A. P. M. E. P.

Brevet de technicien supérieur

Le groupement Conception de produits industriels de 2001 à 2011

Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2001

Exercice 1 **6 points**

Les trois parties A, B, C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres.
Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3} .

Partie A

On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,9.
On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

Partie B

Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée « machine 1 ».
Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.
On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart type $\sigma_1 = 1,94$.
On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.
2. Calculer la probabilité que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.
3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153.

   On admet que les variables M et N sont indépendantes.

   Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est $0,914$.

Partie C

Une autre machine automatique de l'entreprise, notée « machine 2 » fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité.
On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 soit conforme est $p_2 = 0,879$.
La machine 1 fournit 60 % de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées.
On définit les évènements suivants :
A : « la pièce provient de la machine 1 » ;
B : « la pièce provient de la machine 2 » ;
C : « la pièce est conforme ».

1. Déterminer les probabilités $P(\text{A})$, $P(\text{B})$, $P(\text{C}/\text{A})$, $P(\text{C}/\text{B})$.
   (On rappelle que $P(\text{C}/\ \text{A})$ est la probabilité de l'évènement C sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. En déduire $P(\text{C} \cap \text{A})$ et $P(\text{C} \cap \text{B})$.
3. En admettant que $\text{C} = (\text{C} \cap \text{A}) \cup (\text{C} \cap \text{B})$, calculer $P(\text{C})$.

Exercice 1 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' - 2y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x}$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu au b.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. a. À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto e^t$ et, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$.
   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

   c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage de ce point.
   d. Tracer T dans le repère de l'annexe.

C. Calcul intégral

1. Soit α un réel strictement négatif; on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $I(\alpha) = -\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{3}{4}\right)e^{2\alpha}$. On pourra effectuer une intégration par parties.
2. a. Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.
   b. À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 3 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité graphique 10 centimètres.

A - Étude de fonctions et tracé d'une courbe paramétrée

À tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$, on associe le point $M(t)$ de coordonnées

$$x = f(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = g(t) = \frac{t^2}{2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[0 ; 1]$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0 ; 1]$ et regrouper les résultats dans un même tableau.
2. Préciser les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points M(0), $\text{M}\left(\frac{1}{2}\right)$ et M(1) obtenus pour $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$.
   Construire ces tangentes et la courbe $(\mathscr{C})$

B - Détermination géométrique et tracé d'une seconde courbe paramétrée

On donne les points A (1 ; 0) et B(1 ; 1) par leurs coordonnées.
Pour tout nombre t de l'intervalle $[0 ; 1]$, soit $N(t)$ le point défini par :

$$\overrightarrow{\text{O}N(t)} = \frac{(1-t)^2}{2}\overrightarrow{\text{OA}} + \frac{t^2}{2}\overrightarrow{\text{OB}}.$$

1. Montrer que les coordonnées $\left(x_1 ; y_1\right)$ du point $N(t)$ sont : $x_1 = \dfrac{1}{2} - t + t^2$ et $y_1 = \dfrac{t^2}{2}$.
2. Pour tout nombre t de l'intervalle $[0 ; 1]$, soit $I(t)$ le milieu du segment $[M(t)N(t)]$, où le point $M(t)$ de coordonnées $(x ; y)$ est défini dans la partie A et où le point $N(t)$ de coordonnées $\left(x_1 ; y_1\right)$ est défini dans la partie B.
   On observe que les points $M(t)$ et $N(t)$ ont la même ordonnée.

a. Montrer que l'abscisse $\dfrac{x+x_1}{2}$ du point $I(t)$ est constante.

b. En déduire que $N(t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à une droite (D) dont on donnera une équation.

3. On note $(\mathscr{C}_1)$ la courbe ensemble des points $N(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[0\,;\,1]$. En utilisant la symétrie mise en évidence à la question 2. b., tracer la courbe $(\mathscr{C}_1)$ dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$.

Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ sont deux cas particuliers d'un même modèle de base intervenant dans les logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO) utilisés notamment en mécanique, en aéronautique et dans l'industrie automobile.

Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2002

Exercice 1 **8 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans un groupe d'assurances, on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif.
Dans cet exercice, sauf mention contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1. Étude du nombre de sinistres par véhicule

Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $0,28$.

a. Calculer la probabilité de l'évènement A : « un véhicule tiré au hasard dans le parc n'a aucun sinistre pendant l'année considérée ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement B : « un véhicule tiré au hasard dans le parc a, au plus, deux sinistres pendant l'année considérée ».

2. Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs.

On note E l'évènement : « un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,6.

On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise. Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 conducteurs.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

a. Justifier que la variable aléatoire Y suite une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

b. Caculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.

3. Étude du coût des sinistres

Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée.

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros. On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart type 200.

Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 euros et 1 500 euros.

4. On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

a. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

b. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

On suppose que F suit la loi normale

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$$

où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le c ?fficient de confiance 95 %.

c. On considère l'affirmation suivante :

« le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **b.** »

Est-elle vraie ? On ne demande pas de justification.

Exercice 2 **8 points**

Les 3 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A – Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - y' - 2y = (-6x-4)e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x}$.

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation diférentielle (E)

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle E qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 1.$$

B – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figure ci-après.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au **b.**).

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x^2)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto \mathrm{e}^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 0.$$

   c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

C – Calcul intégral

1. **a.** La fonction f définie dans la partie **B** étant une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 2y = (-6x-4)\mathrm{e}^{-x},$$

   montrer que f vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x+4)\mathrm{e}^{-x}\right].$$

   b. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x+10)\mathrm{e}^{-x}\right].$$

   Montrer que F est une primitive de f.

   c. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$F(x) = (-x^2 - 4x - 5)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unité d'aire,

$$A = \mathrm{e} - 5.$$

Brevet de technicien supérieur Conception de produits industriels session 2003

Exercice 1 **9 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées de fa çon indépendante.

A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \quad y'' + 5y' + 6y = 4\mathrm{e}^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y'' + 5y' + 6y = 0$.
2. Vérifier que la fonction $g(x) = 4x\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $h(0) = 3$ et $h'(0) = -2$.

B Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4x+3)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-2x} = 0$.
2. **a.** Montrer par le calcul que la dérivée f' de f est définie par : $f'(x) = (-8x-2)\mathrm{e}^{-2x}$.

   b. Déterminer suivant les valeurs de x le signe de f'.

   c. En déduire les variations de la fonction f. On regroupera les résultats dans un tableau de variations en faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
3. **a.** À l'aide du développement limité de $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}$

   b. En déduire que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)$ est :
   $$f(x) = 3 - 2x - 2x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$
4. **a.** Déduire de la question précédente l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en 0.

   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de T au voisinage de 0.
5. Tracer $\mathscr{C}$ et T.

C. Calcul intégral

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur exacte de l'intégrale I $= \displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer l'aire en cm^2 à 10^{-2} près par défaut, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$.

Exercice 2 **5 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Une entreprise fabrique des jetons destinés à un établissement de jeux. On note D la variable aléatoire prenant pour valeur le diamètre en millimètres des jetons et E la variable aléatoire prenant pour valeur l'épaisseur en millimètres des jetons.
On suppose que les variables aléatoires D et E sont indépendantes.
Le cahier des charges de cette entreprise indique que le diamètre doit être égal à $29 \pm 0,4$ mm et que l'épaisseur doit être égale $2 \pm 0,1$ mm.
On admet que la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne 29 et d'écart type $0,2$ et que la variable aléatoire E suit la loi normale de moyenne 2 et d'écart type $0,04$.

1. Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait un diamètre conforme au cahier des charges.
2. Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait une épaisseur conforme au cahier des charges.
3. En déduire la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production satisfasse les deux conditions du cahier des charges.

Partie B

On suppose que 6 % des jetons ne correspondent pas au cahier des charges.
On prélève au hasard dans la production 100 jetons. Vu la quantité de jetons produite par l'entreprise, on peut assimiler ce prélèvement à un tirage successif avec remise.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons non conformes au cahier des charges.

1. Déterminer la loi de probabilité de X en justifiant la réponse et en précisant les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un seul jeton non conforme ?
3. On suppose que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson,
   a. Déterminer le paramètre de cette loi.
   b. Déterminer la probabilité d'avoir exactement 3 jetons ne répondant pas au cahier des charges.
   c. Déterminer la probabilité d'avoir au moins 4 jetons ne répondant pas au cahier des charges.

Exercice 3 **6 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

On considère la courbe H définie par les équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & 4t^3+15t^2-18t+1\\ y & = & g(t) & = & -2t^3+6t\end{array}\right.$$

où t est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0~;~1]$,

Partie A

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0~;~1]$ et rassembler les résultats obtenus dans un même tableau. On indiquera en particulier les images de 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1 ainsi que la valeur des dérivées en ces points.
2. Soit A(1 ; 0) et B(−5 ; 2). Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ est tangent à H en A.
3. Tracer H ainsi que le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.

Partie B

En fait, la courbe H est une courbe de Bézier définie à partir de quatre points de contrôle A, B, C et D, les coordonnées de D étant (2 ; 4).

1. Vérifier que la courbe part bien de A pour arriver en D.
2. On cherche dans cette question à déterminer les coordonnées du point C.
   a. En utilisant le fait que $\overrightarrow{\text{DC}}$ est tangent à H en D, déterminer l'ordonnée de C.
   b. On rappelle qu'une courbe de Bézier à 4 points de contrôle est définie par la relation :

   $$(*) \quad \overrightarrow{\text{O}M(t)} = \Sigma_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\overrightarrow{\text{O}P_i}\,,$$

   où les P_i sont les points de contrôle et $B_{i,3}(t)$ sont les polynômes de Bernstein définis par $B_{i,3}(t) = \begin{pmatrix} n\\ i\end{pmatrix} t^i(1-t)^{n-i}$ avec $\begin{pmatrix} n\\ i\end{pmatrix} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

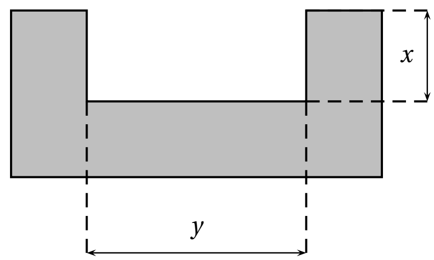
      i. Donner l'expression développée des polynômes de Bernstein : $B_{0,3}(t)$, $B_{1,3}(t)$, $B_{2,3}(t)$ et $B_{3,3}(t)$.
      ii. À l'aide de l'égalité (*), déterminer x_{C} l'abscisse de C. Tracer alors le vecteur $\overrightarrow{\text{DC}}$.

Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2004

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique, en grande série, des pièces mécaniques, dont une vue en coupe est représentée ci-contre.
Une telle pièce est acceptée après contrôle si sa cote x, exprimée en millimètres, est comprise dans l'intervalle $[49{,}8\,;\,50{,}2]$ et si sa cote y, exprimée en millimètres, est comprise dans l'intervalle $[59{,}9\,;\;60{,}1]$.



Dans cet exercice les résultats approchés seront à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

1. On suppose que la variable aléatoire X, qui à une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée associe sa cote x, suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type $0,09$.

   Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit acceptée par le contrôle pour la cote x.
2. On suppose maintenant que la variable aléatoire Y, qui à une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée associe sa cote y, suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type σ.

   Déterminer la valeur de σ pour qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit acceptée par le contrôle, pour la cote y, avec une probabilité égale à $0,95$.

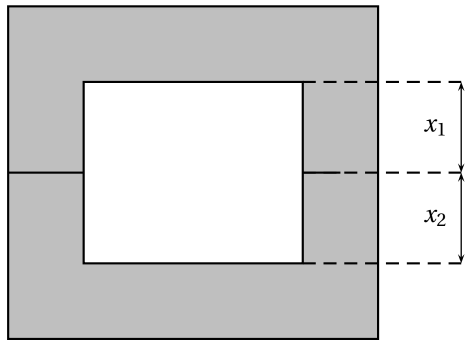
B. Évènements indépendants

On prélève une pièce au hasard dans un lot de ce type de pièces.
On appelle E_1 l'évènement : « la pièce est défectueuse pour la cote x »et E_2 l'évènement : « la pièce est défectueuse pour la cote y ».
On suppose que les deux évènements E_1 et E_2 sont indépendants, que $P(E_1) = 0,03$ et que $P(E_2) = 0,05$.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse pour les deux cotes x et y.
2. Une pièce est jugée défectueuse si elle l'est pour au moins une des deux cotes x ou y. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse.

C. Somme de deux variables aléatoires

On prélève au hasard deux pièces dans un stock, pour les assembler comme l'indique la figure ci-dessous. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de deux pièces.



On désigne par X_1 la variable aléatoire qui associe à la première pièce tirée sa cote x_1, et par X_2, la variable aléatoire qui associe à la deuxième pièce tirée sa cote x_2.
On admet que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,09 et que X_1 et X_2 sont indépendantes.
On appelle Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2$.

1. Justifier que Z suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,13.
2. Un tel assemblage est jugé défectueux si la somme $x_1 + x_2$ est inférieure à 99,8 mm.
   Calculer la probabilité qu'un tel assemblage soit défectueux,

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\text{F}) \quad : \quad y" + 2y' + y = -2\text{e}^{-x}$$

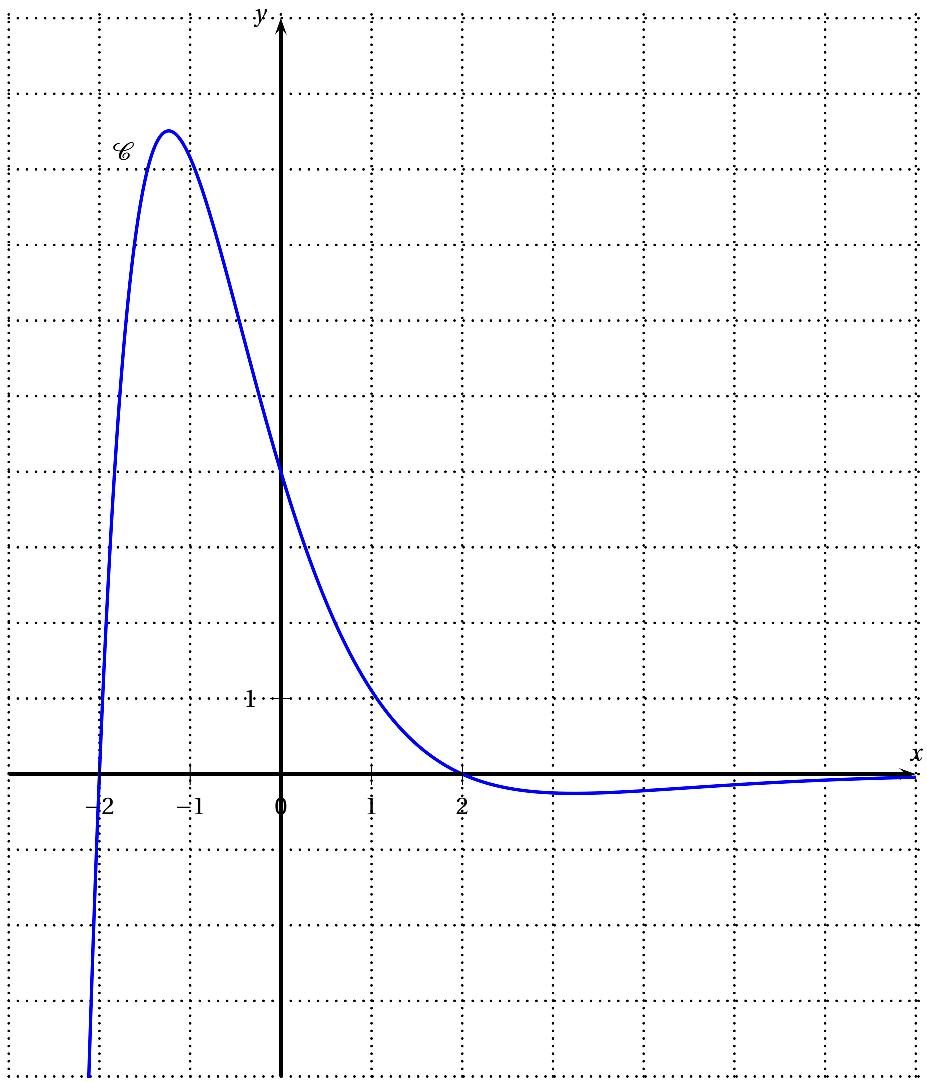
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et $y"$ sa fonction dérivée seconde.

1. Determiner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2\text{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 4$ et $f(2) = 0$.

B. Étude d'une fonction

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(4 - x^2\right)\text{e}^{-x}.$$



1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. Que peut-on déduire du a. pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. a. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(x^2 - 2x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$. (On donnera les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = 0$.)

   c. En déduire le tableau de variations de f. On fera figurer dans ce tableau les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} des éventuels extremums de f.

4. a. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   b. Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = 4 - 4x + x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

   c. Déduire du b. une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   d. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1. La fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x) - 2f'(x) - 2\mathrm{e}^{-x}$.
En déduire qu'une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(x^2 + 2x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. On note $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 2\mathrm{e}^2 + 6\mathrm{e}^{-2}$.

3. Donner une interprétation graphique de I.

Brevet de technicien supérieur Conception de produits industriels session 2005

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties A, B, C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. On considère l'équation différentielle

$$(E_1)\quad :\quad y' + y = -\mathrm{e}^{-x}.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0)\quad :\quad y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).
4. Déterminer la solution particulière f_1 de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie la condition initiale $f_1'(0) = 0$.

B. Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$.

1. On note $I = \displaystyle\int_0^{0,1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1,1\mathrm{e}^{-0,1} - 1$.
2. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction g est :

$$g(x) = -x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

3. On note $J = \displaystyle\int_0^{0,1} \left(-x + x^2 - \frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $J = -\dfrac{0,1123}{24}$.
4. On considère l'affirmation suivante : le nombre $I - J$ est inférieur à 10^{-6}. Cette affirmation est-elle vraie ?

C. On considère l'équation différentielle

$$(E_2)\quad :\quad y'' - y = 2\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E)\quad :\quad y'' - y = 0$.
2. On admet que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_2). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. Déterminer la solution particulière f_2 de l'équation différentielle (E_2) qui vérifie les conditions initiales $f_2(0) = 0$ et $f_2'(0) = 0$.

Exercice 2 **7 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Dans le cadre d'accords sur la formation professionnelle, une grande entreprise a proposé à ses personnels un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de conceptior industrielle.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A.

On note E l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage ».
On suppose que $P(E) = 0,3$.
On tire au hasard le nom de n personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

1. Dans celle question on prend $n = 15$.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 15 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres,

b. Déterminer la probabilité qu'une personne au plus parmi les 15 dont le nom a été tiré au hasard ait suivi le stage.

2. Dans cette question on prend $n = 150$.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 150 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,3$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

a. Justifier les paramètres de cette loi normale.

b. Calculer la probabilité qu'au plus 40 personnes, parmi les 150 dont le nom a été tiré au hasard, aient suivi le stage, c'est à dire calculer $P(Z \leqslant 40,5)$.

B.

Dans cette entreprise 45 % du personnel a un niveau de qualification supérieur ou égal à « bac + 2 ».

L'évènement A : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 »a donc pour probabilité $P(A) = 0,45$.
On rappelle que l'évènement E : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage »a pour probabilité $P(E) = 0,3$.
Enfin, 35 % des personnes dont le niveau de qualification est supérieur ou égal à « bac + 2 »ont suivi le stage. Ce qui permet d'en déduire la probabilité conditionnelle $P_A(E) = 0,35$,ou $P(E|A) = 0,35$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage et a un niveau de qualification supérieur ou égal à bac + 2 ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne dont le nom a été tiré au hasard parmi les noms des personnes ayant suivi le stage a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 ».

Exercice 3 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

À tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,2]$, on associe le point $M(t)$ de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & t^3-3t^2+3t \\ y(t) & = & g(t) & = & [\ln(1+t)]^2. \end{array}\right.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[0\,;\,2]$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur [0 ; 21 et regrouper les résultats dans un même tableau.
2. Donner un vecteur directeur pour chacune des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points $M(0)$, $M(1)$ et $M(2)$, obtenus pour $t=0$, $t=1$ et $t=2$.
3. Tracer les tangentes définies à la question **2.** et la courbe $\mathcal{C}$.

Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2006

Exercice 1 **8 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad :\quad y'' + 2y' + 5y = -5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0)\quad :\quad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3+2x^2-x$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin 2x - x^3 + 2x^2 - x.$$

1. À l'aide du développement limité de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, à l'ordre 3 au voisinage de 0, écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
2. Écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \sin 2x$.
3. En déduire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin 2x$.
4. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

5. Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse zéro.
6. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

Exercice 2 **5 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces métalliques pour l'industrie.

A. Probabilités conditionnelles

Les pièces sont produites dans deux ateliers appelés « atelier 1 » et « atelier 2 ».
L'atelier 1 produit chaque jour 250 pièces et l'atelier 2 produit chaque jour 750 pièces.
On admet que 1 % des pièces produites par l'atelier I sont défectueuses et que 2 % des pièces produites par l'atelier 2 sont défectueuses.
On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des 1 000 pièces produites par les deux ateliers pendant une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les évènements suivants :

A : « la pièce prélevée provient de l'atelier 1 » ;
B : « la pièce prélevée provient de l'atelier 2 » ;
D : « la pièce prélevée est défectueuse ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$ et $P(D/B)$. (On rappelle que $P(D/A) = P_A(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. En déduire la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse.

B. Loi binomiale
Dans cette question, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

On considère un stock important de pièces de ce modèle.
On note E l'évènement : «une pièce prélevée au hasard dans le stock est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,02$.
On prélève au hasard dix pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de dix pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de dix pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce de ce prélèvement ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.

Exercice 3 **7 points**

On envisage de créer une nouvelle police de caractère. On s'intéresse plus précisément à la lettre P et on utilise des courbes de Bézier pour définir les contours de cette lettre.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres.

1. On souhaite construire la courbe de Bézier $\mathcal{C}_1$ définie par les points dc définition suivants donnés par leurs coordonnées $A_0(0 ; 3)$; $A_1(4 ; 3)$; $A_2(4 ; 6)$ et $A_3(0 ; 6)$.
   On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition $A_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = \sum_0^n B_{i,\ n}(t)\overrightarrow{\text{O}A_i} \text{ où } B_{i,\ n}(t) = \text{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

a. Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,\,3}(t)$, avec $0 \leqslant i \leqslant 3$.

b. On note $\left(f_1(t),\ g_1(t)\right)$ les coordonnées du point $M_1(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$.
Vérifier que, pour tout i de $[0\,;\,1]$, $f_1(t) = 12t - 12t^2$.
On admettra dans la suite de l'exercice que $g_1(t) = 3 + 9t^2 - 6t^3$.

Un système d'équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}_1$ est donc :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 12t - 12t^2 \\ y & = & g_1(t) & = & 3 + 9t^2 - 6t^3 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1]$$

c. Étudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d. Préciser les coordonnées des points de $\mathscr{C}_1$ où les tangentes â $\mathscr{C}_1$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

e. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ et les tangentes parallèles aux axes sur une feuille de papier millimétré.

2. Soit $\mathscr{C}_2$ une courbe de Bézier définie par les trois points de définition suivants donnés par leurs coordonnées : $A_0(0\ ;\ 3)$; $A_4\left(0\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$; $A_5(-2,\ ;\ 0)$.
La courbe $\mathscr{C}_2$ est définie paramétriquement par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_2(t) & = & 2t^2 \\ y & = & g_1(t) & = & 3 - \dfrac{11}{2}t + \dfrac{5}{2}t^2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1]$$

Le tableau des variations conjointes de f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		1
$f_2'(t)$	0	$-$	-4
$f_2(t)$	0	$\searrow$	-2
$g_2'(t)$	$-\frac{11}{2}$	$-$	$-\frac{1}{2}$
$g_2(t)$	3	$\searrow$	0

a. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point A_5.
Quelle est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ en A_0 ?

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_1$. Construire la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ en A_5 ainsi que le point A_4 et le segment $[A_0A_3]$.

Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2007

Exercice 1 **8 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y'' + 2y' + \frac{5}{4}y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{1}{2}x.$$

1. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   b. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \sin\frac{1}{2}x$.

   c. Déduire du 1 et du 2 que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = x - x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

2. Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse zéro.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

Exercice 2 **6 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;3]$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 4 cm.

A. Étude des variations et courbe représentative

1. Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $f(3)$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $]0\,;3]$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

b. En déduire les variations de f sur $]0\,;\,3]$.

3. On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est l'axe des ordonnées. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré,

B. Calcul intégral

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses. On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide. On admet que $V = \displaystyle\int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $V = \displaystyle\int_0^3 4\pi x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$V = 4\pi\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right).$$

3. Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

Exercice 3 **8 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.
On souhaite construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré. Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$:

$$P_1(0\ ;\ 1)\ ;\ P_2(2\ ;\ 1)\ ;\ P_3(4\ ;\ 3)\ \text{ et } P_4(6\ ;\ 1).$$

1. On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour t appartenant à $[0\,;\,1]$ par :

$$R_i(t) = 3\sum_{j=0}^{j=2-i}(-1)^j\frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Montrer que, pour tout t de $[0\,;\,1]$, $R_0(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + \dfrac{1}{2}$. (**On pourra utiliser ce résultat dans la suite de l'exercice**)

Dans la suite de cet exercice, on admet que, pour tout t de $[0\,;\,1]$:

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

2. La courbe B-spline Γ cherchée est la réunion de deux arcs de courbe Γ_1 et Γ_2.
Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_1(t)} = R_0(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_1(t)} + R_1(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_2(t)} + R_2(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_3(t)}.$$

Γ_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_2(t)} = R_0(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_2(t)} + R_1(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_3(t)} + R_2(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_4(t)}.$$

a. Montrer que l'arc de courbe Γ_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1(t) & = & f_1(t) & = & 2t+1 \\ y_1(t) & = & g_1(t) & = & t^2+1 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

b. Étudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

c. On admet que l'arc de courbe Γ_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_2(t) & = & f_2(t) & = & 2t+3 \\ y_2(t) & = & g_2(t) & = & -2t^2+2t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

Étudier les variations de f_2 et g_2 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d. Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.

e. Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $M_2(1)$.

f. On rappelle que, dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 centimètres.

Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe Γ aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$ puis l'arc de courbe Γ_1. Construire, sur la même figure que Γ_1, les tangentes à l'are de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $M_2(1)$ puis l'arc de Γ_2.

Placer les points de définition P_1 , P_2, P_3, P_4 sur la figure.

3. **a.** Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2.

b. Montrer que les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en I.

c. Montrer que la tangente commune à l'arc Γ_1 et à l'are Γ_2 au point I est la droite (P_2P_3).

d. Montrer que le point $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$ et que le point $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3P_4]$.

Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2008

Exercice 1 **6 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad :\quad y" - y = (-4x-6)\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0)\quad :\quad y'' - y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x}$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2+4x+3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x)3 + x - 3x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

2. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

   a. Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse O.

   b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

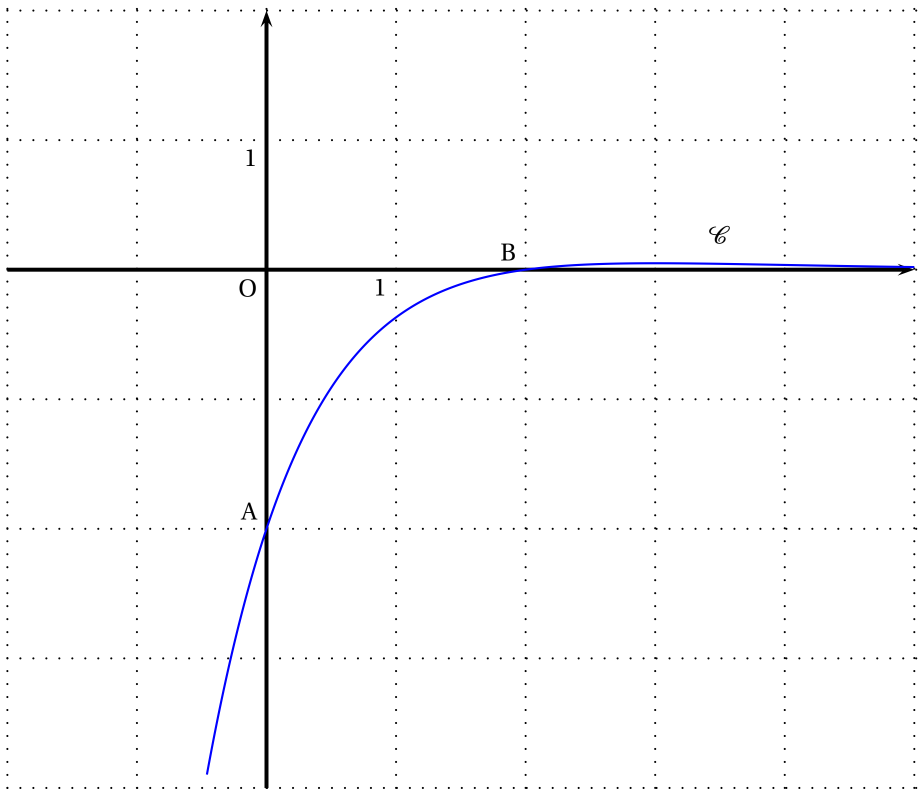
Exercice 2 **5 points**

A. Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deu nombres réels.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 2 cm est donnée ci-dessous.



1. La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A et B de coordonnées respectives $(0\,;\,-2)$ et $(2\,;\,0)$.
   Déterminer les nombres réels a et b.

Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Établir le tableau de variations de f.
   Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites.

B. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = -1 - \mathrm{e}^{-2}$.
2. **a.** En déduire la valeur exacte de l'aire S en cm^2 de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe $\mathscr{C}$ entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2.
   b. Donner la valeur approchée de S arrondie à 10^{-2}.

Exercice 3 **9 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

On appelle courbe de Bézier définie par les points de définition $A_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,\ n}(t)\overrightarrow{\mathrm{O}A_i} \text{ où } B_{i,\ n}(t) = \mathrm{C}_n^i (1-t)^{n-i}.$$

A. Construction d'une courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ définie par les quatre points de définition A(0 ; 1) ; B(2 ; 1) ; C(0 ; 2) ; D(0 ; 4), dans cet ordre.

1. Démontrer que, pour tout t de $[0\,;\,1]$, $B_{1,\ 3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$.
2. On admet que, pour tout t de $[0\,;\,1]$
   $B_{0,\ 3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$; $B_{2,\ 3}(t) = 3t^2 - 3t^3$ et $B_{3,\ 3}(t) = t^3$.
   En déduire qu'un système d'équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}_1$ est :

   $$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y & = & g_1(t) & = & 1 + 3t^2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

3. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.
4. Préciser les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_1$ où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.
5. Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.
6. Tracer la tangente (AB) et la courbe $\mathscr{C}_1$ dans le repère donné au début de l'énoncé.

B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$

On considère la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ définie par les trois points de définition E(−2 ; 0) ; F(3 ; 1) et A(0 ; 1) dans cet ordre.

Les deux résultats suivants n 'ont pas à être démontrés.

- Un système d'équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}_2$ est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_2(t) & = & -2 - 2t + 4t^2 \\ y & = & g_2(t) & = & 2t - t^2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

- Le tableau de variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f_2'(t)$	-2	$-$	0	$+$	6
$f_2(t)$	-2	$\searrow$	$-2,25$	$\nearrow$	0
$g_2'(t)$	2		$+$		0
$f_2(t)$	0		$\nearrow$		1

1. Construire sur la figure de la partie A le point M_0 tel que $\overrightarrow{\mathrm{E}M_0} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, le point M_1 tel que $\overrightarrow{\mathrm{F}M_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ et le point R tel que $\overrightarrow{M_0R} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{M_{0M_1}}$.
2. Calculer les coordonnées des points M_0, M_1 et R.
3. Montrer que le point R est le point de la courbe $\mathscr{C}_2$ de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que la droite (AF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point A.
5. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente au point A.
6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur la même figure que la courbe $\mathscr{C}_1$.

Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2009

Exercice 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Soient M et N les matrices définies par $M = \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\3&0&-1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}2&-1&0\\3&-3&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $M+N$ est :	$\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&1&-1\\3&-2&5\\4&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&-3&4\\3&0&-2\end{pmatrix}$

2. Avec les mêmes données qu'au **1.** :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M\times N$ est :	$\begin{pmatrix}7&-7&0\\7&-3&9\\5&-3&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&-3&4\\3&0&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&7&5\\-7&-3&-3\\0&9&-2\end{pmatrix}$

3. $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de sens direct de L'espace. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :	orthogonaux	colinéaires	ni orthogonaux ni colinéaires

4. Avec les mêmes données qu'au 3.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est :	$\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}$	$\vec{0}$	$\vec{w}\begin{pmatrix}2\\10\\8\end{pmatrix}$

Exercice 2 **8 points**

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + xy = x.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' + xy = 0.$$

2. Démontrer que la fonction constante g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b. Que peut on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

   b. Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ défini au début de la partie B.

   b. Tracer dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$ la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$.

On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction définie par

$$\boldsymbol{x \longmapsto 2 - \frac{x^2}{2}}$$

On constate que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ sont proches l'une de l'autre sur l'intervalle $[-0,5~;~0,5]$.

C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. **a.** En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.
2. **a.** On note $J = \displaystyle\int_{-0,5}^{0,5} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $J = \dfrac{47}{24}$. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-3}.

   b. Un logiciel donne $I \approx 1,960$. Vérifier que cette valeur approchée de I et la valeur approchée de J obtenue à la question a. diffèrent de 2×10^{-3}.

Exercice 3 **8 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 centimètres. On se propose de construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3 et P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré.

Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$:

$$P_1(0\,;\,3),\ P_2(1\,;\,-2),\ P_3(4\,;\,3)\ \text{ et }\ P_4(2\,;\,5).$$

La courbe B-spline cherchée est la réunion de deux arcs de courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

A. Détermination d'une représentation paramétrique de l'arc de courbe $\mathscr{C}_1$

1. On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$ par :

$$R_i(t) = 3\sum_{j=0}^{j=2-i}(-1)^j\frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Démontrer que, pour tout t de $[0\,;\,1]$, $R_0(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + \dfrac{1}{2}$.

2. L'arc de courbe $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_1(t)} + R_1(t)\overrightarrow{OP_2(t)} + R_2(t)\overrightarrow{OP_3(t)}.$$

On admet que pour tout t de $[0\,;\,1]$: $R_1(t) = -t^2 + t + \dfrac{1}{2}$ et $R_2(t) = \dfrac{1}{2}t^2$.

Démontrer que l'arc de courbe $\mathscr{C}_1$ est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & t^2 + t + \dfrac{1}{2} \\ y & = & g_1(t) & = & 5t^2 - 5t + \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

B. Étude de variations et construction de la courbe B-spline

1. **a.** Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0\,;\,1]$, où f_1 et g_1 sont les fonctions définies à la question 2. de la partie *A*. Rassembler les résultats dans un tableau unique.

   b. Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe $\mathscr{C}_1$ aux points $M_1(0)$, $M_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $M_1(1)$.

2. L'arc de courbe $\mathscr{C}_2$ est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_2(t)} + R_1(t)\overrightarrow{OP_3(t)} + R_2(t)\overrightarrow{OP_4(t)}.$$

On admet que l'arc de courbe $\mathscr{C}_2$ est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_2(t) & = & -\dfrac{9}{2}t^2 + 3t + \dfrac{5}{2} \\ y & = & g_2(t) & = & -\dfrac{3}{2}t^2 + 5t + \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f_2'(t)$	3	$+$	0	$-$	-6
$f_2(t)$	$\frac{5}{2}$	↗	3	↘	1
$g_2'(t)$	5		$+$		2
$g_2(t)$	$\frac{1}{2}$	↗	2	↗	4

Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe $\mathscr{C}_2$ aux points $\mathscr{C}_1$ aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\frac{1}{3}\right)$, $M_2(1)$.

3. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

a. Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe $\mathscr{C}_1$ aux points $M_1(0)$, $M_1\left(\frac{1}{2}\right)$ et $M_1(1)$, puis l'arc de courbe $\mathscr{C}_1$.

b. Construire, sur le même graphique, les tangentes à l'arc de courbe $\mathscr{C}_2$ aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\frac{1}{3}\right)$, $M_2(1)$, puis l'arc de courbe $\mathscr{C}_2$.

c. Placer les points de définition sur la figure.

4. **a.** Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b. Montrer que la tangente commune à l'arc $\mathscr{C}_1$ et à l'arc $\mathscr{C}_2$ au point I est la droite (P_2P_3).

BTS Conception de produits industriels
Session 2010

EXERCICE 1 **10 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) :\ 2y'' + 2y' + y = (5x^2 + 22x + 31)\mathrm{e}^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) :\ 2y'' + 2y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

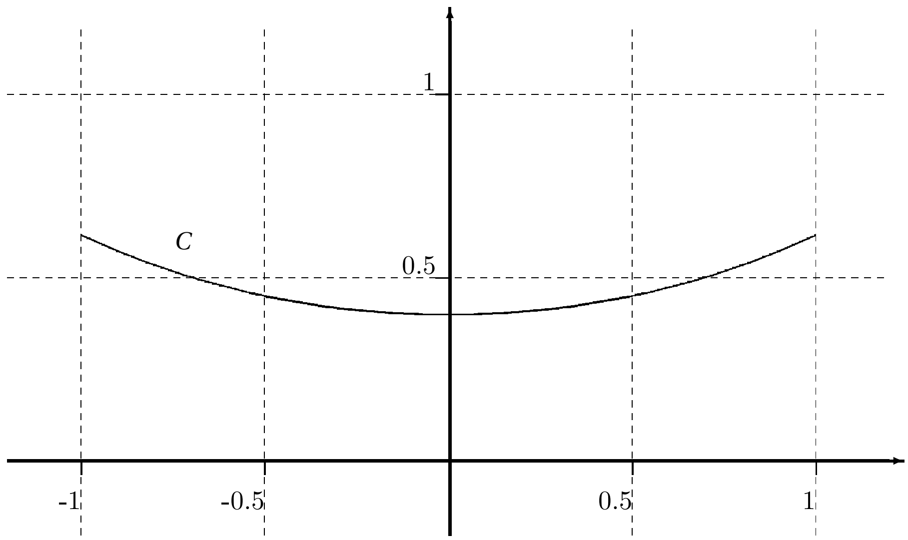
B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right)\mathrm{e}^x$.
On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$f'(x) = (x^2 + 4x + 5)\mathrm{e}^x.$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
4. Établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. **a.** Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :
   $f(x) = 3 + 5x + \frac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
   b. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
   c. Étudier ia position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 **3 points**

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal de la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$.



On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.

On désigne par V le volume, en unités de volume, de ce solide.

On admet que $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \pi\left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$.

1. Vérifier que : $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{25}\left(2 + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) \mathrm{d}x$.
2. Démontrer que : $V = \dfrac{\pi}{25}\left(4 + \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2}\right)$.
3. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

Le solide obtenu ci-dessus est le modèle d'un élément de mobilier urbain.

EXERCICE 3 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 4 centimètres.
On souhaite construire la courbe de Bézier C définie par les points de définition suivants donnés par leurs coordonnées : $A_0(0~;~0)$; $A_1(0~;~2)$; $A_2\left(3~;~\frac{3}{4}\right)$.
On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition $A_i(0 \leqslant i \leqslant n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0~;~1]$:

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{0}^{n} B_{i,n}(t)\,\overrightarrow{OA_i} \quad \text{où } B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i\, (1-t)^{n-i}.$$

1. Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,2}(t)$ avec $0 \leqslant i \leqslant 2$.
2. On note $\left(f(t), g(t)\right)$ les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe C.
   Démontrer qu'un système d'équations paramétriques de la courbe C est :
   $\begin{cases} x = f(t) = 3t^2 \\ y = g(t) = 4t - \frac{13}{4}t^2 \end{cases}$ où t appartient à l'intervalle $[0~;~1]$.
3. Étudier les variations de f et g sur $[0~;~1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.
4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe C :
   a. au point A_0,
   b. au point A_2,
   c. au point $M\left(\frac{8}{13}\right)$.
5. La figure est à réaliser sur une feuille de papier millimétré. Construire les tangentes définies au **4** et la courbe C. Que constate-t-on ?

Brevet de technicien supérieur

∽ Brevet de technicien supérieur ∽

BTS Conception de produits industriels mai 2011

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples
Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est :	-1	5	$\overrightarrow{v}$

2. Avec les mêmes données qu'au **1.**,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La norme du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est :	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4

3. On donne les matrices M et N : $M = \begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\12 & -7 & -12\\6 & -4 & -5\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}6 & -4 & -6\\6 & -3 & -6\\3 & -2 & -2\end{pmatrix}$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$M - 2N$ est égale à :	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4. Avec les mêmes données qu'au **3.**,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times M = M^2$ est :	$\begin{pmatrix}377 & 356 & 170\\356 & 337 & 160\\170 & 160 & 77\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}169 & 64 & 144\\144 & 49 & 144\\36 & 16 & 25\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (6 points)

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

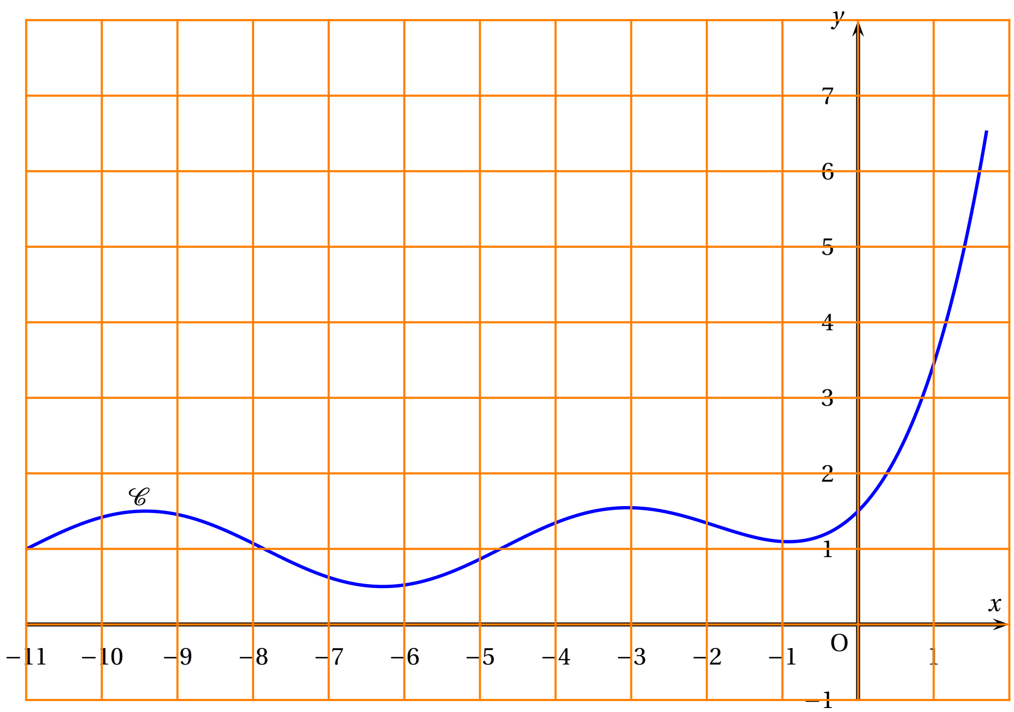
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 1 - \sin x$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Déterminer la constante réelle k telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = k\cos x + 1$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = \frac{3}{2}$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\cos x$.

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



1. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos x$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = \frac{3}{2} + x + \frac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

2. **a.** Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

Brevet de technicien supérieur

EXERCICE 3 (10points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère les nombres réels $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3$ et $t_4 = 4$.
On se propose de construire une courbe B-spline de degré 2 de vecteur n ud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$.
A. Détermination des fonctions polynômes B-splines
On rappelle que les fonctions polynômes B-splines de degré m associées au vecteur nœud $(t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour $m \neq 0$, par :

$$N_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1} - t}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

1. On a déterminé des fonctions polynômes B-splines de degré 0 et 1 associées au vecteur n(0, 1, 2, 3, 4) qui ont été rassemblées dans les tableaux ci-dessous.

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,0}(t)$	0	1	0	0	0	0
$N_{1,0}(t)$	0	0	1	0	0	0
$N_{2,0}(t)$	0	0	0	1	0	0
$N_{3,0}(t)$	0	0	0	0	1	0

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,1}(t)$	0	t	$2-t$	0	0	0
$N_{1,1}(t)$	0	0		$3-t$	0	0
$N_{2,1}(t)$	0	0	0	$t-2$	$4-t$	0

Déterminer $N_{1,1}(t)$ pour tout t de l'intervalle [1, 2].

2. Le tableau suivant donne les fonctions polynômes B-splines de degré 2 associées au vecteur nœud (0, 1, 2, 3, 4) :

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,2}(t)$	0	$\frac{1}{2}t^2$	$-t^2+3t-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}t^2-3t+\frac{9}{2}$	0	0
$N_{1,2}(t)$	0	0	$\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}t^2-4t+8$	0

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle [2, 3], $N_{1,2}(t) = -t^2 + 5t - \frac{11}{2}$.

B. Détermination des équations paramétriques d'un des arcs de la courbe B-spline
Dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 8 centimètres, on considère les points $P_0(0,1)$ et $P_1(2,1)$.
La courbe B-spline associée aux points P_0 et P_1, au vecteur nœud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ et aux polynômes B-splines de degré 2 est définie par $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{i=1} N_{i,2}(t)\overrightarrow{OP_i}$.
Démontrer que, pour tout t de l'intervalle [1, 2], le point $M(t)$ a pour coordonnées : $x(t) = t^2 - 2t + 1$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$.
Dans ce qui suit, **on admet** que, pour tout t de l'intervalle [2, 3], le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t) = -2t^2 + 10t - 11$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$.

Brevet de technicien supérieur

C. Construction de la courbe B-spline

On considère l'arc C_1, ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = f_1(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = g_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{array}\right. \text{, où } t \text{ appartient à l'intervalle } [1, 2].$$

1. **a.** Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur [1, 2] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

   b. Préciser des vecteurs directeurs des tangentes à C_1 aux points $M(t)$ de paramètres 1 et 2.

2. On considère l'arc C_2, ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = f_2(t) = -2t^2 + 10t - 11 \\ y(t) = g_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{array}\right. \text{, où } t \text{ appartient à l'intervalle } [2, 3].$$

   On admet que le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 sur [2 ; 3] est le suivant :

t	2		$\frac{5}{2}$		3
$f_2'(t)$	2	+	0	−	−2
$f_2(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1
$g_2'(t)$	0		−		−1
$g_2(t)$	1	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

   Déterminer (par lecture du tableau ou par calcul) des vecteurs directeurs des tangentes à C_2 aux points $M(t)$ de paramètres 2, $\frac{5}{2}$ et 3.

3. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 8 centimètres.

   a. Construire les tangentes à la courbe C_1 aux points $M(1)$ et $M(2)$.

   b. Construire les tangentes à la courbe C_2 aux points $M(2)$, $M\left(\frac{5}{2}\right)$ et $M(3)$.

   c. On désigne par A le point de coordonnées $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

   On admet que pour t appartenant à l'intervalle [0, 1], l'arc C_0 de la courbe B-spline cherchée est le segment $[OA]$.

   Construire sur le même graphique les arcs de courbe C_0, C_1, C_2.