figure 4

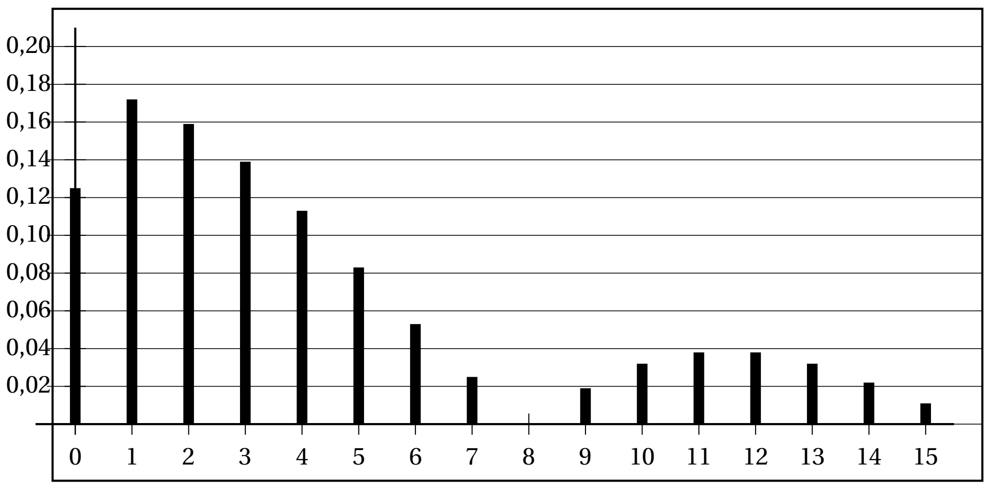
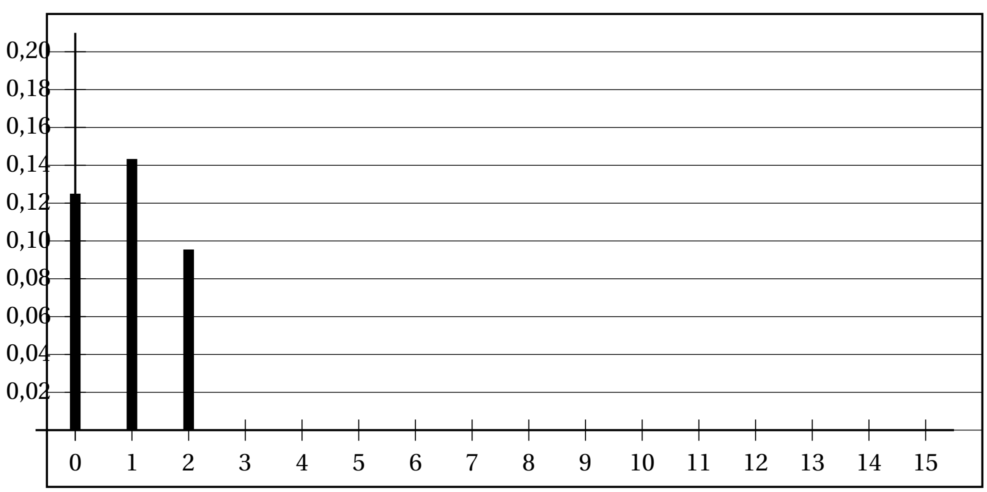
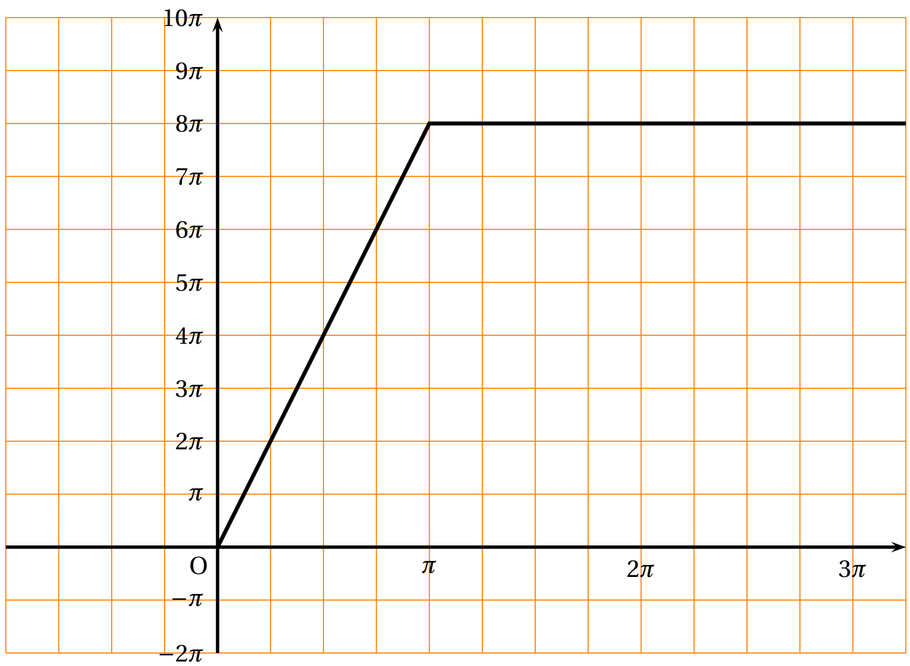


Figure 5



Document réponse n° 3, à rendre avec la copie (exercice 2)



Brevet de technicien supérieur session 2010 - groupement A2

Exercice 1 **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On rappelle qu'une courbe de Bézier associée à $n+1$ points de contrôle successifs A_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{OA_i} \quad \text{où } B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \text{ avec } t \in [0~;~1].$$

Partie A

L'objectif de cette partie est d'étudier la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ associée aux quatre points de contrôle successifs A(4 ; 0), 8(12 ; 6), R(0 ; 6) et 0(0 ; 0).

1. Développer, réduire et ordonner le polynôme $B_{2,\,3}(t)$.
2. On admet que :
$$\begin{array}{lcl} B_{0,3}(t) & = & -t^3+3t^2-3t+1 \\ B_{1,3}(t) & = & 3t^3-6t^2+3t \\ B_{3,3}(t) & = & t^3. \end{array}$$
Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f_1(t) = 32t^3-60t^2+24t+4 \\ y & = & g_1(t) = -18t^2+18t \end{array}\right. \quad \text{pour } t \in [0~;~1].$$
3. En utilisant la courbe $\mathscr{C}_1$ tracée sur le **document réponse n° 1**, compléter le tableau des variations conjointes des deux fonctions f_1 et g_1 figurant sur ce même document réponse.
4. Calculer la dérivée de la fonction g_1.
En déduire la valeur t_1 du paramètre t pour laquelle l'ordonnée du point $M(t)$ est maximale.
5. Déterminer la valeur t_0 du paramètre t pour laquelle l'abscisse du point $M(t)$ est maximale.
6. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est tangent à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.

Partie B

On désigne par a un nombre réel.
On souhaite compléter la figure du **document réponse n° 1** avec une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ en respectant les contraintes suivantes :

- les points de contrôle successifs de la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ sont O(0 ; 0), E(0 ; a), $F\left(\dfrac{4}{3}~;~-2\right)$ et A(4 ; 0) ;
- la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point $G\left(1~;~-\dfrac{3}{2}\right)$ pour la valeur $\dfrac{1}{2}$ du paramètre t.

Sous ce système de contraintes, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont des tangentes communes aux points A et O.

1. Dans les conditions énoncées ci -dessus ; la représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{C}_2$ est de la forme :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f_2(t) = 4t^2 \\ y & = & g_2(t) = 3(a+2)t^3-6(a+1)t^2+3at \end{array}\right. \quad t \in [0~;~1].$$
Montrer que $a = -2$.

2. Pour chaque valeur de t, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau), permet de construire, le point de paramètre t de la courbe de Bézier.

   Utiliser cet algorithme, pour la valeur $\dfrac{1}{2}$ du paramètre t, pour retrouver graphiquement la position du point G.

   Laisser apparentes les étapes de la construction.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur le **document réponse n° 1**.

Exercice 2 **10 points**

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y(t) = e(t) \quad (1),$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t) = 20$ pour tout nombre réel t. L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t) + 4y(t) = 20 \quad (2).$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle (2).
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (2).

   En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (2) qui vérifie les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin, on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t) = 8tU(t) - 8(t-\tau)U(t-\tau),$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.
On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} U(t) & = & 0 & \text{si} & t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si} & t \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.
On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t) + 4g(t) = e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'(0) = 0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(P)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(P)$ en fonction de p et de τ.

2. En déduire que :

$$G(p) = \frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right)$$

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p^2+4}$$

4. Déterminer alors l'original de $\dfrac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$

5. En déduire que, pour tout nombre réel t :

$$g(t) = g_0(t) - g_0(t-\tau) \quad \text{avec } g_0(t) = (2t - \sin(2t))U(t).$$

6. Montrer que pour $t \geqslant \tau$, on a :

$$g(t) = 2\tau - \sin(2t) + sin(2t - 2\tau).$$

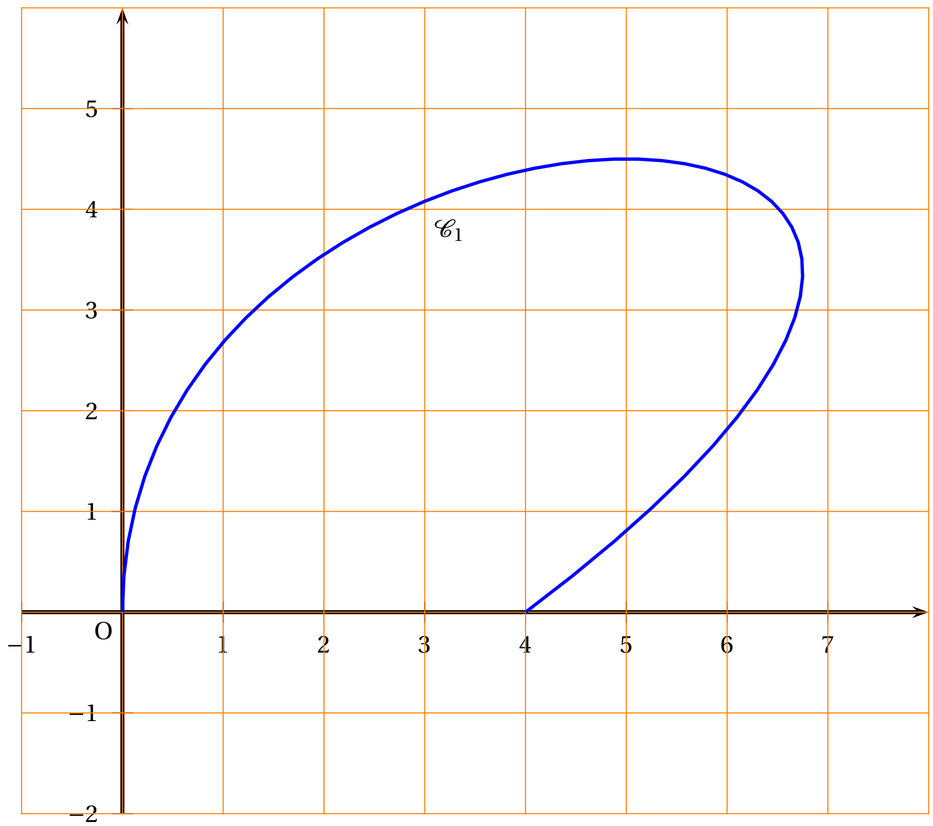
7. On suppose maintenant que$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\pi}$.

a. Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t \geqslant \tau$.

b. La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau = \pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n° 2**.

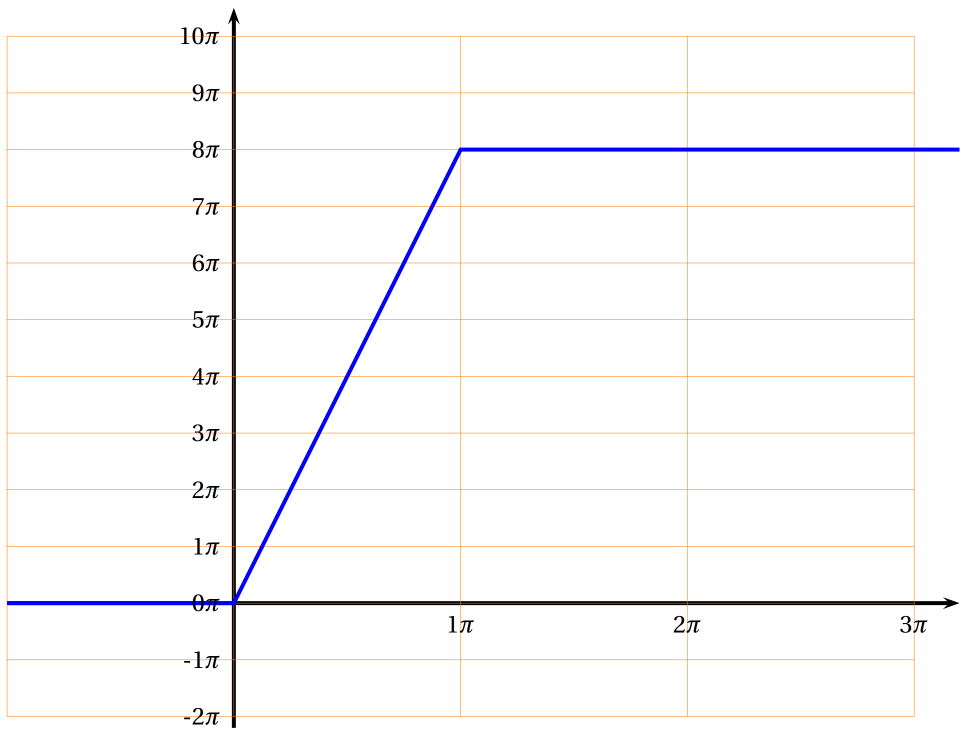
Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction g.

Document réponse n^o^ 1, à rendre avec la copie (exercice 1)



t	0		t_0	t_1	1
$f_1'(t)$		$+$	0	$-$	0
$g_1'(t)$					
$f_1(t)$					
$g_1(t)$					

Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 2)



Brevet de technicien supérieur
novembre 2009 - groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **11 points**

Dans cet exercice, on s'intéresse à un système entrée-sortie.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude du système pour une entrée nulle

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y''(t) + 4y(t) = 0 \quad (E_1)$$

où y désigne une fonction de la variable t, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_1)
2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

   La représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ est donnée sur la feuille annexe.

Partie B : étude du système soumis à un contrôle

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.
On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} U(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

   $$e(t) = 2U(t) - 2U\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

   a. Construire la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthogonal.

   b. On note E la transformée de Laplace de la fonction e. Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction causale s, telle que :

   $$4\int_0^t s(u)\,\mathrm{d}u + s'(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s\left(0^+\right) = 0.$$

   On admet que la fonction s et sa dérivée possèdent chacune une transformée de Laplace.

   On note S la transformée de Laplace de la fonction s.

   a. Déterminer une expression de $S(p)$.

   b. En déduire une expression de $s(t)$.

3. **a.** Vérifier que :

   $$\left\{\begin{array}{lcll} s(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) & = & \sin(2t) & \text{si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{4} \\ s(t) & = & \sin(2t) - \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } t \geqslant \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

   b. Établir que : $s\left(\dfrac{\pi^-}{4}\right) = s\left(\dfrac{\pi^+}{4}\right)$.

c. Vérifier que pour tout nombre réel t supérieur ou égal à $\dfrac{\pi}{4}$, on a :

$$s(t) = \sqrt{2}\cos\left[2\left(t - \frac{\pi}{8}\right)\right].$$

d. Résoudre l'équation $s(t) = 0$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

4. Tracer successivement sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, les courbes représentatives sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ des fonctions :

$t \longmapsto \cos(2t)$, $\quad t \longmapsto \cos\left[2\left(t - \dfrac{\pi}{8}\right)\right]$ $\quad$ et $t \longmapsto s(t)$.

Exercice 2 **9 points**

Partie A :

Une entreprise fabrique des pièces en grande série.
Une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.
L'entreprise dispose d'une machine de contrôle des pièces fabriquées.
On prélève une pièce au hasard dans la production.
On note C l'évènement : « la pièce est conforme ».
On note A l'évènement : « la pièce est acceptée par la machine de contrôle ».
Une étude statistique a été conduite, au terme de laquelle on a pu estimer que :

$$p(A) = 0,95,\ p\left(C \cap \overline{A}\right) = 0,01 \text{ et } p\left(\overline{C} \cap A\right) = 0,005.$$

1. **a.** À l'aide d'une phrase, donner la signification des évènements $C \cap \overline{A}$ et $\overline{C} \cap A$.

   Ces deux évènements correspondent aux cas où la machine de contrôle commet une erreur.

   b. Calculer la probabilité que la machine de contrôle commette une erreur.

2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme, sachant qu'elle est refusée.

Partie B :

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la masse d'une pièce en grammes.
On admet que X suit une loi nonnale de moyenne 7,5 et d'écart type σ où σ désigne un nombre réel strictement positif.

1. Après une période de production, la machine de fabrication a subi un dérèglement brutal.

   L'écart type σ vaut alors $0,015$.

   On rappelle qu'une pièce est confonne si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
3. Calculer la valeur de σ pour laquelle la probabilité qu'une pièce soit conforme est égale à $0,99$.
4. Dans cette question, on suppose que σ vaut $0,002$ et qu'à la suite d'un nouveau dérèglement, la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $7,502$ et d'écart type $0,002$.

   Calculer la probabilité qu'une pièce, choisie au hasard, soit conforme.

Partie C :

Les pièces acceptées par la machine de contrôle sont emballées par lots de 100. On prélève au hasard un lot. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 pièces.

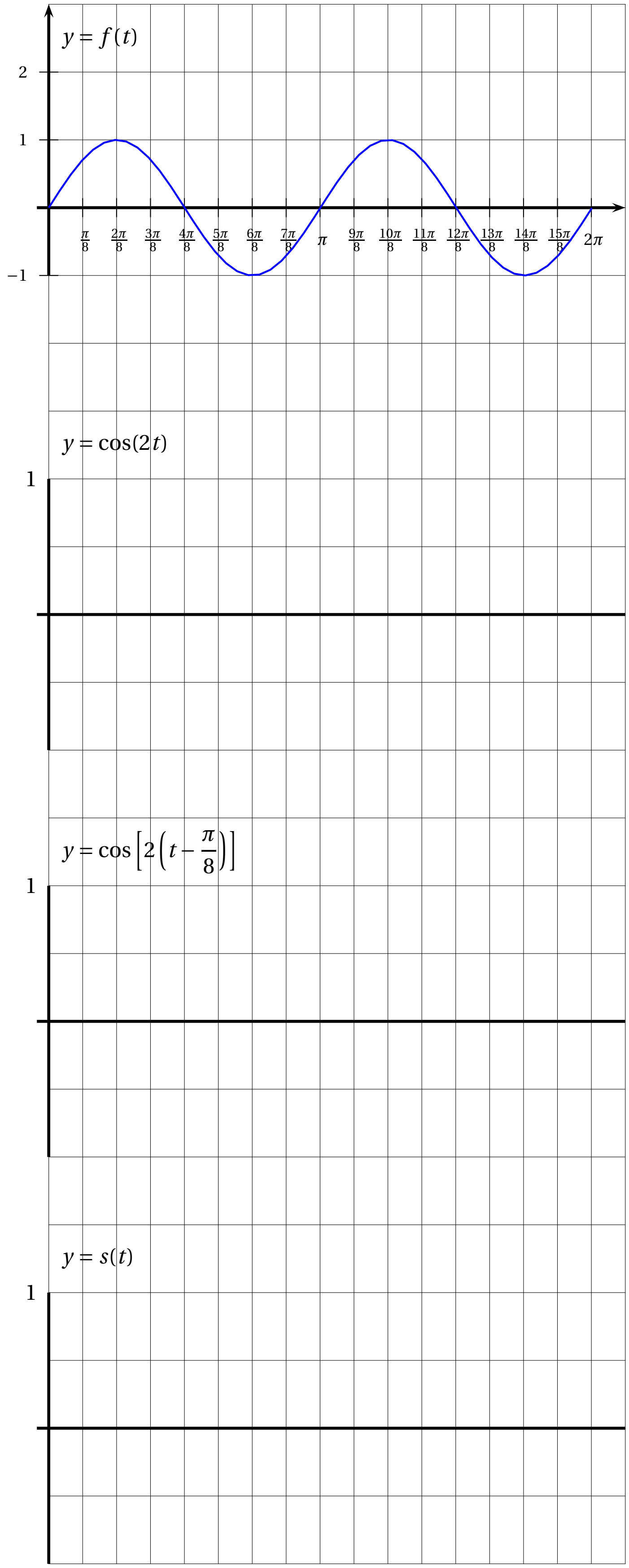
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces non conformes.
On admet que la probabilité qu'une pièce soit non conforme, sachant qu'elle a été acceptée, est 0,005 3.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

2. Calculer la probabilité qu'un lot ne contienne que des pièces conformes. On donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près.

Annexe à rendre avec la copie



Brevet de technicien supérieur session 2011 - groupement A1

Spécialités :
- Électrotechnique
- Génie optique

Exercice 1 **10 points**

Partie A

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité $0,1$ et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité $0,1$.
Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.
On envoie le signal 00.
On admet que les erreurs de transmission sont des évènements aléatoires indépendants les uns des autres.
On considère les évènements suivants :
- E_1 : « les deux chiffres sont modifiés »
- E_2 : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- E_3 : « aucun chiffre n'est modifié »
- E_4 : « au moins un des chiffres est modifié »

Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte $0,5$ *point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.*

1. La probabilité de l'évènement E_1 est égale à :
   - 0,01
   - 0,99
   - 0,09
   - 0,81
2. Si l'évènement E_2 est réalisé, le signal reçu est :
   - 00
   - 01
   - 10
   - 11
3. La probabilité de l'évènement E_2 est égale à :
   - 0,19
   - 0,81
   - 0,09
   - 0,90
4. La probabilité de l'évènement E_3 est égale à :
   - 0,01
   - 0,99
   - 0,09
   - 0,81
5. La probabilité de l'évènement E_4 est égale à :
   - 0,19
   - 0,20
   - 0,11
   - 0,91

Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à émettre une chaîne constituée de 10 fois le chiffre 1 et à observer la chaîne reçue. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque chaîne ainsi reçue, associe le nombre d'erreurs de transmission, c'est-à-dire le nombre de 0 obtenus.

   On rappelle que la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est $0,1$.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer à $0,001$ près la probabilité qu'il y ait exactement une erreur de transmission.

c. Montrer que la probabilité qu'il y ait au plus une erreur de transmission est égale à $0,74$ à $0,01$ près.

2. Estimant que la qualité des transmissions n'est pas assez bonne, les techniciens procèdent à quelques réglages afin de réduire les « bruits » à l'origine des erreurs. La probabilité qu'un chiffre soit mal transmis devrait ainsi être fortement diminuée.

Effectivement, à l'issue des réglages, on constate que la proportion de chiffres mal transmis est égale à $0,002$.

a. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de chiffres mal transmis dans une chaîne de 1 000 chiffres.
On considère que la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Justifier que $\lambda = 2$.

b. Calculer à $0,001$ près la probabilité qu'il y ait au moins une erreur de transmission parmi les 1 000 chiffres envoyés.

Partie C

La transmission des chiffres binaires est assurée par un signal électrique carré. Les impulsions supérieures à 2 volts représentent le chiffre 1, les autres le chiffre 0. Ne pouvant affiner davantage leurs réglages, les techniciens admettent que les erreurs de transmission restantes sont dues à un « bruit aléatoire ». Celui-ci est modélisé par un signal de tension aléatoire U, exprimée en volts. On admet que U suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type σ.

1. Pour envoyer les chiffres 1, on envoie des impulsions de 4 volts. Ces dernières sont modifiées par le bruit aléatoire. La tension reçue est ainsi égale à $4 + U$.

Dans cette question, on suppose que $\boldsymbol{\sigma = 0,7}$.

a. Montrer que la probabilité que cette tension représente le chiffre 1 est égale à la probabilité que U soit supérieure à -2.

b. Calculer cette probabilité à $0,001$ près.

2. Quelle condition doit-on imposer à l'écart type σ pour que la proportion d'erreurs de transmission d'un chiffre 1 soit inférieure à 0,1 %, c'est-à-dire pour que :

$$p(U < -2) < 0,001?$$

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou non aboutie sera prise en compte.

Exercice 2 **10 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.
Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.

Partie A

On considère la fonction f périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(t) & = & 0,5t+0,5 & \text{si} \quad -1<t<1\\ f(t) & = & 0,5. & \end{array}\right.$$

Le développement en série de Fourier de la fonction f s'écrit :

$$S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ en utilisant la figure 2 du document réponse numéro 2.

2. Démontrer que $a_0=\dfrac{1}{2}$.

3. **a.** Préciser la valeur de la pulsation ω.

b. En utilisant une intégration par parties, calculer b_1.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

4. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel t par $g(t)=f(t)-0,5$.

a. Tracer la représentation graphique de la fonction g sur la figure 3 du document réponse numéro 2.

b. Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction g ?

c. En comparant les coefficients de Fourier des fonctions f et g, montrer que $a_n=0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.

5. On rappelle que la valeur efficace de la fonction f sur une période est le nombre réel positif, noté f_{eff}, défini par :

$$f_{\text{eff}}^2=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $f_{\text{eff}}^2=\dfrac{1}{3}$.

6. On rappelle la formule de Parseval :

$$f_{\text{eff}}^2=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de f_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :

$$P=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

a. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de P, puis de $\dfrac{P}{f_{\text{eff}}^2}$.

b. En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace f_{eff}^2 par P.

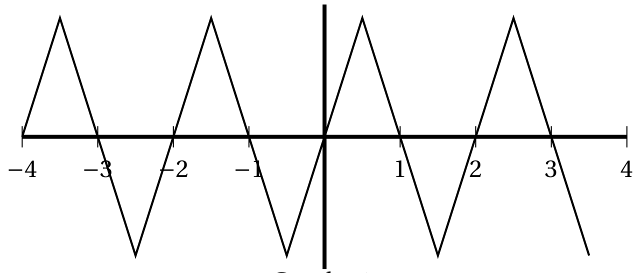
Partie B

Soit h la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique de période 2, dont le développement en série de Fourier est :

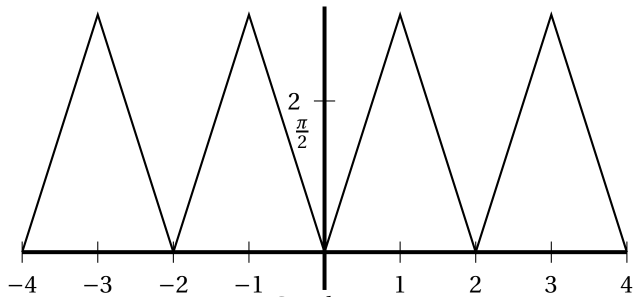
$$S_h=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos[(2p+1)\pi t].$$

1. Déterminer la parité de la fonction h.
2. Sur l'annexe page 7 sont proposées quatre représentations graphiques.
   Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4 ; 4]$? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer $h(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

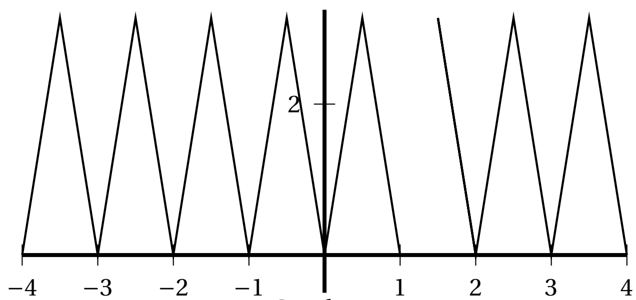
Annexe



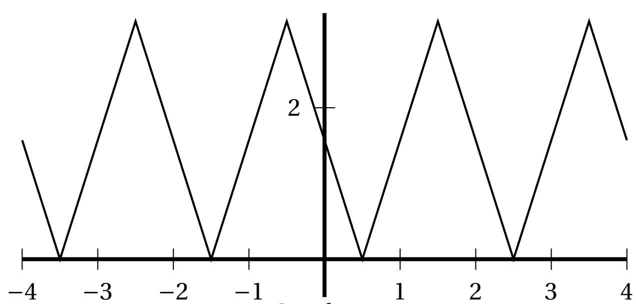
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

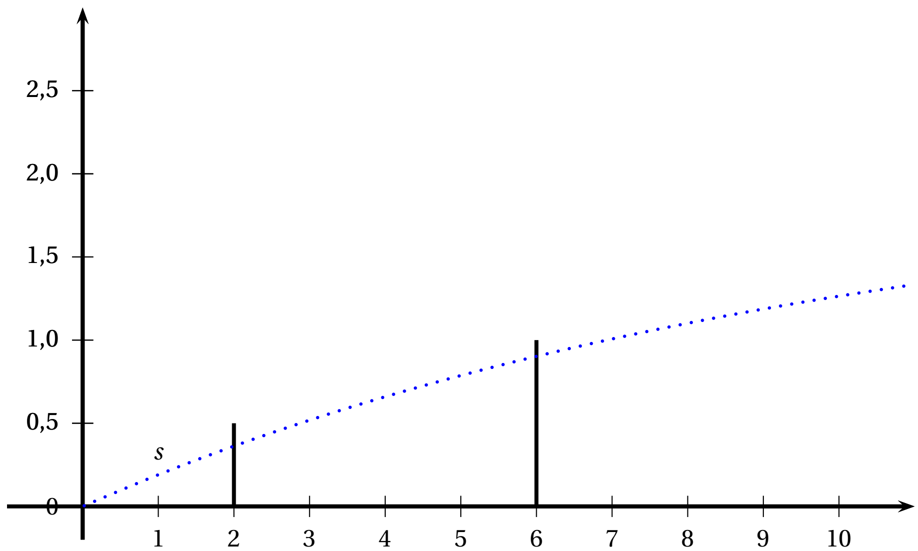


Courbe 4

Document réponse numéro 1 à joindre à la copie

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(n)$		0,35				0,87			1,15		1,30

Tableau de valeurs de la suite y (à compléter)



Document réponse numéro 2 à joindre avec la copie

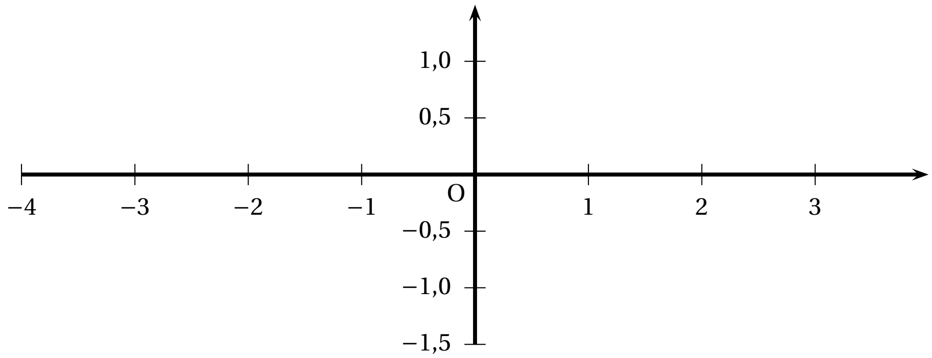


Figure 2 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

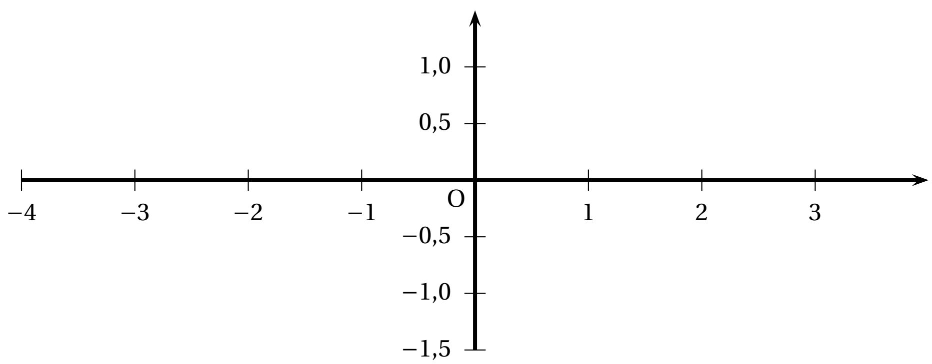


Figure 3 : représentation graphique de la fonction g (à compléter)

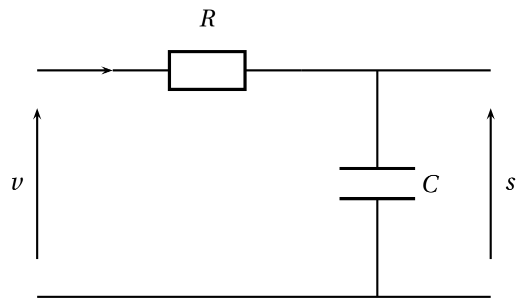
Brevet de technicien supérieur session 2011 - groupement A2

Spécialités :

- Contrôle industriel et régulation
- Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
- Systèmes électroniques
- Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Exercice 1 **10 points**

On considère un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur représenté par le schéma ci-dessous.



s représente la tension entre les bornes du condensateur lorsque le circuit est alimenté par une source de tension v et parcouru par un courant i.
Les fonctions s et v sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$RCs'(t) + s(t) = v(t). \qquad (1)$$

De plus, on suppose que $s(t) = 0$, pour tout nombre réel t négatif ou nul.
Pour tout l'exercice on considère que $R = 250 \cdot 10^3\ \Omega$ et $C = 20 \cdot 10^{-9}$ F.
On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par :

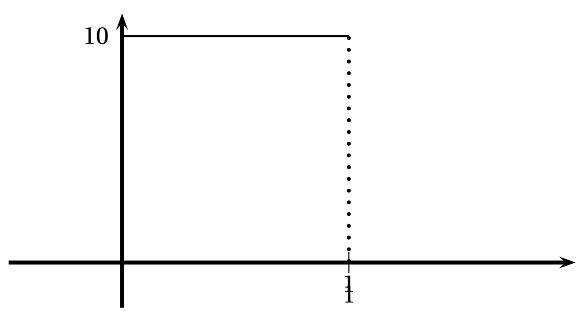
$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{U}(t) & = & 0 \quad \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) & = & 1 \quad \text{si } t \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Les parties A, B et C de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A : QCM

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de chaque question suivi de la réponse choisie.
Une bonne réponse rapporte 1 point, ***une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point****.*

1. La fonction f est un créneau représenté par le schéma suivant :



$f(t)$ est défini par :

- $10\mathcal{U}(t-1)$
- $10\mathcal{U}(t)$
- $10\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right]$
- $\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$

2. On note V et S les transformées de Laplace respectives des fonctions v et s.
On précise que $s\left(0^+\right) = 0$. Les transformées de Laplace V et S sont telles que :

- $S(p) = \dfrac{1}{1+0,005p}V(p)$
- $S(p) = \dfrac{0,005}{0,005+p}V(p)$
- $s(t) = \dfrac{1}{1+0,005p^2}V(p)$
- $S(p) = (10,005)V(p)$

3. Dans cette question, on suppose que $v(t) = 2$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

L'équation différentielle (1) s'écrit alors :

$$0,005s'(t) + s(t) = 2.$$

Pour tout nombre réel t positif ou nul, la solution générale s de l'équation différentielle (1) est définie, k étant une constante réelle, par :

- $s(t) = k\mathrm{e}^{-200t} + 2t$
- $s(t) = k\mathrm{e}^{200t} + 2$
- $s(t) = k\mathrm{e}^{-200t} + 2$
- $s(t) = k\mathrm{e}^{-200t}$