GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGÉNIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN TELECOM Lille 1
ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE

Mardi 30 avril 2021

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Les questions à choix multiples sont signalées par la mention QCM. Pour chaque QCM, plusieurs réponses sont proposées et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Vous entourerez la (ou les) réponse(s) choisies) sur la feuille de réponses.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse ne sera pas pénalisée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

EXERCICE 1 **31 points**

Partie A - Étude d'un triangle ABC

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère le triangle dont les sommets A, B et C sont définis par leurs coordonnées respectives :

$$A(6 ; 0) \quad B(4 ; 8) \quad C(-4 ; 0).$$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. Détailler le calcul.
3. Calculer la valeur exacte de la norme des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   Détailler le calcul. Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers avec b le plus petit possible.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$. Justifier la réponse.
5. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$. Justifier la réponse.
6. Montrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est 40 unités d'aire.

Partie B - Étude d'un tétraèdre ABCD

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre dont les sommets A, B, C et D sont définis par leurs coordonnées respectives :

$$A(6 ; 0 ; 0) \quad B(4 ; 8 ; 0) \quad C(-4 ; 0 ; 0) \quad D(-4 ; 0 ; 20)$$

Le triangle ABC est celui étudié dans la partie A, placé dans le plan d'équation $z = 0$.
La droite (DC) est parallèle à l'axe (Oz).

7. Que représente la droite (DC) pour le tétraèdre ABCD ?
8. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h$, où A_{base} représente l'aire de la base de la pyramide et où h en représente la hauteur.
   Calculer la valeur exacte, en unités de volume, du volume V du tétraèdre ABCD.
   Détailler le calcul.
9. On donne le vecteur $\vec{n}\,(4 ; 1 ; 2)$. Calculer $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA}$. Détailler le calcul.
10. Justifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

11. En déduire une équation cartésienne du plan (ABD). Détailler le calcul.
12. On note A$'$ le point d'intersection du plan (ABD) avec l'axe (Oz). Donner les coordonnées de A$'$.
13. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{DA}'} = k\overrightarrow{\mathrm{DA}}$. Justifier la réponse.
14. **QCM** - Soit (P) le plan passant par A$'$ et parallèle au plan (ABC). Soit (A$'$ B$'$C$'$) la section de (P) avec le tétraèdre ABCD.

    Quelle est la valeur approchée en unités de volume, arrondie à l'unité, du volume du tétraèdre A$'$B$'$C$'$D ?

    A. 17 unités de volume **B.** 107 unités de volume
    C. 160 unités de volume **D.** 250 unités de volume

Partie C- Dans une sphère

On appelle plan médiateur d'un segment non réduit à un point, l'ensemble des points de l'espace équidistants des extrémités de ce segment. C'est le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

15. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AC].
16. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
17. En déduire qu'une équation du plan médiateur P_1 du segment [AC] est $x = 1$. Justifier la réponse.
18. Justifier qu'une équation du plan médiateur P_2 du segment [AB] est $x - 4y + 11 = 0$.

    On admet qu'une équation du plan médiateur P_3 du segment [CD] est $z = 10$.
19. En utilisant les équations des plans médiateurs, déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère (S) circonscrite au tétraèdre ABCD. Détailler le calcul.
20. Calculer le rayon R de la sphère (S). Détailler le calcul.

EXERCICE II **22 points**

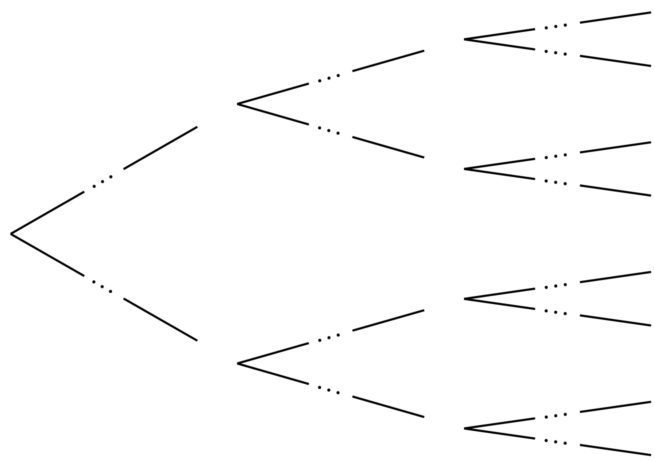
Tous les résultats de cet exercice seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.
Les parties A et B sont indépendantes

Soit A et B deux pièces de monnaie. La pièce A donne « Face » avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et la pièce B donne « Face » avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.
Lorsqu'on lance l'une de ces deux pièces, si on obtient « Face », on conserve cette pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Partie A - Trois lancers successifs des pièces

On effectue une série de trois lancers, en commençant par lancer la pièce A. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note F_i l'évènement « on obtient Face » au i-ème lancer » et $P_i = \overline{F_i}$ l'évènement contraire.

1. Compléter l'arbre de probabilités donné.



2. X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de fois où « Face » est obtenu.
Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance de X.

Partie B - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -1 \\ u_{n+1} & = & -\dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{4} \text{ pour tout } n > 0, \end{array}\right.$$

4. Donner les valeurs de u_1 et u_2.
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0,\ v_n = u_n - \frac{3}{5}.$$

   a. Donner la valeur de v_0.

   b. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$.

6. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = -\dfrac{8}{5}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n + \dfrac{3}{5}$.
7. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\dfrac{3}{5}$.

Partie C - *n* lancers successifs des pièces

Dans cette partie, on ne se limite plus à trois lancers.
Pour tout entier naturel $n > 1$, on considère les évènements suivants :
A_n : « on utilise la pièce A pour le n-ième lancer »
$\overline{A_n}$: « on utilise la pièce B pour le n-ième lancer ».
On note $p_n = P(A_n)$.
On commence toujours par lancer la pièce A et on a donc $p_1 = 1$.

8. Donner $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
9. Donner l'expression de $P\left(\overline{A_n}\right)$, $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)$ en fonction de p_n.

10. En déduire que, pour tout entier $n > 1$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$.

D'après ce qui précède et la question **6.**, on a $p_n = -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$ pour tout entier naturel $n > 1$.

11. On note F_n l'évènement « obtenir Face au n-ième lancer ».

a. Donner l'expression de $P(F_n \cap A_n)$ et $P\left(F_n \cap \overline{A_n}\right)$ en fonction de p_n.

b. Déterminer la limite de la probabilité $P(F_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Justifier la réponse.

EXERCICE III **27 points**

Les parties A et B sont indépendantes. La partie C dépend des deux premières parties.

On souhaite étudier l'évolution au cours du temps de la concentration d'un analgésique dans le sang : par voie intraveineuse dans la partie A. puis par voie orale dans la partie B.

Partie A - Voie intraveineuse

Dans cette partie, λ est une constante réelle strictement positive.
On considère l'équation différentielle (E_1) : $y'(t) = -\lambda y(t)$, où y est une fonction définie pour tout réel t.

1. Déterminer la solution générale de (E_1).

2. On appelle Q la solution de (E_1) qui vérifie $Q(0) = 0,6$.
Donner l'expression de Q en fonction de λ. Justifier la réponse.

3. Donner la limite de Q en $+\infty$. Donner le sens de variation de Q. Aucune justification n'est demandée.

À l'instant $t = 0$, une dose d'un analgésique est injectée dans le sang par voie intraveineuse. La substance se répartit instantanément dans le sang, ce qui donne une concentration initiale de 0,6 mg/L, et est ensuite progressivement éliminée.
Pour tout $t > 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $Q(t)$ trouvée à la question **2.**
Au bout d'une heure, la concentration de médicament présente dans le sang a diminué de 30 %.

4. Calculer la valeur de λ. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près. Justifier la réponse.

Le médicament est efficace tant que sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L,

5. Déterminer, en heures, le temps d'efficacité te du médicament. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près. Justifier la réponse.

Partie B - Voie orale

On considère l'équation différentielle

$$(E_2) : \quad y'(t) + y(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}.$$

6. Vérifier que la fonction g définie, pour tout réel t, par $g(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$, est une solution de (E_2).

7. En déduire la solution générale de (E_2).

8. Donner la solution f de (E_2) vérifiant $f(0) = 0$. Justifier la réponse.

On considère la fonction q définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $q(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$.
On note $\mathscr{C}_q$ la courbe représentative de q dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

9. Donner la limite de q en $+\infty$. En déduire une équation de l'asymptote é à $\mathscr{C}_q$ en $+\infty$.

10. q' désigne la fonction dérivée de q. Pour tout réel positif t, $q'(t)$ s'écrit sous la forme
$q'(t) = \text{e}^{-\frac{t}{2}}\left(a\text{e}^{-t} + b\right)$.
Donner la valeur de a et de b. Justifier la réponse.

11. Donner l'ensemble des solutions réelles t de l'inéquation $q'(t) > 0$. Justifier la réponse.

12. Soit A le point de $\mathscr{C}_q$ d'abscisse $x_\text{A} = \ln 4$ et d'ordonnée y_A.
Calculer la valeur exacte de y_A. Détailler le calcul.

13. Compléter le tableau de variations de q sur $[0\,;\,+\infty[$.

À l'instant $t = 0$, un analgésique est administré par voie orale en une prise. La substance est absorbée progressivement dans le sang puis éliminée.
Pour tout $t > 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $q(t)$.
Le médicament cause des effets indésirables quand sa concentration dans le sang est supérieure à $0,3$ mg/L.

14. Le médicament va-t-il causer des effets indésirables au patient ? Justifier la réponse.

Partie C - Comparaison des deux méthodes

15. QCM - Quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons être tout de suite soulagé de la douleur ?

A. Voie orale **B** Voie intraveineuse **C** Peu importe lequel

16. QCM - Sachant que l'analgésique est efficace quand sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L par les deux méthodes, quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons que ce médicament soit efficace le plus longtemps possible ?

A. Voie orale **B** Voie intraveineuse **C** Peu importe lequel