PONDICHERY 2013 (S)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

1. (...)
2. (...)
3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
   On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
   On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.
   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
   b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x :

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	$0,00$	$0,31$	$0,62$	$0,93$	$1,24$	$1,55$
$P(Z < x)$	$0,061$	$0,108$	$0,177$	$0,268$	$0,379$	$0,500$	$0,621$	$0,732$	$0,823$	$0,892$	$0,939$

   Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b, une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement : ≪le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15≫.

LIBAN 2013 (S)

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination ≪compote allégée≫.

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie A (...)

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1 associe sa teneur en sucre.
   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$. Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous :

α	β	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
$0,13$	$0,15$	$0,0004$
$0,14$	$0,16$	$0,0478$
$0,15$	$0,17$	$0,4996$
$0,16$	$0,18$	$0,9044$
$0,17$	$0,19$	$0,4996$
$0,18$	$0,20$	$0,0478$
$0,19$	$0,21$	$0,0004$

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 :

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
$2,4324$	$0,985$
$2,4573$	$0,986$
$2,4838$	$0,987$
$2,5121$	$0,988$
$2,5427$	$0,989$
$2,5758$	$0,990$
$2,6121$	$0,991$
$2,6521$	$0,992$
$2,6968$	$0,993$

CENTRES ETRANGERS 2013 (S)

Partie A et B

(...)

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F,

2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production, On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.

Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.

Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause. au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

(...)

ANTILLES GUYANE 2013 (S)

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.

On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'évènement «l'étudiant répond A»,

B l'évènement «l'étudiant répond B»,

C l'évènement «l'étudiant répond C»,

R l'évènement «l'étudiant connait la réponse»,

$\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r)$.

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r. On utilisera le fait que $p = P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r)$ démontré dans la question précédente.

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.
En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.

c. Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i. Donner les paramètres de cette loi normale.

ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
On pourra s'aider de la table suivante, qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c**.

E12					=LOI.NORMALE($A12+E$1 ;240 ;RACINE(96) ;VRAI)					
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation :
au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre $0,706$ correspond à $P(X \leqslant 245,3)$.