BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

A. P. M. E. P.

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

Le GROUPEMENT GÉOMÈTRE–TOPOGRAPHE de 2001 à 2011

Brevet de technicien supérieur session 2001 - Géomètre topographe

Exercice 1 **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la parabole $\mathcal{P}$, représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

On oriente $\mathcal{P}$ dans le sens des abscisses croissantes. En chaque point M de $\mathcal{P}$ on désigne par $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent et par $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal.
On rappelle que la base $\left(\vec{T}, \vec{N}\right)$ est directe et que le rayon de courbure algébrique R, au point dc $\mathcal{P}$ d'abscisse x, est donné par la formule

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \text{ avec } y' = f'(x) \text{ et } y" = f''(x).$$

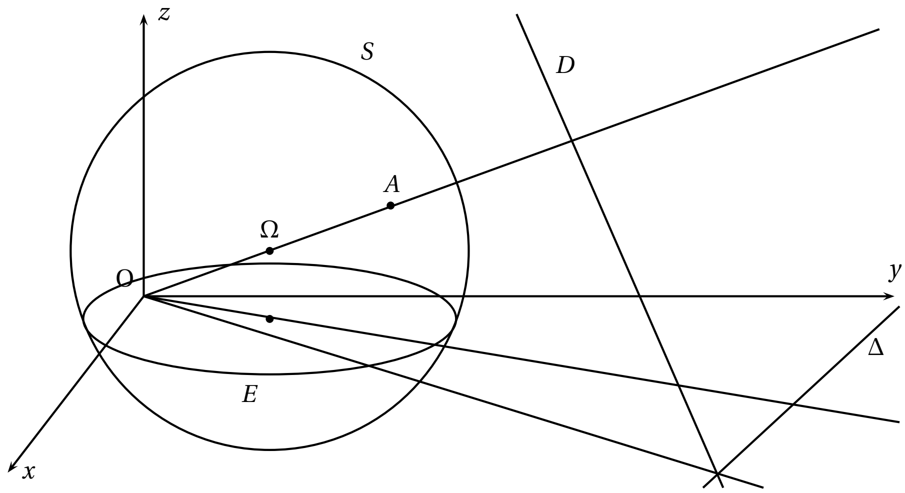
1. Tracer $\mathcal{P}$, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[-4 ; 4]$, en prenant 2 cm pour unité graphique.
2. Étudier le sens de variation de la fonction R.
   En déduire le minimum du rayon de courbure et tracer le cercle de courbure correspondant sur le graphique précédent.
3. On se place désormais au point A, d'abscisse 1, de la parabole $\mathcal{P}$.
   a. Déterminer une équation de la tangente et une équation de la normale à $\mathcal{P}$ en ce point.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{U}$, de coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} ; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, est unitaire et qu'il est directeur de la normale à $\mathcal{P}$ au point A,
   c. On admet que $\vec{N}$ est égal à $\vec{U}$.
   Montrer que les coordonnées du centre de courbure Ω sont $\left(-1 ; \frac{5}{2}\right)$.
   d. Tracer la tangente et la normale à $\mathcal{P}$ au point A.
   Représenter les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ au point A.
   e. Tracer le cercle de courbure $\mathcal{C}$ au point A et montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 + 2x - 5y - \frac{3}{4} = 0$.
   a. Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont solutions de l'équation

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0.$$

   b. Vérifier que $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x+3)(x-1)^3$.
   En déduire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ n'ont qu'un seul autre point d'intersection que A.

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le schéma donné ci-dessous met en perspective quelques éléments de l'exercice, sans prétendre en donner une représentation exacte).



S est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z = 0$.
T est la transformation qui, à chaque point M de l'espace, différent de O, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{54}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon r de S.

2. **a.** En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$, montrer que T est une inversion, dont on précisera le pôle et le rapport.

b. Le point A est le symétrique de O par rapport à Ω.
Calculer les coordonnées de $A' = T(A)$.
Déterminer l'inverse, P, de la sphère S privée du point O, par T.
Montrer qu'une équation de P est $2x + 2y + z - 27 = 0$.

3. Soit D la droite dont une représentation paramétrique est :

$$x = 2 - t\ ; \quad y = 14 + 2t\ ; \quad z = 5 - 2t \quad ; \ t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que la droite D est incluse dans P et que le point A' appartient à D.

b. Déterminer l'inverse C de la droite D, par T.

c. Pour tout point M de D, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on note $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ les coordonnées de son inverse M' par T. Montrer qu'une représentation paramétrique de C est :

$$x' = \frac{-6t + 12}{t^2 + 8t + 25}\ ; \quad y' = \frac{12t + 84}{t^2 + 8t + 25}\ ; \quad z' = \frac{-12t - 30}{t^2 + 8t + 25}\ ;\ t \in \mathbb{R}.$$

d. Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de C avec le plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4. Le plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ coupe le plan P suivant la droite Δ et coupe la sphère S suivant le cercle E.

a. Déterminer l'inverse de Δ par T.

b. Montrer que le vecteur de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ est un vecteur directeur de Δ.

c. En déduire l'angle géométrique θ, appartenant à $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, des deux courbes C et E.

Brevet de technicien supérieur session 2002 - Géomètre topographe

Exercice 1 **11 points**

Dans tout le problème, le plan est rapporté â un repère orthonorrnal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 5 cm). On considère les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = 1$ et $x = -1$.

Une droite variable (D), passant par O et de coefficient directeur t, $(t \in \mathbb{R})$, coupe (Δ) en P.

La parallèle à $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ passant par P coupe (Δ') en P$'$.

1. Faire une figure qui sera complétée dans les questions suivantes.
2. Soit M$(x ; y)$ le projeté orthogonal de P$'$ sur la droite (D).
   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{OP}}$ et $\overrightarrow{\text{P}'\text{M}}$.
   b. En déduire que les coordonnées de M sont données par : $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y = t\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.
3. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe définie paramétriquement par : $x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y(t) = t\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.
   a. En étudiant la parité des fonctions x et y, donner un intervalle d'étude suffisant pour l'étude des variations de x et y et pour le tracé de $(\mathscr{C})$.
   b. Vérifier que :
   $$x'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{\left(t^2+2-\sqrt{5}\right)\left(t^2+2+\sqrt{5}\right)}{\left(t^2+1\right)^2}.$$
   c. Étudier les variations des fonctions x et y.
   d. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la droite $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ et les équations des tangentes à $(\mathscr{C})$ en ces points.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur la figure du 1.

Exercice 2 **9 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Sur la sphère (Σ) de centre O et de rayon 1, on considère les points :

N de coordonnées cartésiennes (0, 0, 1)	S de coordonnées cartésiennes (0, 0, −1)
A $\begin{cases} \text{longitude} & 90° \text{ Est} \\ \text{latitude} & 30° \text{ Sud} \end{cases}$	B $\begin{cases} \text{longitude} & 0° \\ \text{latitude} & 0° \end{cases}$

Rappels : dans un triangle sphérique (ABC), avec les notations usuelles, on a les relations :

$$\cos a = \cos b \cos c \sin b \sin c \cos \text{A} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \text{A}}{\sin a} = \frac{\sin \text{B}}{\sin b} = \frac{\sin \text{C}}{\sin c}.$$

1. **a.** Faire une figure : placer les points N, S, A et B.

b. Justifier que les coordonnées cartésiennes des points A et B sont respectivement $\left(0\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ et $(1\,;\,0\,;\,0)$.

2. Déterminer les éléments du triangle sphérique (SAS).

3. Soit T l'inversion de pôle N et de puissance 4.

a. Quelle est l'image de la sphère (Σ) par l'inversion T ?

b. Soient A$'$ et B$'$ les images respectives de A et B par l'inversion T.

En utilisant la relation $\overrightarrow{\text{NM}'} = \dfrac{4}{\text{NM}^2}\overrightarrow{\text{NM}}$, où M$'$ désigne l'image par T d'un point M quelconque, calculer les coordonnées cartésiennes de A$'$ et B$'$. Placer les points A$'$ et B$'$ sur la figure.

4. **a.** En déduire la distance A$'$S$'$,

b. Calculer la différence d entre la distance A$'$B$'$ et la longueur du petit arc de grand cercle d'extrémités A et B.

5. La Terre est assimilée à la sphère (Σ), dont on exprime maintenant le rayon en kilomètres, en prenant R = 6 380 km.

Exprimer la différence d en kilomètres, arrondie au km près.

Brevet de technicien supérieur session 2003 - Géomètre topographe

Exercice 1 **10 points**

Partie A

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique sur chaque axe : 4 cm), on considère la courbe paramétrée E d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos 2t \\ y(t) & = & 2\sin 2t \end{array}\right.$$

1. Faire l'étude de cette courbe paramétrée après avoir justifié que l'intervalle d'étude peut se réduire à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Tracer la courbe E.
3. Montrer que cette courbe est en fait une ellipse dont on calculera les éléments caractéristiques.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le cercle C de centre O contenu dans le plan $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ayant pour rayon le demi grand axe de l'ellipse E.
Soient A et B deux points de l'espace de coordonnées respectives $\left(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,0\right)$ et $\left(\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2}\,;\,0\right)$.

1. Soit S la sphère obtenue en faisant tourner C autour de l'axe (Ox).
   Écrire une équation de la sphère S.
2. Montrer que les points A et B appartiennent à la sphère S.
3. Soit N le pôle nord de la sphère S. Déterminer les coordonnées sphériques des points N, A et B.
4. Déterminer les 6 éléments caractéristiques du triangle sphérique NAB.
5. Calculer l'aire du triangle sphérique NAB.
   *O*n rappelle les formules concernant un triangle sphérique ABC :
   $\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$
   $\text{aire(ABC)} = (\text{A} + \text{B} + \text{C} - \pi) \cdot R^2$
   (R = rayon de la sphère).

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit K(0 ; 0 ; 3) et C le cône de révolution d'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{k}\right)$ et de demi angle au sommet $\frac{\pi}{4}$.

1. Montrer qu'une équation cartésienne de C est $x^2 + y^2 = (3 - z)^2$.
2. Soit E l'intersection du cône C et du plan d'équation $z = 0$. Donner une équation cartésienne de E, sa nature et ses éléments caractéristiques.
3. Soit $\Omega(-3\,;\,0\,;\,0)$ et soit I la transformation de l'espace qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' qui vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \dfrac{6}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}$.

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de I.

b. Soit $A(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Déterminer $A' = I(A)$ et $B' = I(B)$.

c. Soit D la droite de l'espace déterminée par :

$$\mathrm{D}\left\{\begin{array}{lll} x & = & -2\\ z & = & 0\end{array}\right.$$

Montrer que l'image de E par I est la droite D.

4. Soit Δ la droite de l'espace de représentation paramétrique $\Delta\left\{\begin{array}{lll} x(t) & = & -\dfrac{9}{4}\\ y(t) & = & t\\ z(t) & = & 0\end{array}\right.$

a. Soit $M(x(t)\ ;\ y(t)\ ;\ z(t))$ un point de Δ. Soit $M'(x'(t)\ ;\ y'(t)\ ;\ z'(t))$ son image par I. Montrer que : $x'(t) = \dfrac{\dfrac{45}{16} - 3t^2}{\dfrac{9}{16} + t^2}$; $y'(t) = \dfrac{6t}{\frac{9}{16} + t^2}$; $z'(t) = 0$.

b. En déduire que l'image de la droite Δ par I est contenue dans la sphère S, de centre F(1 ; 0 ; 0) et de rayon 4.

Brevet de technicien supérieur Géomètre topographe session 2004

Exercice 1 **10 points**

Le but de cet exercice est l'étude d'une courbe plane, appelée lemniscate, que l'on peut rencontrer lors de l'élaboration de certains raccordements routiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 5 cm). On note $\mathscr{C}$ la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$r = f(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)} \text{ pour } \theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$$

1. Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

a. À quel intervalle $\theta + \pi$ appartient-il ?

b. Calculer $f(\theta+\pi)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

a. À quel intervalle $\frac{\pi}{2} - \theta$ appartient-il ?

b. Calculer $f(\theta+\pi)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

3. Soit $\mathscr{C}_1$ l'arc de courbe obtenu pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$. Comment obtient-on $\mathscr{C}$ à partir de $\mathscr{C}_1$?

4. Montrer que pour tout θ appartenant à $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $r' = f'(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$.

5. Étudier le signe de $f'(\theta)$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$. En déduire les variations de f pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur ce dernier intervalle.

6. On pose, pour tout $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Montrer que :

$$x' = \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} \text{ et } y' = \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

7. Déterminer un vecteur directeur de chacune des deux tangentes suivantes à la courbe $\mathscr{C}$, l'une au point A de paramètre $\theta = \frac{\pi}{6}$ et l'autre au point B de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$.

8. Calculer $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{y'}{x'}$. On admet que cette limite est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point O. Caractériser la tangente à $\mathscr{C}$ au point O.

9. Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que les tangentes aux points O, A, B.

10. On admet que le rayon de courbure au point B vaut $\frac{1}{3}$. Déterminer un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale au point B. Sur la même figure, construire le cercle de courbure en B.

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les axes de coordonnées sont les axes (Ox), (Oy) et (Oz). Les plans de coordonnées sont les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz). La notation $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ désigne le point M de coordonnées x, y et z.

La figure sera construite et complétée sur l'annexe au fur et à mesure de l'avancement des questions.

Soit Δ la droite incluse dans le plan (Oyz), d'équations $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0\\ 12y-5z & = & 0\end{array}\right.$

Soit Σ la sphère de centre $\Omega(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$, tangente en $T(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$ au plan (Oxy).

1. **a.** Montrer que la sphère Σ a pour équation $x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0$.

   b. Montrer que la droite Δ et la sphère Σ ont pour unique point commun $A\left(0\ ;\ \dfrac{15}{13}\ ;\ \dfrac{36}{13}\right)$.

   En déduire la position de la droite Δ par rapport à la sphère Σ.

2. Soit P le plan perpendiculaire au point A à la droite Δ.

   a. Montrer que P a pour équation $5y+12z-39=0$.

   b. On note Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites intersections respectives de P avec les plans (Oyz), (Oxz) et (Oxy). Déduire de la question a. un système d'équations cartésiennes de chacune des droites Δ_1, Δ_2, Δ_3.

   c. Compléter la figure donnée en annexe. En particulier, on reconnaîtra et on nommera les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3.

3. Soit B le point de la sphère Σ, diamétralement opposé à T.

   On note T$'$ le point de coordonnées $(3\ ;0\ ;0)$.

   a. Déterminer les coordonnées de B et placer ce point sur la figure en annexe.

   b. Écrire une équation du plan P' déterminé par les droites (TB) et (TT$'$).

   c. Montrer que les plans P et P' sont sécants suivant une droite D d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 12t\\ y & = & -12t+3\\ z & = & 5t+2\end{array}\right.$

   d. Déterminer les coordonnées du point I, intersection de D avec le plan (Oxz).

4. Soit Γ_1 le grand cercle intersection du plan P et de la sphère Σ. Soit Γ_2 le grand cercle intersection du plan P' et de la sphère Σ. Les deux grands cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points. On note C le point d'abscisse positive. On obtient ainsi un triangle sphérique ABC tracé sur la sphère Σ.

   a. Compléter la figure donnée en annexe ; reconnaître et nommer Γ_1 et Γ_2.

   Avec les notations habituelles, on rappelle les « formules fondamentales »

   $$\left\{\begin{array}{lcl} \cos a & = & \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\widehat{A}\\ \cos\widehat{A} & = & -\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos a\end{array}\right.$$

   b. Montrer que le triangle sphérique ABC est rectangle en A. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega B}$.

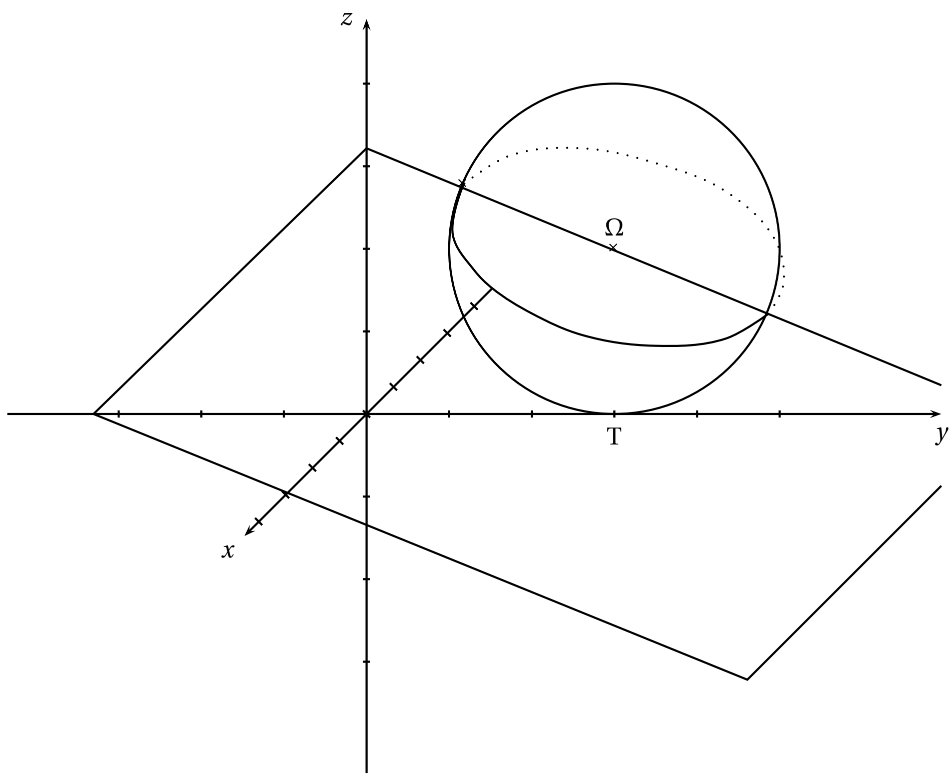
   En déduire une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega B}$.

   c. Nommer deux plans de la figure déterminant l'angle $\widehat{B}$ du triangle sphérique ABC.

   d. En déduire que sa mesure est 45°. Calculer des valeurs approchées de $\widehat{B}$, b, a.

ANNEXE à rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2



Brevet de technicien supérieur
Géomètre topographe session 2005

Exercice 1 **8 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par son équation polaire :

$$r = f(\theta) = 2\cos\theta - \cos^2\theta \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que l'on pent restreindre l'étude des variations de la fonction f à l'intervalle $[0 ; \pi]$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0 ; \pi]$ et drosser son tableau de variations.
3. On note A, B, C, D et E les points de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs suivantes de θ : $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}$ et π.
   Recopier et compléter le tableau suivant (en indiquant les valeurs exactes) :

Point	A	B	C	D	E
θ	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	π
$r = f(\theta)$					
$r' = f'(\theta)$					

   Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, C et E.
4. Représenter les cinq points A, B, C, D et E avec leurs tangentes respectives puis tracer la courbe $\mathscr{C}$.

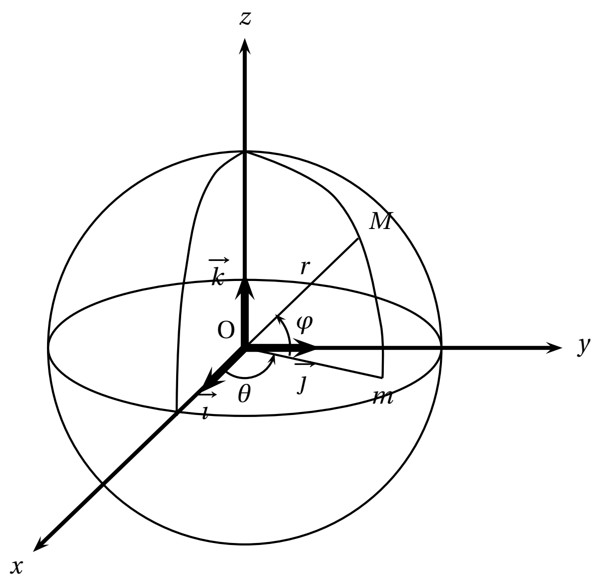
Exercice 2 **12 points**

Partie A : ÉTUDE D'UNE INVERSION

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et on considère l'inversion I de pôle $\Omega\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} ; \dfrac{3}{\sqrt{2}} ; 0\right)$ et de puissance 3. L'unité de longueur est le cm.

1. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 3.
2. Déterminer la nature de l'image $\mathscr{P}$ de la sphère $\mathscr{S}$ par l'inversion I.
3. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Partie B : TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE



On rappelle que les coordonnées sphériques d'un point M appartenant à la sphère de rayon r et n'appartenant pas à l'axe $\left(\mathrm{O},\ \vec{k}\right)$ sont données sous la forme d'un triplet $(r,\ \theta,\ \varphi)$ où :

$$r = \mathrm{O}M \qquad \theta = \left(\widehat{\vec{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{O}m}}\right) \qquad \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}m}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{O}M}}\right).$$

On considère les points A, B, C de l'espace dont les coordonnées sphériques sont :

$$\mathrm{A}\left(3\ ;\ 0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right) \qquad \mathrm{B}\left(3\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right) \qquad \mathrm{C}(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$$

1. Déterminer les caractéristiques du triangle sphérique ABC.
2. Calculer l'aire du triangle sphérique ABC.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A, B et C.
4. On note A′, B′ et C′ les images respectives des points A, B et C par l'inversion I.
   a. Calculer les coordonnées cartésiennes de A′.
   b. On donne $x_{\mathrm{B}'} = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$ et $y_{\mathrm{B}'} = \dfrac{1+3\sqrt{2}}{2}$

      $x_{\mathrm{C}'} = \dfrac{1+3\sqrt{2}}{2}$ et $y_{\mathrm{C}'} = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$

      Indiquer les cotes des points B′ et C′ en justifiant la réponse.
5. Représenter graphiquement la sphère $\mathscr{S}$ et les points A, B, C, Ω, A′, B′ et C′.

Brevet de technicien supérieur
Géomètre topographe session 2006

Exercice 1 **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.
Soit (C) la courbe d'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{6}{2+\cos\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que, pour tracer la courbe (C), il suffit de la tracer sur $[0~;~\pi]$.
2. Soit M un point de coordonnées polaires $(r~;\theta)$. Donner, en fonction de r et de θ, ses coordonnées cartésiennes
3. Montrer que si M, de coordonnées cartésiennes $(x,~y)$, appartient à (C), alors : $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.
   On admettra la réciproque.
4. Reconnaître la nature de la conique d'équation $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$. Préciser l'axe focal, les foyers et les sommets de cette conique.
5. Tracer soigneusement la courbe (C) pour $\theta \in [0~;~\pi]$. Expliquer comment obtenir le tracé de (C) pour $\theta \in \mathbb{R}$. Tracer (C).
6. Soit A le point de (C) défini par $\theta = 0$. Montrer que le rayon de courbure au point A vaut 3. On rappelle que $R = \dfrac{\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}$.
7. Déterminer une équation cartésienne du cercle de courbure au point A.

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Sur la sphère (S) de centre O et de rayon 1, on considère les points A, B, C de coordonnées :

$A \begin{cases} \text{longitude } 0° \\ \text{latitude } 45° \text{ Nord} \end{cases}$ $B \begin{cases} \text{longitude } 90° \text{ Est} \\ \text{latitude } 0° \end{cases}$ $C \begin{cases} \text{longitude } 90° \text{ Est} \\ \text{latitude } 60° \text{ Nord} \end{cases}$

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B et C.
3. Calculer les longueurs des côtés du triangle sphérique (ABC).
4. Soit I l'inversion de pôle B et de puissance 2.
   a. Déterminer l'image de la sphère, privée du point B, par l'inversion I.
   b. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A' et C', images respectives des points A et C par l'inversion I.
5. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (OAB) est $z = x$.
6. On désigne par (Γ) la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \end{cases}$$

a. Montrer que (Γ) est contenue dans le plan (OAB).

b. Montrer que (Γ) est contenue dans la sphère (S).

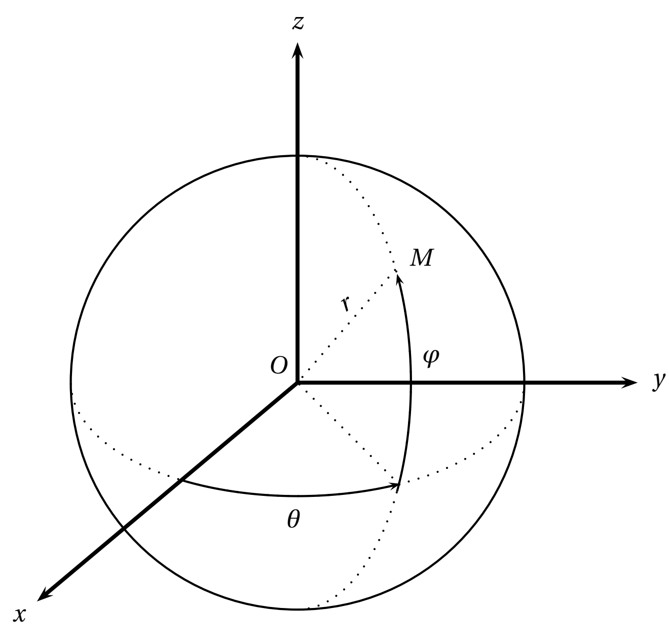
c. En déduire que, si M est un point appartenant à (Γ), alors il appartient à un cercle $(\mathscr{C})$ que l'on caractérisera.

d. On admet que (Γ) et $(\mathscr{C})$ sont confondus. Déterminer l'image de la courbe (Γ) privée du point B par l'inversion I.

Brevet de technicien supérieur
Géomètre topographe session 2007

Exercice 1 **8 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. (Σ) est la sphère de centre O, de rayon 2. Tout point de (Σ) est repéré par sa longitude θ et sa latitude φ (en radians).



1. Soit M un point de (Σ). Écrire les coordonnées cartésiennes de M en fonction de θ et de φ.
2. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
3. Donner une équation cartésienne de la sphère (Σ).
4. On considère les points A et B dont on donne les coordonnées cartésiennes :
   $A\left(\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{2}\right)$ et $B(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$.
   Montrer que A et B sont deux points de (Σ).
5. On considère le point C de (Σ) défini par $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $\varphi = 0$.
   a. Déterminer les coordonnées cartésiennes de C.
   b. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
   En déduire les valeurs exactes de $\cos a$, $\cos b$ et $\cos c$.
   $a = \text{mes}\ \widehat{BOC}$, $\qquad b = \text{mes}\ \widehat{AOC}$, $\qquad c = \text{mes}\ \widehat{AOB}$,
   puis celles de $\sin a$, $\sin b$ et $\sin c$.
   c. Déterminer les dernières caractéristiques du triangle sphèrique ABC.
   d. Calculer, à 10^{-3} près, l'aire du triangle sphèrique ABC.

6. Soit N le pôle nord de la sphère (Σ). Soit I l'inversion de pôle N et de puissance 8.

a. Quelle est l'image de (Σ), privée du point N, par l'inversion I ? En donner une équation.

b. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A', B' et C', images respectives des points A, B et C par l'inversion I.

c. Calculer les distances $A'B'$, $A'C'$ et $B'C'$.

Exercice 2 **9 points**

La représentation paramétrique d'une courbe C est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \sin(t) \\ y(t) & = & \sin(2t) \end{array}\right. , \quad t \in [-\pi ; \pi]$$

1. Étudier la parité des fonctions x et y ; en déduire une symétrie de la courbe. À quel intervalle peut-on restreindre l'étude ?

2. Calculer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$; en déduire une nouvelle symétrie de la courbe.

3. Étudier les variations des fonctions x et y sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et dresser le tableau des variations.

4. On note A, B, C, D et E les points de C de paramètres respectifs 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Point	A	B	C	D	E
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$					
$y(t)$					
$x'(t)$					
$y'(t)$					

5. Dans un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), représenter les 5 points A, B, C, D et E avec les tangentes aux points A, C, E puis tracer la courbe C.

6. En utilisant le fait que, pour tout réel t, $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, résoudre l'équation $\sin(t) = \sin(2t)$.

En déduire les coordonnées des points de la courbe situés sur la droite d'équation $y = x$.

Brevet de technicien supérieur session 2008
Géomètre topographe

Exercice 1 **11 points**

On rappelle la formule fondamentale de trigonométrie sphérique :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A}$$

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Sur la sphère (Σ) de centre O et de rayon 1, on considère les points N, S, A et B de coordonnées :

N	S	A	B
$\begin{cases}\text{longitude } 0° \\ \text{latitude } 90\ °\text{Nord}\end{cases}$	$\begin{cases}\text{longitude } 0° \\ \text{latitude } 90\ °\text{Sud}\end{cases}$	$\begin{cases}\text{longitude } 90°\text{Est} \\ \text{latitude } 0\ °\end{cases}$	$\begin{cases}\text{longitude } 45°\text{Est} \\ \text{latitude } 30\ °\text{Nord}\end{cases}$

1. Placer ces points sur la figure donnée en annexe.
2. Déterminer, par lecture directe ou par calcul, les longueurs des côtés du triangle sphérique ABS.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes de N, S et A.
   Montrer que $B\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\ ;\ \dfrac{\sqrt{6}}{4}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.
4. *On rappelle que si le point M' est l'image du point M dans une inversion de centre Ω et de rapport k, on a* $\overrightarrow{\Omega M'} = \dfrac{k}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}$.
   On considère l'inversion I de pôle N et de puissance 4. Quelle est l'image (P) de la sphère (Σ) privée de N par l'inversion I ? Justifier.
   Préciser une équation de (P).
5. Soit E le point de coordonnées $E\left(\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{6}\ ;\ -1\right)$.
   a. Placer E sur la figure.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NE}$.
   c. Montrer que E est l'image de B par l'inversion I.
6. A, B et S définissent un cercle $(\mathscr{C})$ dans l'espace. Soit $A' = I(A)$.
   a. Placer A$'$. Par lecture sur la figure donner les coordonnées du point A$'$.
   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SB}$.
   En déduire une équation du plan (ABS).
   c. Montrer que tous les points de $(\mathscr{C})$ sont sur (Σ).

Exercice 2 **9 points**

Le but de cet exercice est l'étude de raccordements routiers de deux sections rectilignes par une section circulaire ou du quatrième degré.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la figure en fin d'énoncé schématise les différents raccordements de la section rectiligne [AB] avec la section rectiligne [EF].

– (Oy) est axe de symétrie de la figure.
– $\mathscr{C}_1$ représente le raccordement circulaire.
– $\mathscr{C}_2$ représente le raccordement du quatrième degré.
– Les points A et B ont pour coordonnées $A\left(-\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$ et $B(-1\ ;\ 1)$.

Partie A Sections rectilignes

Les segments [AR] et [FE] sont donc symétriques par rapport à (Oy).

1. Déterminer les coordonnées des points E et F.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$. Montrer qu'ils sont orthogonaux.
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB). En déduire celle de (EF).

Partie B Raccordement circulaire $\mathscr{C}_1$

$\mathscr{C}_1$ passe par les points B et E et la droite (AB) est tangente à l'arc de cercle $\mathscr{C}_1$.

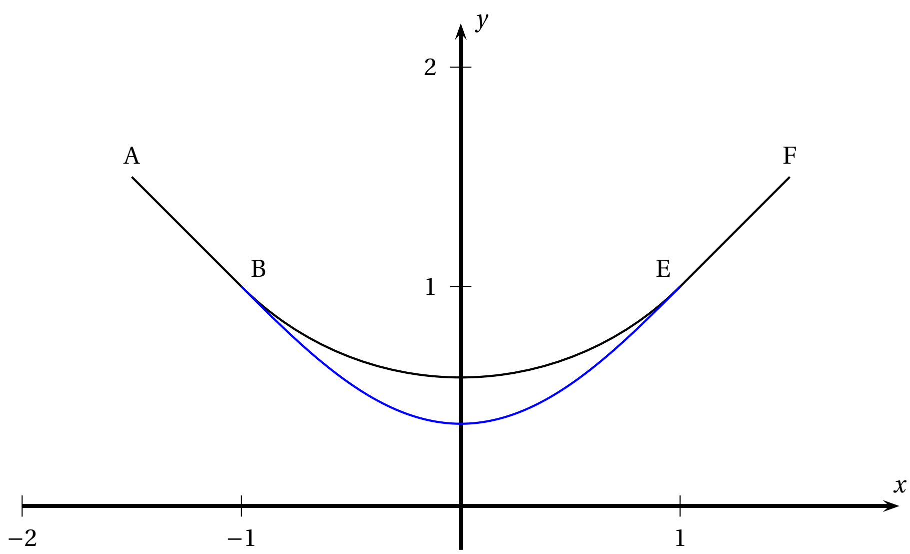
1. Justifier que le centre Ω_1 de l'arc de cercle $\mathscr{C}_1$ est un point de l'axe $(\mathrm{O}y)$.
2. Calculer les coordonnées de Ω_1.
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du cercle support de $\mathscr{C}_1$ est $x^2+(y-2)^2=2$.
4. La courbure en un point quelconque du segment [AB] est nulle.
   Déterminer la courbure en un point quelconque de l'arc de cercle $\mathscr{C}_1$.
   On rappelle que la courbure est l'inverse du rayon de courbure

Partie C Raccordement du quatrième degré

Le raccordement circulaire précédent créerait une rupture brutale de courbure en B comme en E. Le but est donc de créer un raccordement ne présentant pas cet inconvénient.

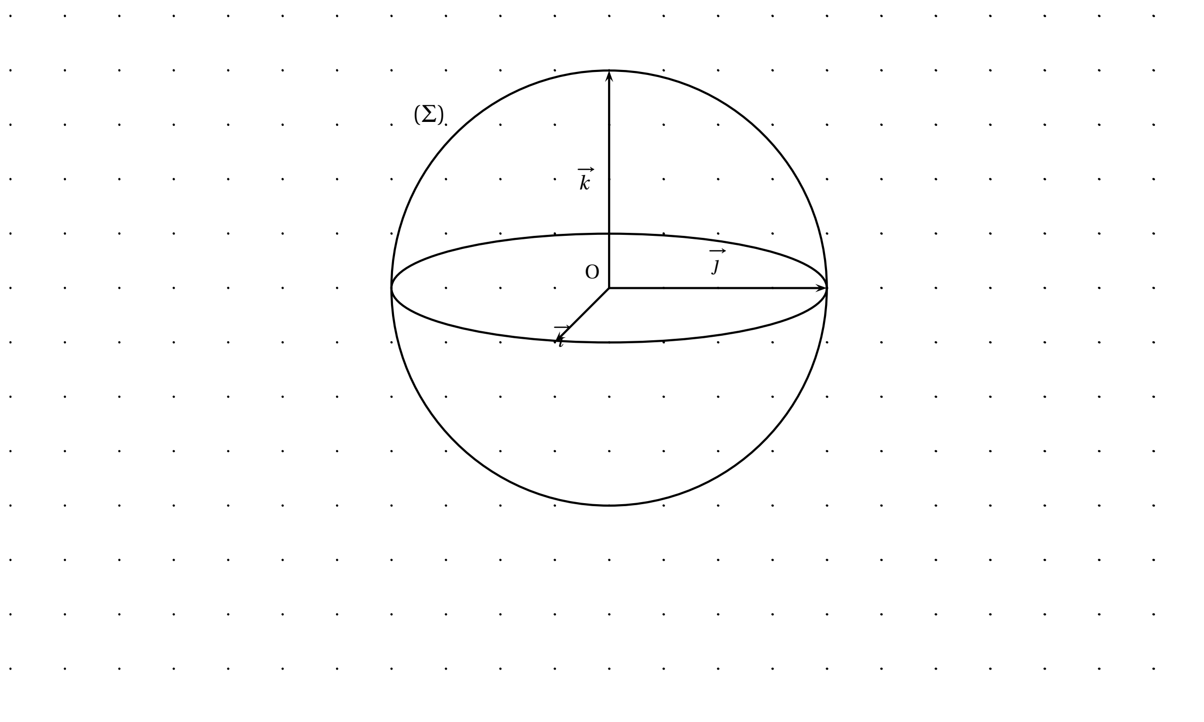
La courbe $\mathscr{C}_2$ est définie par l'équation $y=f(x)$.

1. justifier que $f(1)=1$ et $f'(1)=1$.
2. On rappelle que la courbure en un point d'abscisse x_0 d'une courbe définie par l'équation $y=f(x)$ est : $\dfrac{1}{R}=\dfrac{f''(x_0)}{\left[1+\left(f'(x_0)\right)^2\right]^2}$.
   Pour quelle raison veut-on que $f''(1)=0$?
3. On admet, à partir de maintenant, que $f(x)=ax^4+bx^2+c$.
   Montrer que $f(-x)=f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
4. Exprimer $f(1)$, $f(1)$ et $f'(1)$ en fonction des coefficients a, b et c.
5. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c &=& 1\\ 4a+2b &=& 1\\ 12a+2b &=& 0\end{array}\right.$
6. Montrer que $f(x)=\dfrac{-x^4+6x^2+3}{8}$.
   Calculer la courbure au point K de la courbe $\mathscr{C}_2$ d'abscisse 0.
   En déduire le rayon de courbure en K puis les coordonnées du centre de courbure Ω_2.



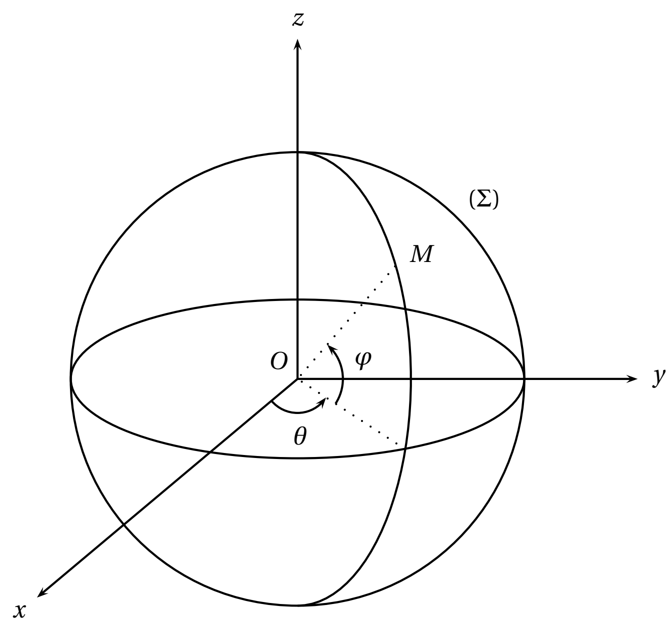
- ANNEXE à rendre avec la copie -

Figure de l'exercice 1 :



Brevet de technicien supérieur session 2009
Géomètre topographe

Exercice 1 **8 points**



L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
(Σ) est la sphère de centre O et de rayon 1.
Tout point de (Σ) est repéré par le couple $(\theta\ ;\ \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians). On considère sur (Σ) les points
$I(0\ ;\ 0)$, $J\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$, $K\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $A\left(\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $B\left(\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points I, J, K, A et B.
2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OJ}$.
   En déduire les longueurs des côtés du triangle sphérique ABJ en radians à 10^{-2} près.
3. Calculer, en radians à 10^{-2} près, la mesure en radians de l'angle $\hat{A}$ du triangle sphérique ABJ.
   Rappel :
   Pour un triangle sphérique ABC, avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique on a :
   $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$.
4. Soit (P) le plan passant par les points I, J et K. écrire une équation cartésienne du plan (P).
5. Montrer que le point H de coordonnées cartésiennes $H\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur le plan (P).
6. En déduire la nature de l'intersection du plan (P) et de la sphère (Σ).
   Préciser les éléments caractéristiques de cet ensemble.

Exercice 2 **12 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes (Ox) et (Oy).
Soient A le point de coordonnées $A(1~;~0)$, (C) le cercle de diamètre $[OA]$, t un réel et (D_t) la droite passant par l'origine et par le point Q de coordonnées $(1~;~t)$.

1. Étude géométrique

a. Justifier que t est le coefficient directeur de la droite (D_t) et en déduire l'équation réduite de la droite (D_t).

b. Écrire une équation cartésienne du cercle (C).

c. La droite (D_t) coupe le cercle (C) au point O et au point N.
Montrer que le couple de coordonnées $(X(t)~;~Y(t))$ de N en fonction de t est : $N\left\{\begin{array}{l} X(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\\ Y(t)=\dfrac{t}{1+t^2}\end{array}\right.$

d. Soit M le point du plan tel que : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{NQ}$.
Montrer que le couple de coordonnées $(x(t)~;~y(t))$ de M en fonction de t est : $M\left\{\begin{array}{l} x(t)=\dfrac{t^2}{1+t^2}\\ y(t)=\dfrac{t^3}{1+t^2}\end{array}\right.$

2. Étude d'une courbe paramétrée.

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par (Γ) la courbe définie paramétriquement par : $(\Gamma)\left\{\begin{array}{l} x(t)=\dfrac{t^2}{1+t^2}\\ y(t)=\dfrac{t^3}{1+t^2}\end{array}\right.$ où t décrit $\mathbb{R}$.

Pour $t \neq 0$, $M(x(t)~;~y(t))$ est distinct du point O et on rappelle que t est le coefficient directeur de la droite (D_t).

a. Montrer que la courbe (Γ) admet l'axe (Ox) comme axe de symétrie et en déduire que l'on peut étudier la courbe (Γ) pour $t \in]0~;~+\infty[$.

b. Étudier les limites des fonctions x et y quand t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

c. Montrer que les fonctions x et y ont pour dérivées : $x'(t)=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t)=\dfrac{3t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$.

d. Étudier les variations des fonctions x et y pour $t \in]0~;~+\infty[$ et représenter les résultats **dans le tableau de l'annexe**.

e. Calculer : $\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$. En déduire la tangente à la courbe (Γ) au point O.

f. Tracer la courbe (Γ) dans le **repère représenté sur l'annexe**.
On placera les points de (Γ) pour les valeurs $t=1$, $t=2$ et $t=\sqrt{3}$.

3. étude d'une inversion

On considère l'inversion I de pôle O et de puissance 1.

a. Déterminer les coordonnées $x_1(t)$ et $y_1(t)$ du point M_1, image par l'inversion I du point $M(x(t)\,;\, y(t))$ de la courbe (Γ) privée de O, en fonction de t $(t \neq 0)$.
On rappelle la relation : $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{1}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

b. Montrer que les coordonnées $x_1(t)$ et $y_1(t)$ du point M_1 vérifient l'équation $y^2 = x$.

c. Préciser la nature de la courbe (P) d'équation : $y^2 = x$ et en donner les éléments caractéristiques.

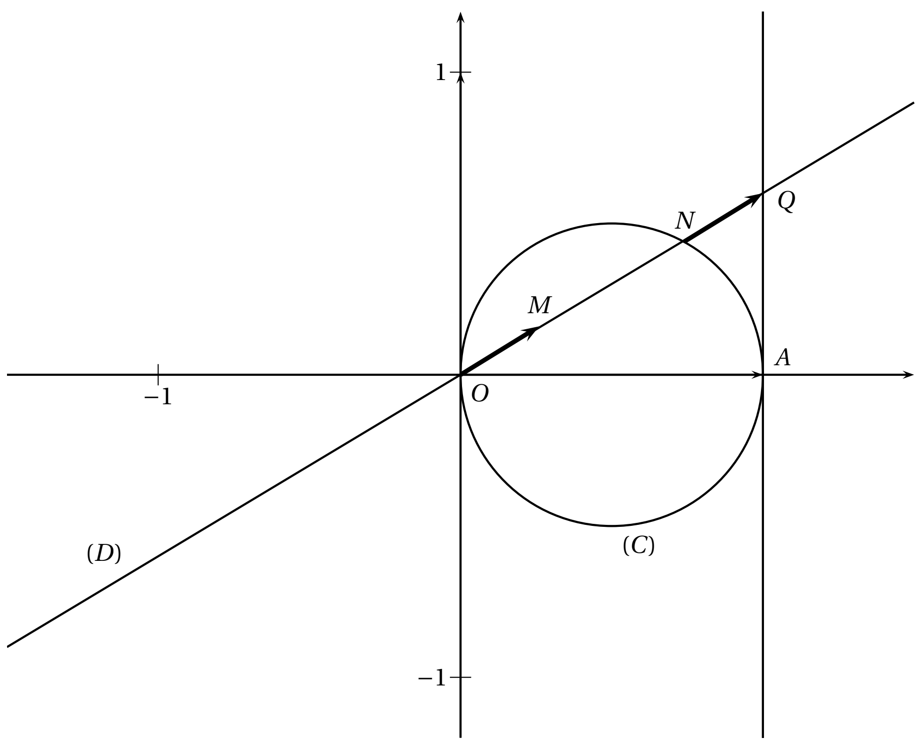
d. Tracer la courbe (P) dans **le repère de l'annexe**.

– ANNEXE à rendre avec la copie –

Exercice 2 : B. 4) .

t	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
$y'(t)$	

Repère et figure de l'exercice 2 :



Brevet de technicien supérieur session 2010
Géomètre topographe

Exercice 1 : étude d'une courbe plane **9 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère la courbe C définie par : $\begin{cases} x(t) &= t - \sqrt{2}\sin(t) \\ y(t) &= \cos(t) \end{cases}$, t décrivant $\mathbb{R}$.

On note M_t le point de coordonnées $\left(x(t)\ ;\ y(t)\right)$ de C.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques aspects de C et d'en tracer l'allure.

A) Détermination de l'intervalle d'étude

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_tM_{t+2\pi}}$ est constant.
   Comment déduit-on le point $M_{t+2\pi}$ du point M_t ? Qu'en déduit-on pour la courbe C ?
2. Comparer les coordonnées de M_{-t} et celles de M_t.
   Qu'en déduit-on pour les points M_{-t} et M_t, ainsi que pour la courbe C ?
3. Montrer que l'intervalle d'étude peut être restreint à $J = [0\ ;\ \pi]$.
4. On nomme C_J la courbe décrite par M_t lorsque t décrit l'intervalle J.
   Comment peut-on déduire C à partir de C_J ?

B) Étude de $\boldsymbol{C_J}$ avec $\boldsymbol{J = [0\ ;\ \pi]}$ et applications.

1. r
   a. Calculer $x'(t)$ et étudier le signe de $x'(t)$ sur J.
   b. Calculer $y'(t)$ et étudier le signe de $y'(t)$ sur J.
   c. Étudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle J.
   On présentera les résultats de cette étude, en indiquant les valeurs exactes, dans le premier tableau figurant en **annexe à rendre avec la copie**.
   On y portera aussi les valeurs de $x'(t)$ et $y'(t)$ aux bornes de l'intervalle.
2. **a.** Préciser les points de C_J ayant des tangentes parallèles aux axes de coordonnées.
   b. Déterminer le point d'intersection de C_J avec l'axe des abscisses.
3. **a.** Compléter le tableau de valeurs situé dans l'annexe.
   b. On se propose de tracer la partie de la courbe C correspondant à la variation de t dans $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   Faire d'abord apparaitre C_J sur la feuille de papier millimétré à rendre avec la copie dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 centimètres.
   On fera apparaitre les tangentes aux points de paramètres 0, $\dfrac{\pi}{4}$ et π.
   c. Sur la même figure, esquisser la partie de C correspondant à la variation de t dans $[-\pi\ ;\ 0]$.

Exercice 2 : étude d'une route orthodromique **11 points**

Préambule et notations

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, la Terre est assimilée à une sphère Σ de centre O et de rayon 1.

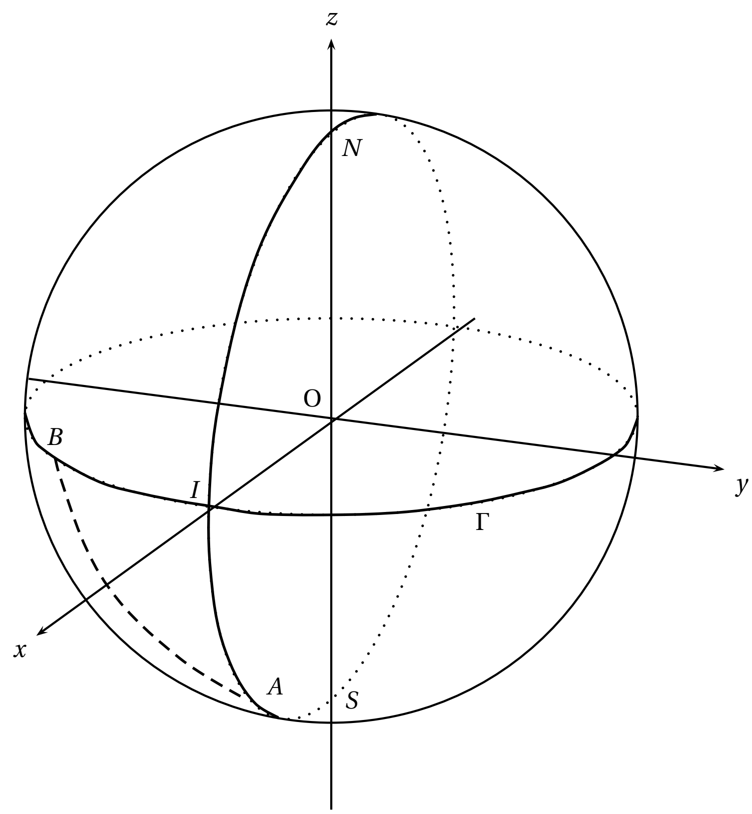
L'équateur Γ est le cercle intersection de la sphère Σ et du plan Π d'équation $z = 0$.

Tout point de Σ est alors repéré par le couple $(\theta\ ;\ \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians).

En navigation (terrestre ou aérienne) une route orthodromique désigne une trajectoire décrivant une partie d'un grand cercle du globe terrestre.

Soient les points $N\left(\theta = 0\ ;\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$, $S\left(\theta = 0\ ;\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $I(\theta = 0\ ;\ )$ et $A\left(\theta = 0\ ;\ \varphi = -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Un navire partant de A se dirige vers le **nord-ouest** en suivant une route orthodromique qui coupe l'équateur au point B (voir la figure ci-dessous).
On admet que la longitude de B est négative et que l'angle $\widehat{A}$ du triangle sphérique AIB mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians.



Rappel

Pour un triangle sphérique ABC, avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{A}\right) &= -\cos\left(\widehat{B}\right)\cos\left(\widehat{C}\right) + \sin\left(\widehat{B}\right)\sin\left(\widehat{C}\right)\cos(a)\\ \cos(a) &= \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos\left(\widehat{A}\right)\end{aligned}$$

A) Résolution du triangle sphérique AIB et position du point B

1. On rappelle que l'angle $\widehat{A}$ vaut $\dfrac{\pi}{4}$. Justifier que $\widehat{I} = \dfrac{\pi}{2}$ et donner le côté $b = \widehat{AI}$.
2. Calculer une mesure en radians de l'angle $\widehat{B}$.
3. Montrer que $\cos(a) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
4. Montrer que les coordonnées cartésiennes de B sont : $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\ ;\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ 0\right)$.

B) Projection stéréographique de pôle sud

On note $\mathcal{T}$ l'inversion de pôle S et de puissance 2.
On rappelle que pour tout point M différent de S on a $M' = \mathcal{T}(M)$ si et seulement si $\overrightarrow{SM'} = \dfrac{2}{SM^2}\overrightarrow{SM}$.

1. **Préliminaires**
   a. Calculer les coordonnées cartésiennes de A.
   b. Déterminer l'image N' du point N.
   c. Quelle est l'image de la sphère Σ privée du point S par l'inversion $\mathcal{T}$?
   d. Montrer que tout point du cercle équatorial Γ est invariant par $\mathcal{T}$.
2. Justifier le fait que A' a pour coordonnées cartésiennes $(1+\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ 0)$.
3. Soit Γ_1 le grand cercle passant par I et A. Quelle est l'image Γ_1' de Γ_1 par $\mathcal{T}$?
4. Soit Γ_2 le grand cercle passant par A et B et Γ_2' son image par $\mathcal{T}$. Justifier que Γ_2' est un cercle.
5. Représenter, sur la copie, dans le plan repéré par $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ les cercles Γ et Γ_2' ; ainsi que les inverses par $\mathcal{T}$ des côtés du triangle sphérique AIB.
   On pourra éventuellement utiliser le point B_1 symétrique de B par rapport au point O.

– ANNEXE à rendre avec la copie –

Exercice 1 :

Tableau de variations du B- 1. c.

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
$y'(t)$	

Tableau de valeurs du B-3. a. (valeurs arrondies à 10^{-2} près).

t	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$x(t)$					
$y(t)$					

Brevet de technicien supérieur session 2011
Géomètre topographe

Exercice 1 : géométrie sphérique **9 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
(Σ) est la sphère de centre O, de rayon 1.
Rappels : avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique :

- tout point de (Σ) est repéré par le couple $(\theta\ ;\ \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians) ;
- les éléments caractéristiques du triangle sphérique ABC sont notés a, b, c pour les angles au centre, et A, B, C pour les angles aux sommets et seront exprimés en radians ;
- pour un triangle sphérique ABC :
  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{\text{A}}$ et
  $\dfrac{\sin a}{\sin \widehat{\text{A}}} = \dfrac{\sin b}{\sin \widehat{\text{B}}} = \dfrac{\sin c}{\sin \widehat{\text{C}}}$.

On considère en coordonnées sphériques les points de (Σ) suivants :

$$\text{N}\left(0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{S}\left(0\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{A}(0\ ;\ 0) \quad \text{B}\left(0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{C}\left(\frac{5\pi}{12}\ ;\ 0\right)$$

1. Compléter la figure donnée en annexe 1, en plaçant les points N, S, A, B et C, ainsi que le triangle sphérique ABC.
2. **a.** En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ justifier les résultats suivants :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

   b. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées cartésiennes des points A, B, C.
3. **a.** Donner les valeurs exactes de b, c et $\widehat{\text{A}}$.
   b. Déterminer les valeurs arrondies à 10^{-3} près de a, $\widehat{\text{B}}$ et $\widehat{\text{C}}$.
   c. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de l'aire du triangle sphérique ABC.
4. On note I l'inversion de pôle N et de puissance 2.
   Pour tout point M de l'espace, on notera M' son image par l'inversion I.
   a. Déterminer l'image par l'inversion I de la sphère (Σ) privée du point N.
   b. Quelles sont les images des points A et C par l'inversion I ?
   c. Calculer les coordonnées exactes de B$'$, image du point B par l'inversion I.
   d. Placer le point B$'$ sur la figure en laissant les traits de construction.

Exercice 2 : étude d'une courbe paramétrée **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ direct.
On considère la courbe (Γ) dont chaque point M_t a pour coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) & = & \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2} \end{array}\right. ,\ t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

1. Étude des variations et étude de la courbe

a. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions x et y. Préciser l'asymptote de la courbe.

b. Démontrer que : $x'(t) = \dfrac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t(t-1)^2}{\left(1+t^2\right)^2}$.

c. Étudier les variations des fonctions x et y. Rassembler les résultats dans un tableau de variations.

d. Donner une équation de la droite (Δ) tangente à la courbe (Γ) au point E de paramètre $t = 1$.

2. Étude de la courbure

a. Démontrer que : $x''(t) = \dfrac{2\left(1-3t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^3}$.

On admettra que : $y''(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t(t-1)\left(t^3-3t^2+5t+1\right)}{\left(1+t^2\right)^3}$.

b. Déterminer le rayon de courbure R de la courbe (Γ), au point A de paramètre $t = 0$.

Rappel : $R = \dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'}$.

c. On note (C) le cercle de courbure au point A.

i. Démontrer que $\overrightarrow{J}$ est un vecteur directeur unitaire de la tangente à (Γ) en A.

Préciser le vecteur $\overrightarrow{n}$ tel que le repère $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{J},~\overrightarrow{n}\right)$ soit un repère orthonormal direct.

ii. Démontrer que le cercle (C) a pour centre le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}~;~1\right)$.

iii. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C).

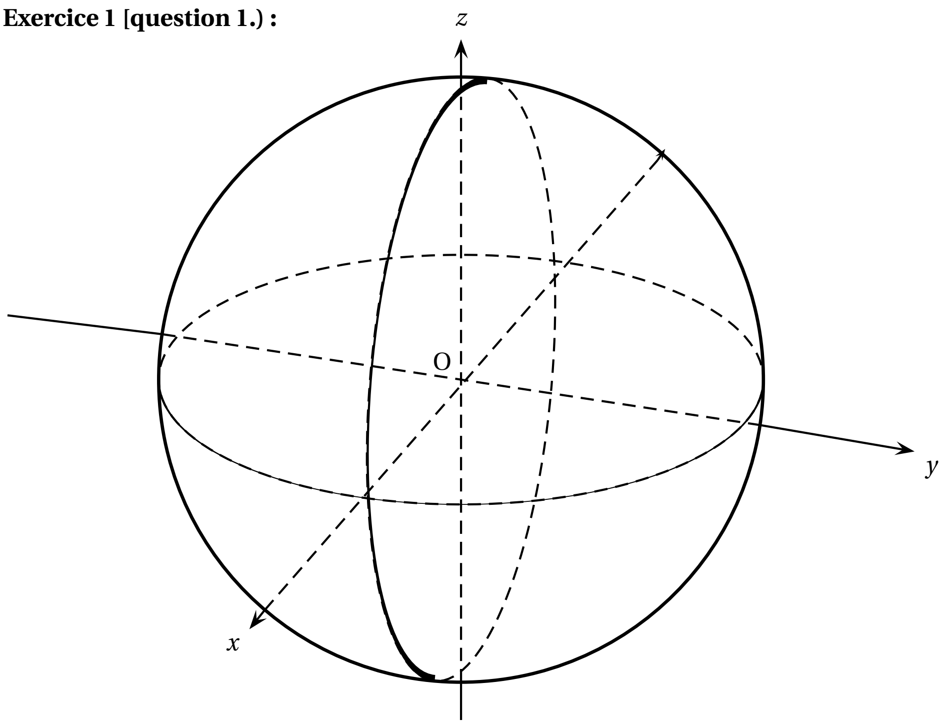
3. Tracé de la courbe (Γ)

a. Compléter le tableau de valeurs en annexe 1 ; on donnera des valeurs arrondies à 10^{-2} près.

b. Tracer la courbe (Γ), le cercle (C) et la droite (Δ) sur la feuille donnée en annexe 2.

ANNEXE 1 (À RENDRE AVEC LA COPIE)

Exercice 1 [question 1.) :



Exercice 2 [question 3. a.) :

Tableau de valeurs à compléter :

Point	M_{-2}	A	E	M_2
t	-2	0	1	2
$x(t)$				
$y(t)$				

ANNEXE 2 (À RENDRE AVEC LA COPIE)

Exercice 2 [question 3. a.) :