Expérimentation d'évaluation en Première et en Terminale

Mathématiques

1er trimestre 1999 / 2000

Terminale S : **Sujet 1 -** **commentaires a priori et a posteriori**
grille d'évaluation

Sujet 3 - **commentaires a priori et analyse a posteriori**
grille d'évaluation

Première ES : **Sujet 2 -** **commentaires a priori et a posteriori**
grille d'évaluation

EXPÉRIMENTATION D'ÉVALUATION EN T^{ale}

1er trimestre 1999/2000

Vous participez à une expérimentation d'évaluation dans le cadre de la refonte du baccalauréat de mathématiques mais pas de panique, cela n'est pas encore pour cette année !

Cet énoncé peut vous surprendre et vous sembler très différent de ceux qui vous sont posés habituellement. Cela est volontaire et ne doit pas vous inquiéter. Il est en effet spécialement prévu pour observer votre façon de raisonner et de vous organiser, ainsi que celle de vous exprimer par écrit. Notre objectif est de pouvoir relever vos capacités d'imagination, d'expérimentation, de raisonnement, de prise d'initiative, d'analyse critique et de cohérence, ainsi que la pertinence du choix des méthodes employées.

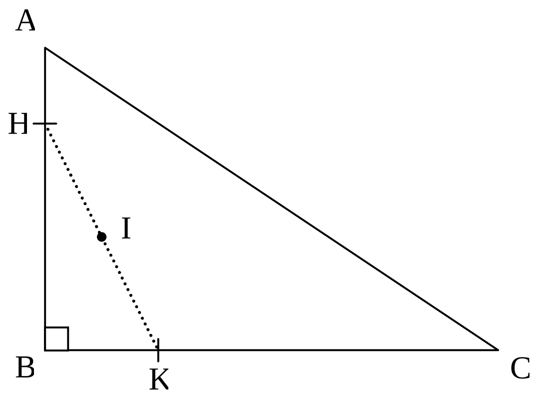
S'il est bien sûr préférable et plus intéressant d'avoir su résoudre un problème, toutes vos démarches même infructueuses seront prises en compte. Il faut donc nous laisser trace du fruit de vos recherches (conjecture, expérimentation, validation, argumentation, …) : donc n'hésitez surtout pas à les rédiger !

De la qualité de votre participation dépendra, pour une bonne part, la qualité de notre étude. Aussi, les organisateurs de cette évaluation vous remercient-ils à l'avance pour votre contribution et pour l'attention que vous ne manquerez pas d'apporter à cette épreuve.

T S – Sujet 1

Durée 1 heure

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que **2BC = 3AB**. Un point H et un point K sont mobiles respectivement sur le segment [AB] et sur le segment [BC] de telle façon que **2BK = 3AH**. On note I le milieu (mobile) du segment [HK].



1° Quel est l'ensemble décrit par le point I quand le point H décrit le segment [AB] ? (justifier)

2° Le problème serait-il différent si le triangle ABC n'était pas rectangle ?

Commentaires a priori de la commission :

<u>Concepts mobilisés</u> : *Thalès, homothétie* ou bien *équation de droite dans un repère orthonormal.*

<u>Compétences nécessaires</u> : *L'élève est contraint de prendre des initiatives, faire fonctionner son intuition, étudier les positions limites, compléter un rectangle, etc. La donnée des relations numériques entre les segments peut être perturbatrice alors qu'elle est essentiellement fonctionnelle.*

<u>Indications</u> :

Faire intervenir le point J tel que BHJK soit un rectangle. On a alors HJ = BK d'où $\frac{HJ}{AH} = \frac{BK}{AH} = \frac{3}{2} = \frac{BC}{AB}$ *et donc J ∈ [AC].*

*Le milieu I de [HK] étant aussi celui de [BJ], on en déduit que J a pour image I par l'**homothétie** de centre B et de rapport ½….*

*Une solution par la **géométrie analytique** est également possible, mais le contexte risque plutôt de conduire l'élève à une solution géométrique.*

<u>Par exemple</u> :

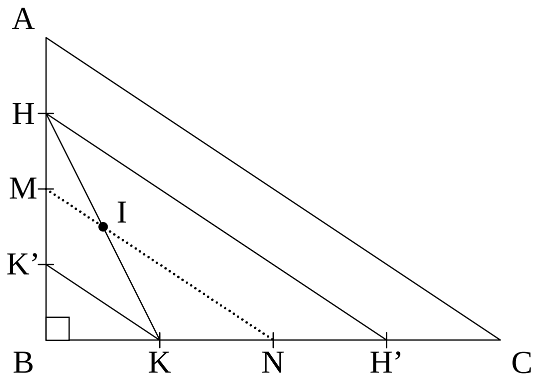
Possibilité de raisonner dans un repère orthonormal direct (B ; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC'}$*) où l'on a* $0 \le x_K \le 1$ *et* $0 \le y_H \le 2/3$*. L'égalité 2BK = 3AH se traduit par* $y_H = -\frac{2}{3}x_K + \frac{2}{3}$*, d'où les coordonnées de I en fonction de l'abscisse de K :* $I\left(\frac{x_K}{2}; \frac{1-x_K}{3}\right)$ *et l'on en déduit que* $y_I = \frac{1-2x_I}{3}$.

Le point I appartient donc à la droite d'équation : $y = \frac{1-2x}{3}$ *pour* $0 \le x \le ½$ *.*

L'ensemble des points I est le segment d'extrémités le milieu de [AB] et le milieu de [BC].

<u>Autre solution proposée</u> :

Soit H' sur [BC] tel que (HH') ⁄⁄ (AC) et soit K' sur [BA] tel que (K'K) ⁄⁄ (AC).



Des hypothèses 2BK = 3AH et 2BC = 3AB on déduit $\frac{BK}{BC} = \frac{AH}{AB}$ *.*

Or $\frac{BK}{BC} = \frac{BK'}{BA}$ *d'où : AH = BK'.*

Ce qui entraîne : CH = BK.

Le milieu M de [AB] est donc également le milieu de [HK'] et le milieu N de [BC] est également celui de [KH'].

Dans le trapèze KH'HK', (MN) est la "droite des milieux" et coupe donc la diagonale [HK] en son milieu d'où I ∈ [MN]…

"Reste" à étudier la réciproque…

Commentaires a posteriori

1. Réactions des professeurs et élèves ayant expérimenté :

Pour cette expérimentation, les élèves ont dans l'ensemble été prévenus assez tardivement et sans aucune préparation à ce type de sujet.
Certains collègues ont cependant pris le temps de lire avec leurs élèves les recommandations préliminaires accompagnant chaque sujet pour bien leur signifier ce que l'on attendait d'eux.

État des lieux par les professeurs :
Globalement, de nombreux collègues reconnaissent que leurs élèves ont des difficultés pour analyser une situation, argumenter, abstraire et rédiger des démonstrations, tout cela ajouté souvent à de réelles lacunes. Il n'est donc guère surprenant, pour eux, que leurs élèves aient été déroutés par ce type de problème (certains élèves ont rendu feuille blanche ou des copies "vides").
Mais nombreux également sont ceux qui relèvent l'envie d'arriver et le dynamisme de leurs élèves.
A noter également que quelques collègues, ayant ce que l'on peut appeler une "bonne classe", sont toutefois déçus des prestations de leurs élèves et/ ou de leur manque d'initiative (« aucune tentative par les barycentres, bien que nous venions de traiter ce chapitre en cours »…).

Impressions des professeurs :
Tous reconnaissent que ce type de sujet est difficile pour leurs élèves actuellement, surtout pour ceux qui ont déjà du mal à expliciter une démarche quand l'objectif est connu. Cela en a perturbé plus d'un, notamment les élèves « travaillant sans éclat », mais sérieux et aptes à suivre des consignes en appliquant la méthode donnée et qui ici se sont trouvés souvent « désemparés ».
Toute fois, on ne rencontre pas (plus ?) d'hostilité franche, certains collègues s'y montrant même favorables (« sujets beaucoup plus intéressants que les actuels sujets de bac, qui certes vérifient bien si le programme est acquis, mais qui ne laissent aucune initiative aux élèves » ou encore : « ce type d'exercices à l'avantage de laisser s'exprimer des élèves "moins scolaires", les deux élèves qui ont proposé une méthode analytique ne sont pas de "bons élèves" »…).
Mais cela sous certaines conditions :

1. *pouvoir y **préparer les élèves** et ce bien avant la classe terminale (« un entraînement est nécessaire dès la seconde »…), et en attendant, « à petite dose » pour commencer…*
2. *prévoir d'**y consacrer suffisamment de temps** car cela ne peut se faire qu'en présence du professeur (« peu d'élèves pourront apprendre à chercher seuls ») c'est à dire prévoir des plages horaires en classe permettant de s'y consacrer et donc prévoir des programmes adaptés… (« actuellement, faire passer les "notions essentielles du programme" nous prend tout notre temps »…)*

Impressions des élèves :
Dans l'ensemble, sujets trouvés difficiles et déroutants, « certains se demandaient même si c'était faisable »…
…mais aussi sujets trouvés intéressants : « intéressant de pouvoir réfléchir librement »…

2. Commentaires de la commission…

Ce compte rendu d'expérimentation nous dévoile, encore un peu plus que l'an passé, le rapport qu'entretiennent les élèves avec l'activité de résolution de problèmes, c'est à dire la conception qu'ils se sont progressivement construite de cette activité et qui guide leur comportement. Pour encore beaucoup trop de nos élèves, résoudre un problème : « *…c'est trouver l'opération miracle qui donne la réponse… », « …c'est trouver tout de suite la solution en appliquant directement ce que l'on vient juste d'étudier…* »[1].

Au vu des copies fournies (dont certaines pourraient passer pour "affligeantes" venant d'élèves en TS), il nous paraît toujours aussi important que nos élèves, notamment ceux qui suivent des voies scientifiques, puissent s'affranchir de ces idées et qu'à la sortie du lycée, ils sachent que résoudre un problème, c'est en fait le plus souvent : chercher, expérimenter jusqu'à plusieurs pistes, savoir revenir parfois en arrière, formuler des conjectures et les soumettre à la preuve, faire montre d'un minimum d'esprit critique, contrôler la validité des solutions proposées, etc.

C'est ce qui nous a guidés pour établir **la grille d'évaluation** ci-après.

Nous tenons cependant à bien insister sur le fait que nous avons conçu une telle grille uniquement comme une aide pour assurer une cohérence suffisante entre les correcteurs sur les critères d'évaluation et (approximativement) sur leur pondération tout en étant destinée à être adaptée par chaque correcteur. Nous avons joué le jeu d'établir un barème détaillé pour en montrer la faisabilité mais il ne s'agit surtout pas pour nous d'imposer un carcan trop détaillé, de surcroît sur des exercices aussi courts, car on risquerait fort alors de conforter, chez certains collègues, l'idée que la bonne note résulte de la somme d'un certain nombre de sous-notes et que plus on découpe, meilleure est la cohérence entre correcteurs…

Certes, un minimum de "cadrage" semble nécessaire pour éviter de trop grandes disparités entre les correcteurs mais ne nous leurrons pas, ces disparités existent déjà… Même si des différences, a priori significatives, apparaissent et pourraient poser problème, nous pensons que les différents barèmes utilisés par nos collègues montrent surtout leur aptitude à pouvoir évaluer ce type d'exercices et certaines de leurs initiatives pour y sensibiliser leurs élèves en sont un bel exemple. Cela devrait donc plutôt nous rassurer quand à la faculté de nos collègues à s'adapter à ce nouveau type d'évaluation, surtout si on leur laisse une certaine autonomie de décision à l'intérieur d'une grille indicative en globalisant davantage les points attribués, l'idéal pour nous étant que petit à petit la dernière colonne, avec pour *en tête* "NOTE" où l'on *décortique* les points attribués, disparaisse des esprits pour ne laisser place qu'à la colonne avec pour *en tête* celle des "Oui / … / Non" ou des "+ / –"…

[1] Extrait de « Pourquoi des mathématiques à l'école ? » de Roland Charnay
Collection Pratiques & enjeux pédagogiques, ESF éditeurs 1996.

Grille d'évaluation pour l'exercice 1 de TS.

		Oui /… / Non	NOTE
1.	<u>Expérimentation</u> : L'élève a-t-il pris l'initiative de placer I - pour quelques positions de H ?	++ / + / 0	(…)*
	- pour les positions limites de H ?	++ / + / 0	
2.	L'élève a-t-il fait une <u>conjecture</u> (acceptable) ?	++ / + / 0	… / **0,5**
3.	L'élève s'est - il engagé dans une <u>démarche</u>, une <u>stratégie</u> pertinente ?	++ / + / 0	… / **1**
	Donne-t-il des indications sur la stratégie qu'il a choisie ?	++ / + / 0	
4.	L'<u>exécution</u> de sa démonstration (calculs, enchaînement de propriétés élémentaires) est-elle bonne ? Étapes d'une démonstration utilisant un repère : - attribuer des coordonnées correctes aux points - calculer les coordonnées de I - équation de la droite contenant le lieu - reconnaissance du lieu (le segment) Étapes d'une démonstration utilisant une homothétie : - introduire un point L défini par « (BHLK) rectangle » - prouver de « L∈[AC] » - prouver de « I milieu de [BL] » - déduire le lieu. NB : les variantes se découperaient de même.		… / **2**
5.	La « <u>rédaction</u> » est-elle bonne ? - qualité du français (orthographe, …) - clarté des idées – précision du vocabulaire	++ / + / 0	… / **0,5**
	- respect des notations – soin apporté à la présentation - (#)	++ / + / 0	
6.	L'<u>argumentation</u> est-elle bonne ? (plus ou moins complète, plus ou moins pertinente)	++ / + / 0	… / **1**
	Y a-t-il des insuffisances du point de vue de la logique ? (oubli de réciproque, …)	–– / – / 0	
7.	L'élève a-t-il fait apparaître : - de l'<u>esprit critique</u> (contrôle a posteriori, autocritique sur un résultat	++ / + / 0	
	- un manque d'esprit critique (incohérence, résultat aberrant, …)	–– / – / 0	

(#) pour un exercice de géométrie l'absence de figure sur la copie est un défaut de « communication » au même titre qu'une mauvaise rédaction, et doit être sanctionné ; mais ici les élèves ont travaillé sur la figure de l'énoncé.

<u>Notation (sur 5 points)</u> :

- **1/2 point** pour une <u>conjecture</u> (**2.**) ; ce point sera également attribué pour un élève qui n'a formulé aucune conjecture au début mais qui a <u>conclu</u> *correctement* à la fin.

- **3 points** pour une <u>démarche</u> *valable* (**3.** = 1 point) et son <u>exécution</u> (**4.** = 2 points) (attribués même si la rédaction n'est pas parfaite).
  ***** Si l'élève a <u>expérimenté</u> *convenablement* (**1.**) mais n'a aucun point sur 3 concernant **3.** et **4.** , c'est-à-dire s'il n'a eu aucune idée convenable pour prouver ce qu'il avait entrevu ou conjecturé, on lui attribuera **1 point** d'expérimentation.

- **1/2 point** éventuel pour la qualité de « <u>rédaction</u> » (**5.**).

- **1 point** éventuel pour la qualité d'<u>argumentation</u> (**6.**) et l'<u>esprit critique</u> (**7.**).

"éventuel" car ces ½ points ne doivent être attribués que si l'élève a, un tant soit peu, rédigé et argumenté…

- La dernière ligne de l'énoncé pose la question d'une généralisation au cas où le triangle ne serait plus rectangle ; elle sera noté en éventuel bonus si l'élève a fait une conjecture valide (ou vraisemblable) et a fortiori si cette conjecture est appuyée par des arguments solides (**1/2 point**).

<u>N. B.</u> : Dans notre esprit, la grille ne sera remplie sur le papier que pour une ou deux copies au début ; ensuite la note se calculera de tête ; il ne s'agit pas d'imposer un carcan mais de rechercher une cohérence entre les correcteurs sur les critères d'évaluation et (approximativement) sur leur pondération.

Les élèves seront prévenus des critères de notation mais bien sûr seule la note globale de l'exercice figurera sur la copie.

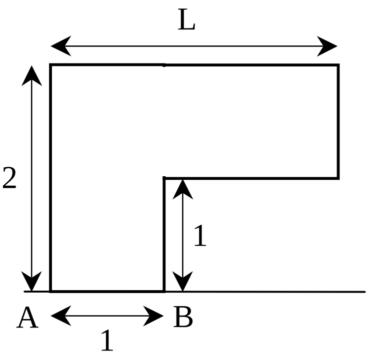
EXPÉRIMENTATION D'ÉVALUATION EN T^{ale}

1er trimestre 1999/2000

T S – Sujet 3

Durée 1 heure

Une fine plaque homogène d'épaisseur constante, constituée de deux rectangles, est représentée ci-dessous.



Posée sur le côté [AB] dans un plan vertical, elle est en équilibre lorsque le projeté orthogonal de son centre d'inertie sur (AB) est situé entre A et B.

Pour quelles valeurs de L cette plaque est-elle en équilibre ?

COMPTE-RENDU DE L'EXPÉRIMENTATION SUR L'ÉVALUATION D'EXERCICES AVEC PRISE D'INITIATIVE

T S sujet 3 - Barycentre

1. Les documents analysés

Les documents analysés sont relatifs à des productions d'élèves corrigées et notées, et à des comptes rendus de leur évaluation par différents professeurs, correspondant au sujet 3 de S, dans le cadre de l'expérimentation de l'évaluation mise en place par notre commission.

Plus précisément, ils consistent en :

- Trois paquets de 10 copies corrigées et notées, avec des renseignements sur les critères d'évaluation. Ces trois paquets représentent trois lycées et deux académies.
- Un paquet de 33 copies corrigées, avec des renseignements sur les critères d'évaluation, et une première analyse des travaux des élèves. Il représente trois classes d'un même lycée, et provient d'une troisième académie.

Il va de soi que l'échantillon est très réduit et ne peut prétendre être représentatif. Il s'agit d'une analyse purement partielle et qualitative, qui devra être croisée avec d'autres.

2. Les méthodes d'évaluation utilisées par les professeurs

2.1. Remarques préalables

La communication de barèmes, de grilles ou de critères d'évaluation, si elle a grandement aidé la commission, n'avait pas été explicitement commandée.

Sauf exception, elle n'a vraisemblablement pas été l'objet d'une réflexion de longue durée de la part des enseignants qui participaient à l'évaluation.

On peut penser qu'elle donne donc une idée de ce que serait une évaluation "spontanée" d'un problème ouvert de la part des enseignants. C'est sans doute un de ses intérêts, pour la commission.

2.2. Les barèmes ou grilles utilisés

Tous les barèmes ont été convertis pour correspondre à une note sur 10 points.

Barème A :

Découpage correct de la plaque	1
Définition du centre d'inertie avec les bons coefficients	2
Écritures vectorielles correspondantes	2
Démarches expérimentales aboutissant à des encadrements cohérents. Justification de ces démarches. Raisonnement tenu jusqu'à proposition finale, même avec une erreur à la base.	jusqu'à 6

Barème B - Par "objectifs" :

Objectif 1 : Caractérisation vectorielle du centre d'inertie de la plaque	2
Objectif 2 : Choix d'une méthode pouvant aboutir	2
Objectif 3 : Condition d'équilibre clairement exprimée par rapport à ce choix	2
Objectif 4 : Qualité d'éxécution (maîtrise du calcul)	2
Objectif 5 : Résultat correct	2

Barème C - Par compétences et composantes :

COMPÉTENCES	COMPOSANTES ÉVALUÉES	Barème
Conjecturer et rechercher	- Imaginer et prévoir un cadre - Rechercher des cas particuliers et conclure avec pertinence.	1
Élaborer et organiser une démarche	- Choisir l'outil barycentrique - Choisir l'outil analytique	1 (0,5 + 0,5)
Exécuter	- Placer les deux barycentres partiels - Exprimer le barycentre global avec les bons coefficients - Déterminer les abscisses de G1, G2, et G - Poser une inéquation - Résoudre cette inéquation	7 (1 + 1,5 + 2,5 + 0,5 + 1,5)
Critiquer	- Contrôler la vraisemblance d'un résultat - Valider la cohérence d'un résultat - Rejeter une conclusion inadéquate	1
Présenter un texte	- Employer un vocabulaire correct - Rédiger une argumentation - Présenter avec soin	2

Remarque : Certains items (Conjecturer et Rechercher, Critiquer) sont hors barème, ce qui aboutit à un total de 12 points.

Barème D :

RECHERCHER	RÉSOUDRE VALABLEMENT	Barème
EXPÉRIMENTER Se placer dans des cas particuliers. Conclure valablement, dans ces cas particuliers		1
METTRE EN PLACE DES STRATÉGIES		
Décomposer : prendre des barycentres partiels		0,5
	- Placer convenablement ces barycentres (G1,G2). - Exprimer G comme barycentre affecté des bons coefficients.	2,5 (1 + 1,5)
Se repérer : se placer dans un repère, ou dans une base, ou considérer des projections sur (AB), ou…		0,5
	- Déterminer les abscissesde G1 et G2 dans le repère, ou les exprimer uniquement en fonction de vecteurs de base. - Repérer de la même façon G. - Donner l'abscisse de G.	3 (1 + 1,5 + 0,5)
Poser une inéquation en L		0,5
	- Résoudre cette inéquation.	1,5
	Valider la solution de l'inéquation (Contexte concret, physique…)	0,5
	CONCLURE (conclusion générale valide et démontrée)	1
CRITIQUER LA CONCLUSION Vérifier l'accord de la conclusion avec l'expérimentation ou des résultats partiels. Rejeter la conclusion s'il n'y pas accord.		1

Remarque : certains items (Conjecturer et Rechercher, Critiquer) sont hors barème, ce qui aboutit à un total de 12 points.

2.3. Analyse et comparaison de ces grilles d'évaluation

<u>Première analyse</u>

À première vue, ces barèmes apparaissent très différents. Les barèmes A et B sont structurés principalement en termes de tâches effectuées ou non par l'élève. Les deux autres s'intéressent aux compétences dont il aura ou non fait preuve. Cependant, ce contraste est à nuancer.
Le barème A attribue en effet un nombre important de points pour des travaux de l'élève qui ne sont pas forcément liés aux résolutions "standard", à savoir (voir Barème A, quatrième ligne) aux "*démarches expérimentales aboutissant à des encadrements cohérents*" et à un "*raisonnement tenu jusqu'à une proposition finale, même avec une erreur à la base*".
En revanche, le barème B n'attribue que deux points pour un travail de l'élève qui ne soit pas de résolution effective, le seul "*Objectif 2, Choix d'une méthode pouvant aboutir*".

<u>Essai de comparaison quantitative</u>

Un critère pour comparer ces différentes grilles d'évaluation pourrait être de compter le nombre de points relevant des activités de l'élève que l'on met sous chacun des verbes : "*rechercher*", "*réaliser*", "*mettre en forme*", "*critiquer et contrôler*"
Une lecture littérale des différents barèmes conduirait au tableau ci-dessous. Une telle lecture est certainement trop sommaire ; chaque correcteur fait intervenir dans son évaluation des critères qu'il n'a pas cru nécessaire d'expliciter.

ACTIVITÉ ÉVALUÉÈ	Barème A	Barème B	Barème C	Barème D
Rechercher	2	2	2	2,5
Réaliser	9	8	7	8
Mettre en forme	0	0	2	0
Critiquer, Contrôler	0	0	1	1,5

<u>Remarques</u> :

(1) Ne pas oublier que les barèmes C et D ont un total de 12 ; le barème A peut aussi aboutir à un total de 11.

(2) Contrairement au barème C, nous considérerons ici que “élaborer une démarche” fait partie de “*rechercher*”.

(3) 4 points sur les 9 dans la case “*réaliser*” du barème A concernent chez l'élève des qualités de *raisonnement* (raisonnement suivi avec constance, justifications données aux affirmations) .

<u>En résumé</u> :
Même si l'on trouve des points d'accord entre les barèmes, leurs différences posent problème. Ils divergent en effet tant par leur conception générale que par les points qu'ils attribuent aux différentes tâches ou capacités de l'élève.

3. Les productions des élèves

3.1. Notes des élèves

Il est évident, vu l'absence de représentativité des échantillons, à tous les niveaux, que la signification des chiffres ci-dessous est très réduite.

N.B. : L'ordre de ces tableaux ne correpond <u>pas</u> à l'ordre des grilles d'évaluation supra. De toute façon, les échantillons sont trop peu représentatifs pour que l'on puisse établir une quelconque corrélation.

Effectif total : 33	Fréquence
notes dans [0 ; 2,5[	39 %
notes dans [2,5 ; 5[	27 %
notes dans [5 ; 7,5[	30 %
note dans [7,5 ; 10]	3 %

Effectif total : 10	Fréquence
notes dans [0 ; 2,5[	50 %
notes dans [2,5 ; 5[	10 %
notes dans [5 ; 7,5[	30 %
note dans [7,5 ; 10]	10 %

Effectif total : 10	Fréquence
notes dans [0 ; 2,5[	40 %
notes dans [2,5 ; 5[	40 %
notes dans [5 ; 7,5[	10 %
note dans [7,5 ; 10]	10 %

Effectif total : 10	Fréquence
notes dans [0 ; 2,5[	0 %
notes dans [2,5 ; 5[	20 %
notes dans [5 ; 7,5[	70 %
note dans [7,5 ; 10]	10 %

3.2. Remarques sur les productions d'élèves

- Les élèves cherchent et produisent, même s'ils n'ont pas trouvé de stratégie efficace et globale.
- Certains élèves s'arrêtent à des expérimentations et à des conjectures évidemment insuffisantes, faute de savoir formaliser le problème.
- Beaucoup d'élèves pâtissent d'un manque de connaissance et d'intuition sur les barycentres. Par exemple, les deux barycentres partiels, correspondant pourtant à des solides de masses différentes, sont affectés du même coefficient.
- Peu d'élèves résolvent le problème jusqu'au bout.

4. Quelques pistes de travail

Les exemples traités, il est vrai peu nombreux, paraissent établir la nécessité d'une réflexion approfondie sur l'évaluation d'exercices où l'initiative, l'esprit critique, les capacités de raisonnement des élèves sont sollicités.
Il semble important, dans la perspective de la présence de tels exercices dans les examens, ou simplement d'une généralisation de leurs résolutions dans les classes, que les professeurs de mathématiques harmonisent leurs critères d'évaluations, et se rapprochent d'un consensus à cet égard. En l'état actuel, des points de vue très différents paraissent coexister, et risquent de mener à des incompréhensions.

A l'occasion de l'évaluation de tels exercices, il serait peut-être souhaitable d'insister sur l'évaluation des capacités ou compétences, qui viendrait s'ajouter, en le structurant, au barème classique attribuant des points aux tâches accomplies par les élèves.
Dans le cadre d'exercices avec prise d'initiative, il conviendrait d'accorder toute leur importance aux activités suivantes de l'élève :

- Recueil et traitement de l'information
- Recherche
- Raisonnement
- Exercice de l'esprit critique
- Mise en forme pour la communication,

en sus des tâches d'application immédiate et d'éxécution.

Une grille/barème d'évaluation de l'exercice auquel nous nous intéressons ici, s'inspirant de cette liste, pourrait revêtir, par exemple, la forme suivante, qui n'est qu'une suggestion.

CAPACITÉS ÉVALUÉES : "Capacités à…"	**TÂCHE EFFECTUÉE**
S'INFORMER	
RECHERCHER : **Conjecturer**	Se placer dans des cas particuliers et conclure de façon valide sur ces cas.
RECHERCHER : **Choisir des stratégies**	- Choisir l'outil barycentrique - Choisir l'outil analytique
RÉALISER : **Raisonner**	Mener jusqu'au bout le raisonnement - même avec des erreurs ponctuelles -
RÉALISER : **Exécuter**	- Placer les deux barycentres partiels - Exprimer le barycentre global avec les bons coefficients - Déterminer les abscisses de G1, G2, et G. - Poser une inéquation puis la résoudre
CRITIQUER, CONTRÔLER **Plausibilité du résultat dans le contexte**	- Positivité - Vraisemblance - Cohérence avec les expérimentations
METTRE EN FORME	- Structurer et rédiger le raisonnement - Employer un vocabulaire correct - Présenter avec soin

La commission a estimé qu'il n'est pas opportun d'affecter un nombre de points précis pour chacune des capacités requises. Une grille comme celle-ci doit seulement servir de support à la notation par le correcteur, qui conserverait une grande souplesse dans l'évaluation.

Le correcteur pourrait cependant avoir à sa disposition le barème suivant, sur des champs de capacité plus larges :

RECHERCHER : .... 2 points   RÉALISER :.................................... 6 points
CRITIQUER/CONTRÔLER :..........1 point   METTRE EN FORME :................... 1 point

$1^{\text{ère}}$ ES – Sujet 2

Durée 1 heure

Vous participez à une expérimentation d’évaluation dans le cadre de la refonte du baccalauréat de mathématiques mais pas de panique, cela n’est pas encore pour cette année !

Cet énoncé peut vous surprendre et vous sembler très différent de ceux qui vous sont posés habituellement. Cela est volontaire et ne doit pas vous inquiéter. Il est en effet spécialement prévu pour observer votre façon de raisonner et de vous organiser, ainsi que celle de vous exprimer par écrit. Notre objectif est de pouvoir relever vos capacités d’imagination, d’expérimentation, de raisonnement, de prise d’initiative, d’analyse critique et de cohérence, ainsi que la pertinence du choix des méthodes employées.

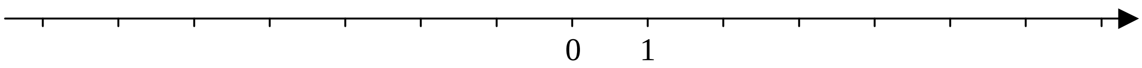
S’il est bien sûr préférable et plus intéressant d’avoir su résoudre un problème, toutes vos démarches même infructueuses seront prises en compte. Il faut donc nous laisser trace du fruit de vos recherches (conjecture, expérimentation, validation, argumentation, …) : donc n’hésitez surtout pas à les rédiger !

De la qualité de votre participation dépendra, pour une bonne part, la qualité de notre étude. Aussi, les organisateurs de cette évaluation vous remercient-ils à l’avance pour votre contribution et pour l’attention que vous ne manquerez pas d’apporter à cette épreuve.

EXPÉRIMENTATION D'ÉVALUATION EN $1^{ère}$

1^{er} trimestre 1999/2000

Un objet se déplace sur un axe gradué, en faisant des pas successifs d'une unité dans un sens ou dans l'autre : il part de l'abscisse 0 sur l'axe ; à chaque pas, on choisit au hasard de le faire avancer d'une unité ou bien de reculer d'une unité.



On considère l'expérience aléatoire qui consiste à faire faire à l'objet un déplacement de cinq pas à partir de l'abscisse 0 : on appelle un tel déplacement une **marche aléatoire** de cinq pas.

Pour **simuler** cette expérience, on choisit le sens de déplacement de chaque pas, en utilisant la table de nombres aléatoires ci-dessous :

7	0	5	7	3	1	5	8	5	9	5	7	2	3	1	8	5	8	9	0
9	1	7	1	9	9	2	1	8	2	8	3	4	0	0	2	9	1	4	1
3	9	4	7	3	5	7	9	3	3	1	0	2	6	5	3	7	9	1	3
9	6	4	0	9	2	1	0	8	4	6	8	4	9	7	1	4	0	3	4
4	7	6	2	1	4	0	4	2	9	0	8	9	6	8	9	8	1	0	3
6	2	8	1	5	9	3	6	3	2	8	8	7	6	3	1	4	2	8	4
5	2	3	5	5	4	2	2	3	5	7	2	2	3	0	5	6	1	8	0
7	7	9	9	4	2	6	5	9	1	5	5	0	8	2	3	0	9	7	7

Cette table, composée de 160 nombres entiers inférieurs à 10, correspond aux résultats de 160 tirages au hasard d'un nombre entier de 0 à 9 inclus, chaque tirage étant considéré comme indépendant de chacun des autres.

Voici une simulation possible de marches aléatoires de cinq pas :

On parcourt la table dans le sens habituel de lecture ; on traduit chaque nombre rencontré par *R* (« recule ») s'il est impair, et par *A* (« avance ») s'il est pair ; cinq nombres successifs permettent ainsi de définir une marche aléatoire de cinq pas.
Par exemple, les cinq premiers nombres de la table, qui sont « 7-0-5-7-3 », définissent la première marche aléatoire de cinq pas qui sera codée « *R-A-R-R-R* . On passe ensuite à « 1-5-8-5-9 » qui simule la deuxième marche aléatoire de cinq pas, toujours à partir de l'abscisse 0…

1° a) Poursuivre cette simulation, ou en proposer une autre de votre choix, pour simuler 30 marches aléatoires de cinq pas en utilisant la table de nombres aléatoires ci-dessus, et relever les résultats en remplissant un tableau du type suivant :

	1^{er} pas	$2^{ème}$ pas	$3^{ème}$ pas	$4^{ème}$ pas	$5^{ème}$ pas	arrivée
$1^{ère}$ marche	*R*	*A*	*R*	*R*	*R*	-3
$2^{ème}$ marche						
…						

Dans la dernière colonne, pour chaque marche aléatoire de cinq pas, indiquer l'abscisse du point d'arrivée et, dans les autres colonnes, *R* pour signifier que l'objet recule d'un pas ou *A* pour signifier qu'il avance d'un pas.

b) Quelles sont toutes les abscisses possibles des points d'arrivée d'une telle marche aléatoire de cinq pas ?

c) Dans la simulation précédente, quelle fréquence a-t-on obtenue de l'événement « la marche aléatoire de cinq pas aboutit au point d'abscisse 1 » ?

2° Quelle est la probabilité de l'événement « la marche aléatoire de cinq pas aboutit au point d'abscisse 1 » ?

Une proposition de grille d'évaluation pour le sujet 2 de 1ère ES

Voici une proposition de grille d'évaluation, relative à l'exercice « Marche aléatoire », en essayant de l'organiser différemment des précédentes grilles.

Dans la perspective de proposer un exercice "avec prise d'initiative" au baccalauréat, il nous semble indispensable que la commission de barème se mette d'accord sur les propositions de la commission d'écriture du sujet, relativement aux deux points suivants :

- **les notions mathématiques** relatives à l'exercice : dans les commentaires des collègues sur cet exercice, on se rend compte que des points obscurs subsistent sur ce qu'est une table de nombres aléatoires, comment elle peut s'utiliser ;
- **ce que l'on attend des élèves** : il nous semble ridicule d'enlever des points à un candidat qui a compris comment simuler, mais qui a fait une erreur de comptage, ou encore de retirer des points pour une fréquence qui n'est pas sous la forme d'une fraction irréductible.

Remplir une grille précise sur le plan de la liste de ce que l'on attend de l'élève permet de traiter les deux points précédents. Cette grille doit privilégier davantage la démarche mathématique que les savoir-faire, elle ne doit concerner que ce que l'on voit sur la copie. Elle doit comporter des indications de barème, mais les correcteurs doivent pouvoir l'utiliser avec une certaine souplesse.

Remarques sur le sujet

L'exercice « Marche aléatoire » n'est pas très ouvert : l'expérimentation à l'aide d'une simulation utilisant une table de nombres aléatoires fait l'objet d'une question et réduit donc de ce fait la part d'initiative laissée à l'élève. Cela se voit parfaitement sur la grille. On pourrait imaginer poser un exercice sur le même thème qui ne comporterait qu'une question portant sur un calcul de probabilité : l'élève pourrait lui-même prendre l'initiative d'expérimenter en simulant à l'aide de sa calculatrice (c'est cependant une attitude encore peu encouragée dans les classes, mais qui va peut-être se répandre).

Grille générale relative à une question avec prise d'initiative

Une telle grille ne doit faire référence qu'à ce que l'on voit dans la copie. Il est bien évident que tout ne peut pas être évalué : par exemple, lorsque la réponse est correcte, on voit rarement dans la copie la manifestation de l'esprit critique du candidat. La colonne « manifestation de savoir ou savoir-faire » est à remplir en fonction de chaque sujet.

	Prise d'initiative et engagement dans une démarche	Aboutissement de la démarche engagée	Communication	Manifestation de savoir ou savoir-faire	Manifestation d'esprit critique
Expérimentation Recherche	* Étude de cas particuliers : exemples, contre-exemples … * Simulation. * Utilisation de la calculatrice ou d'autre matériel.	* Mise en évidence de ce que l'on peut tirer des initiatives prises. * Emission d'une conjecture en rapport avec l'expérimentation.	* Compréhension du problème. * Rédaction de la recherche. * Mise en évidence que le résultat de l'expérimentation est une conjecture.		* Mise en défaut de ses propres conjectures. * Questions (posées dans la copie) en rapport avec le problème.
Démonstration	* Conscience de la nécessité de démontrer le résultat de la recherche. * Choix d'un modèle, d'une stratégie, d'un cadre. * Nommer, coder.	* Exécution du projet de solution. * Maintien de la cohérence. * Raisonnement correct.	* Rédaction de la démonstration. * Graphiques ou tableaux explicites.		* Manifestation que le résultat est invraisemblable ou incohérent avec d'autres réponses.

Grille relative aux questions 1°a) et 1° c) de l'exercice « Marche aléatoire »

Au plus 3,5 points sur 10 points	Prise d'initiative et engagement dans une démarche	Aboutissement de la démarche engagée	Communication	Manifestation de savoir ou savoir-faire	Manifestation d'esprit critique
Expérimentation Recherche : objet de la question 1° a)	* Départ de n'importe quel endroit de la table de nombres aléatoires : 0,5 pt * Lecture de la table dans un autre ordre que celui qui est suggéré : 0,5 pt	* Protocole expérimental en accord avec l'initiative : 1 pt	* Compréhension de ce qu'il s'agit de faire : 0,5 pt * Ecriture correcte du tableau : 1 pt		* Dans le cas d'une abscisse paire, négative … : 0,25 pt
Démonstration : objet de la question 1°c)		* Calcul correct : 1 pt		* Savoir ce qu'est une fréquence : 0,5 pt	* Dans le cas d'un résultat supérieur à 1… : 0,25 pt

Grille relative à la question 1° b)

L'expérimentation / recherche relative à cette question a fait l'objet de la question 1° a). On aurait pu laisser l'élève prendre cette initiative.

Au plus 2,5 points sur 10 points	Prise d'initiative et engagement dans une démarche	Aboutissement de la démarche engagée	Communication	Manifestation de savoir ou savoir-faire	Manifestation d'esprit critique
Expérimentation Recherche		* Émission d'une conjecture en rapport avec l'expérimentation faite à la question précédente.	* Compréhension de la question : 0,5 pt * Mise en évidence qu'il s'agit d'une conjecture : 0,5 pt		
Démonstration	* Manifestation de la nécessité de justifier la réponse : 0,25 pt * Amorce d'un graphique : 0,5 pt * Codage avec des +1 et des −1 : 1 pt * Amorce d'un dénombrement : 0,5 pt	* Raisonnement correct : 1 pt	* Rédaction d'une démonstration, ou réalisation d'un graphique : 1 pt		* Manifestation que le résultat n'est pas en accord avec le résultat de l'expérimentation : 0,25 pt

Grille relative à la question 2°

L'expérimentation / recherche relative à cette question a fait l'objet des questions 1° a) et 1° c).

Au plus 4 points sur 10 points	Prise d'initiative et engagement dans une démarche	Aboutissement de la démarche engagée	Communication	Manifestation de savoir ou savoir-faire	Manifestation d'esprit critique
Expérimentation Recherche					
Démonstration	* Savoir qu'il s'agit de démontrer : 0,25 pt * Amorce d'un graphique adapté : 1 pt * Codage avec des +1 et des −1 : 1 pt * Amorce d'un dénombrement : 0,5 pt	* Raisonnement correct : 2 pts	* Compréhen-sion de la question : 0,25 pt * Rédaction de la démonstration, réalisation d'un graphique : 1 pt	* Savoir ce qu'est une probabilité, comment on la calcule dans ce cas : 0,5 pt	* Comparaison de la fréquence et de la probabilité : 1 pt

Comment les correcteurs ont évalué l'exercice « Marche aléatoire »

Ce compte-rendu porte sur :

- 10 copies corrigées d'une classe de première ES du lycée de Pessac (académie de Bordeaux),
- 10 copies corrigées d'une classe de première ES d'un lycée de l'académie de Grenoble,
- 10 copies corrigées d'une autre classe de première ES du même lycée que le précédent,
- une grille d'évaluation proposée par le lycée de Pessac,
- le barème et les remarques sur le sujet et les copies de leurs élèves rédigés par les collègues de l'académie de Grenoble qui ont corrigé chacun les 10 copies dont il est question ci-dessus.

Remarques de la part des collègues correcteurs de l'académie de Grenoble

Voici ce qu'ils ont écrit.

«– Pour faciliter la correction nous avons modifié la première question en écrivant « simuler les 30 premières marches » au lieu de « simuler 30 marches ».

– Remplir le tableau est une tâche longue et fastidieuse mais n'offrant pas de difficultés. Cependant quelques élèves ont mal compris les consignes et se sont trompés (4 élèves en 1ère3 et 2 en 1ère4).

– Beaucoup d'élèves ont mal compris « abscisses possibles » et n'ont relevé que les abscisses atteintes dans l'expérience. Aucun élève n'a donc essayé de justifier ces réponses par un raisonnement en faisant ressortir le fait que ce qui compte, c'est d'avoir 3 ***A*** et 2 ***R***, quel que soit l'ordre des lettres.

– Aucun élève n'a réussi la question 2. Ils n'ont pas fait la différence entre un calcul statistique (issu d'une expérience) et le calcul probabiliste (mathématisation du problème). Quelques élèves ont amorcé un arbre, sans que l'on ait pour autant une représentation de la situation, à une exception près. »

Barème adopté par les collègues correcteurs de l'académie de Grenoble, ramené à 10 points :

1° a) Tableau : 2 points (–0,5 point par erreur dans la 6ème colonne).

b) Abscisses possibles : 2 points (–0,5 point par abscisse fausse ou manquante).

c) Fréquence : 2,5 points (1 point pour le numérateur ; 1 point pour le dénominateur ; –0,25 point si le résultat n'est pas simplifié).

2° Probabilité

- liste des 10 cas : 2,5 points (1 point pour le raisonnement ; 1,5 point pour la liste ; –0,5 point par cas manquant ou faux).
- résultat : 1 point (0,5 point pour la justification ; 0,5 point pour le résultat ; –0,25 point si non simplifié).

Quelques questions ou remarques sur les commentaires et le barème des collègues de l'académie de Grenoble

- Quel sens les collègues donnent-ils à l'expression « les 30 premières marches » ?
- La rectification qu'ils ont faite de l'énoncé sous-entend que les élèves n'ont à prendre aucune initiative dans la lecture de la table de nombres aléatoires. Que se passerait-il si, dans le sujet, la table était remplacée par la touche "random" de la calculatrice ?
- Il s'agit d'un barème "classique" par réponse, sommatif, très rigide.

- Que penser du fait d'enlever 0,5 point par erreur de comptage dans la simulation ? Il nous semble que ce qu'il y a à évaluer, c'est si l'élève a compris comment simuler, et qu'il n'y a pas lieu de tenir compte du fait qu'il a fait une erreur de comptage.
- Que penser du fait d'enlever 0,5 point (0,25 pour la fréquence et 0,25 pour la probabilité) si les fractions ne sont pas simplifiées ?
- Par contre, pour la liste des abscisses possibles, ou bien l'élève a compris et justifié et, dans ce cas, il a tous les points relatifs à cette réponse, ou bien il a donné les résultats de son expérimentation au lieu des événements élémentaires, et alors c'est une erreur de raisonnement, et il n'y a pas lieu de lui retirer 0,5 point s'il manque un élément de cette liste. S'il a oublié d'écrire un nombre dans sa liste, alors qu'il est clair qu'il a compris qu'il y avait ce nombre à écrire, il n'y a pas lieu d'en tenir compte, nous semble-t-il.

Grille d'évaluation proposée par les collègues du lycée de Pessac, ramenée à 10 points

COMPÉTENCES	COMPOSANTES ÉVALUÉES	
Lire et comprendre	Lire un énoncé, un tableau	0,5
Élaborer et organiser une démarche	Tirer des informations (extraire, dénombrer) Appliquer un algorithme simple et l'utiliser (1.a) Reconnaître une situation de référence (1.c) Dénombrer (2)	 1,5 0,5 1
Exécuter	Appliquer une technique de base : – calculer un pourcentage – réaliser un arbre de dénombrement	 0,5 1,5
Critiquer	Contrôler la vraisemblance d'un résultat ($0 \leq p \leq 1$) Comparer des résultats, les critiques (f et p) Argumenter (1.b)	0,5 1 0,5
Présenter un texte, un graphique	Respecter les consignes (1°) Présenter avec soin un texte, un graphique Rédiger une argumentation (1.b)	1 1 0,5

Quelques remarques sur la grille d'évaluation des collègues du lycée de Pessac

- Le barème est ici aussi sommatif, et, de ce fait, un peu rigide.
- Par rapport au barème précédent, il tient davantage compte de la démarche mathématique. Environ 6 points sur 10 sont cependant attribués à des compétences techniques ou de présentation. C'est en partie dû à la rédaction du sujet.

Conclusion

Les deux barèmes sommatifs élaborés par les deux équipes de correcteurs nous semblent assez bien refléter les deux types d'évaluation pratiqués actuellement, le premier (collègues de Grenoble) étant plus répandu que le second. La forme du sujet induisait sans doute un peu un barème sommatif.

Exercices de Mathématiques
avec prise d’initiative

Quelques critères pour exercices avec prise d’initiative…

Seconde : **Divers exemples pour entraîner nos élèves…**

Première S : **Un exercice avec grille d’évaluation a priori**

Terminale S : **Trois exercices avec analyses et grilles d’évaluation a priori**

Problèmes et exercices avec prise d'initiative…

Critères pour un problème avec prise d'initiative…:

1° L'énoncé, de préférence court, doit être compréhensible par tous les élèves et si possible motivant (notamment en donnant l'impression à l'élève que c'est à sa portée pour lui donne envie de chercher).

2° La réponse n'est pas évidente, en particulier elle n'est pas nécessairement livrée avec l'énoncé qui ne contient ni la méthode ni la solution...

3° Le problème est "riche" : plusieurs démarches sont possibles. Le professeur n'en impose aucune et ce n'est pas une application du cours, de la leçon que l'on vient de faire… L'élève doit pouvoir choisir sa stratégie, mettre en route une démarche scientifique : faire des essais (pas de feuille qui reste blanche…), tester ses résultats, prouver la validité de ses résultats, être capable d'argumenter…

Remarque :

Ce "cahier des charges" ne doit pas faire peur pour autant… Toute activité de recherche ne doit pas répondre nécessairement à toutes ces conditions, autrement dit, pas de : « *il faut…* », ou de : « *il ne faut pas…* »… Tout au plus cherche-t-il à indiquer des directions vers lesquelles on peut tendre :

- Quelque chose à chercher, à trouver…
- Question compréhensible par les élèves…
- Tout élève doit pouvoir faire quelque chose…
- Réponse non immédiate…
- Problème riche : plusieurs démarches possibles…

Il ne sera pas toujours possible de réaliser cette dernière condition, mais l'important est que l'élève soit en situation de devoir prendre des initiatives (problème non guidé à l'excès) celles-ci pouvant résulter d'un "entraînement" comme l'apprentissage de méthodes ou encore la reconnaissance de configurations clés, de résultats remarquables, etc…

Donner des exercices "avec prise d'initiative" pour mettre nos élèves en situation de recherche…

- comme cela nous était recommandé dans les "**objectifs essentiels**" communs à toutes les séries de nos "anciens" programmes de mathématiques (encore actuels en 1ère et en Terminale) :
  - « *Entraîner les élèves à l'**activité scientifique** et promouvoir l'**acquisition de méthodes** : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de **découverte**, **d'exploitation de situations**, de **réflexion** et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de **synthèse** dégageant clairement **quelques** idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée...* »,
  - "*Mettre en œuvre **les huit moments de l'activité mathématique**, à savoir : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence au regard du problème posé.* »

- **Mais aussi comme cela nous est toujours recommandé :**
  - Dans les commentaires de nos **nouveaux programmes de Seconde** pour la prochaine rentrée de septembre 2000 : *« Prendre du temps pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes - en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d'une démonstration) »*
  - Dans les "**objectifs généraux pour la voie S"** (texte de présentation du projet pour la voie S): *« …/…favoriser le travail personnel des élèves et donner le goût des problèmes consistants ou non entièrement balisés (peut-on imaginer un enseignement littéraire qui s'arrêterait à l'étude des règles grammaticales ?) »…*

Avertissement important :

Les propositions faites ici concernent le nouveau programme de 2nde (les configurations du plan ; triangles isométriques, triangles de même forme). Il s'agit de problèmes que les acquis de collège permettent de traiter : certains sont d'un abord relativement immédiat, d'autres peuvent servir de trame à plusieurs heures de travail avec la classe[1] ; tous peuvent utilement contribuer aux objectifs "d'apprentissage d'une démarche déductive" et de "maîtrise d'un vocabulaire logique adapté" souhaités par le programme. En aucun cas, cette liste de problèmes ne constitue la liste-type des problèmes à traiter. L'objectif est simplement de montrer la richesse mathématique qu'il est possible de développer dans le cadre du programme.
La plupart des énoncés qui suivent s'inspirent librement de documents APMEP, IREM, CRDP, FFJM, Kangourou ou Rallye.

Premier type d'exemples	**Rendre nos élèves autonomes… en les entraînant à repérer des "configurations clés"… ou des résultats remarquables…**

Remarque : la mise en œuvre de cette méthode ne peut devenir efficace que dans la mesure où les élèves auront pu disposer d'un bon entraînement à la reconnaissance (≈ réflexes immédiats ?) à partir d'exercices "basiques" tels que :

Résoudre : $x^2 - 9 = 7x + 21$.

Trouver un nombre tel que son triple soit égal à son cube.

Résoudre : $(x+5)^2 + (x+5) = -\frac{1}{4}$.

Etc… mais aussi en apprennant à "enrichir" des situations….

Factoriser : $x^4 - 16$. Faire de même pour $x^4 + 16$…

Le nombre $5555^4 + 2^6$ est-il premier ?

↳ $5555^4 + 2^6 = (5555^2 + 2^3 + 4\times 5555)(5555^2 + 2^3 - 4\times 5555) = 30880253\times 30835813$…

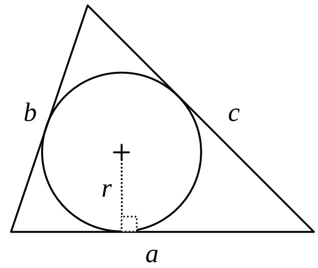
[1] *« …prendre du temps pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes. »*

Ce type d'exercices figurent depuis "longtemps" en travaux dirigés en classe, en devoirs à la maison voire en devoirs en classe, mais **jamais** dans des épreuves officielles. C'est pourquoi nous avons tenu à en faire figurer en préliminaires… pour bien indiquer le "virage" souhaité… comme de pouvoir proposer, sans aide excessive, des exercices comme ceux qui suivent :

Périmètre et aire : la formule de Héron

Étant donnés les longueurs a, b, c des trois côtés d'un triangle, il est facile de calculer son périmètre : $P = a + b + c$

Mais peut-on avec ces seules données calculer l'aire A de ce triangle ?



Un essai avec le cercle inscrit au triangle fait bien intervenir la longueur des trois côtés mais il reste un intrus, le rayon r du cercle inscrit, puisque l'on obtient $\mathsf{A} = \frac{P}{2}\times r = p\times r$ où p est le demi-périmètre du triangle…

➴ **Démontrer ce résultat**.

Il y a bien la fameuse formule « *Base* × *hauteur* / 2 » en privilégiant l'un des côtés, à condition de pouvoir exprimer la hauteur correspondante en fonction de la longueur des trois côtés… C'est ce qu'à réussi le mathématicien grec Héron (1er siècle après J.-C.) en démontrant la formule suivante :

$$\mathsf{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1° Vérifier cette formule dans le cas particulier :

a) d'un triangle équilatéral, **b)** d'un triangle rectangle isocèle,

c) d'un triangle isocèle non rectangle, **d)** d'un triangle rectangle non isocèle.

2° Étude du cas d'un triangle quelconque :

Calculer l'aire d'un triangle quelconque en fonction de la longueur de ses trois côtés puis montrer que l'on peut se ramener à la formule de Héron…

<u>Remarque</u> : rien que la première question permet déjà de travailler sur des expressions algébriques qui demandent une "intelligence" des calculs comme on peut le voir par les indications ci-dessous…

1° a) cas d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur a : $\mathsf{A} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Avec $p = \frac{3a}{2}$, on a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \mathsf{A}$.

b) cas d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse de longueur b et ayant deux côtés de longueur a :

$\mathsf{A} = \frac{a^2}{2}$. Avec $p = \frac{2a+b}{2}$ et $b = a\sqrt{2}$, on a :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2a^4(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{16}} = \sqrt{\frac{a^4}{4}} = \mathsf{A}.$$

c) cas d'un triangle isocèle non rectangle dont la base a pour longueur b et ayant deux côtés de longueur a : $\mathsf{A} = \frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}$.

Avec $p = \frac{2a+b}{2}$, on a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2a+b}{2}\times\frac{b}{2}\times\frac{b}{2}\times\frac{2a-b}{2}} = \sqrt{\frac{b^2(4a^2-b^2)}{16}} = \mathsf{A}$.

d) cas d'un triangle rectangle non isocèle d'hypoténuse de longueur $b = \sqrt{a^2+c^2}$: $\mathsf{A} = \frac{ac}{2}$.

Avec $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, on a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\dfrac{a+b+c}{2} \times \dfrac{b+c-a}{2} \times \dfrac{a+c-b}{2} \times \dfrac{a+b-c}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{[(a+c)^2 - b^2][2\mathrm{ac} + \mathrm{b}^2 - c^2 - a^2]}{16}} = \ldots$$

2° Question souvent laissée à titre de recherche personnelle…
Soit h est la longueur de la hauteur issue de A. Que l'angle en B soit aigu ou obtus, en appliquant le théorème de Pythagore à deux reprises, on démontre que $h^2 = b^2 - \left(\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$ et c'est là que commence diverses transformations d'écritures qui n'ont rien de "mécanique" :

$$h^2 = \frac{[2ab - (b^2 + a^2 - c^2)][2ab + b^2 + a^2 - c^2]}{4\mathrm{a}^2} = \frac{[c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)][(a+b)^2 - c^2]}{4\mathrm{a}^2} = \ldots$$

<u>Remarque</u> *: « Ils ne savent plus calculer! »… mais n'est-il pas écrit dans nos programmes : « …toute virtuosité technique est exclue… ». Alors comment concilier ces deux aspects contradictoires ? L'exercice précédent ainsi que les deux ci-dessous nous semblent pouvoir y répondre. Ces exercices ont à chaque fois suscité un vif engouement auprès des élèves, malgré l'aspect "déraisonnable" a priori d'effectuer de tels calculs à la main (l'envie de relever le défi de surpasser sa calculatrice ?)...*

Sans utiliser votre calculatrice, ranger dans l'ordre croissant les trois nombres qui suivent :

A = 999 999 999 999 × 999 999 999 999

B = 999 999 × 999 999 × 999 999 × 999 999

C = 999 999 999 999 999 999 × 999 999

Exemples de solutions données par des élèves :

1. $A = (10^{12} - 1)^2 = 10^{24} - 2\times10^{12} + 1$
$B = (10^6 - 1)^2\times(10^6 - 1)^2 = 10^{24} - 4\times10^{18} + 6\times10^{12} - 4\times10^6 + 1$
$C = (10^{18} - 1)\times(10^6 - 1) = 10^{24} - 10^{18} - 10^6 + 1$
$A - C = 10^{18} - 2\times10^{12} + 10^6 = 10^6\times(10^{12} - 2\times10^6 + 1) = 10^6\times(10^6 - 1)^2 > 0$ d'où $A > C$
$C - B = 3\times10^{18} - 6\times10^{12} + 3\times10^6 = 3\times10^6\times(10^6 - 1)^2 > 0$ d'où $C > B$
Conclusion : $B < C < A$

2. En posant α = 999 999…
$A = (\alpha\times10^6 + \alpha)^2 = \alpha^2\times(10^6 + 1)^2 = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} + 2\times10^6)$
$B = \alpha^4 = \alpha^2\times(10^6 - 1)^2 = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} - 2\times10^6)$
$C = (\alpha\times10^{12} + \alpha\times10^6 + \alpha)\times\alpha = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} + 10^6)$
Or : $-2\times10^6 < 10^6 < 2\times10^6$…

Sans utiliser votre calculatrice, calculer la valeur exacte du produit suivant :

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\times$$
$$(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \mathrm{P}$$

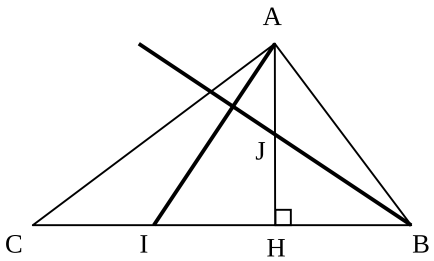
<u>Version d'origine</u> : On considère l'expression $1 \bigcirc \sqrt{2} \triangle \sqrt{3} \square \sqrt{5}$. En remplaçant chacun des signes $\bigcirc$, $\triangle$, $\square$ par les signes + ou –, déterminer toutes les expressions possibles puis calculer leur produit.

Quelle que soit la calculatrice, on trouve P = –71. Trouver un nombre entier surprend plus d'un élève et ils se demandent alors si leur calculatrice ne leur a pas joué, à nouveau, un mauvais tour...
D'où une certaine curiosité suivie d' une motivation certaine pour se lancer dans un calcul à la main.

En géométrie, ce ne sont pas les exemples qui manquent… par exemple :

Sur la figure ci-contre :

- le triangle ABC est rectangle en A
- le point I est le milieu du segment [CH]
- le point J est le milieu du segment [AH]



Position des droites (BJ) et (AI) ?

↳ - coder la figure,
- la présence de deux de milieux I et J respectivement des segments [CH] et [AH] peut entraîner le réflexe d'appel au “théorème des milieux” …
- puis... « *étant données deux droites parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est ...* »
- et enfin **reconnaissance de droites remarquables** dans un triangle ...

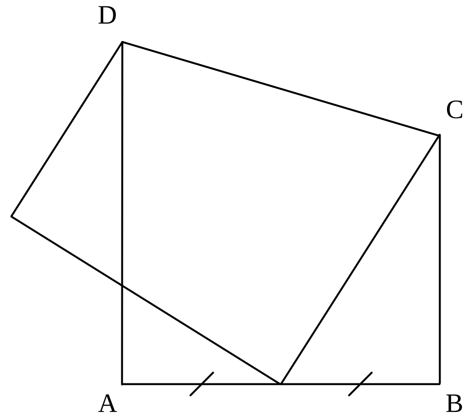
Deuxième type d'exemples

exercices assez riche, où plusieurs démarches sont possibles…, permettant de “révisiter” des notions de collège et permettant également de travailler sur le calcul littéral, les égalités de rapport, etc…

Un problème de pli...

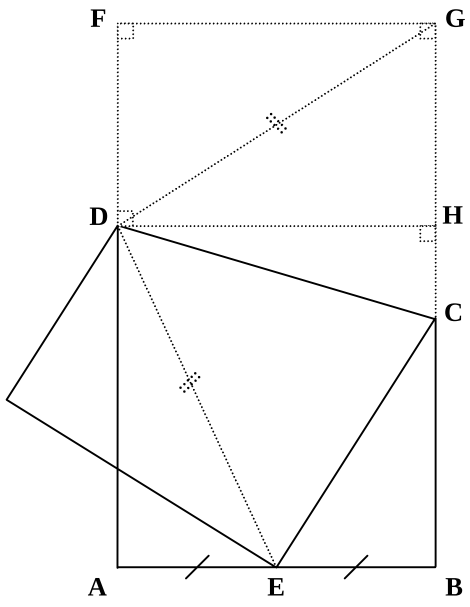
On a plié une feuille rectangulaire, comme indiqué ci-contre, en amenant le coin supérieur droit au milieu du côté inférieur [AB].

Sachant que ce côté [AB] mesure 168 mm et que le pli [CD] mesure 175 mm, trouver la longueur de l'autre côté de cette feuille ...



Présence d'angles droits…

↳ ***utilisation du théorème de Pythagore…***



Par exemple :

Soit L la longueur cherchée ; en posant α = DF et β = CG, on obtient :

$BC^2 + BE^2 = EC^2$ c'est à dire $(L - \beta)^2 + 84^2 = \beta^2$ ① car CE = CG

$AD^2 + AE^2 = ED^2$ c'est à dire $(L - \alpha)^2 + 84^2 = \alpha^2 + 168^2$ ② car DG = DE

$CH^2 + HD^2 = CD^2$ c'est à dire $(\beta - \alpha)^2 + 168^2 = 175^2$

d'où : $\beta - \alpha = \sqrt{2401} = 49$ ③

De ① et ② on déduit : â $= \frac{L^2 + 7056}{2L}$ et $\alpha = \frac{L^2 - 21168}{2L}$ puis en remplaçant dans ③ on trouve :

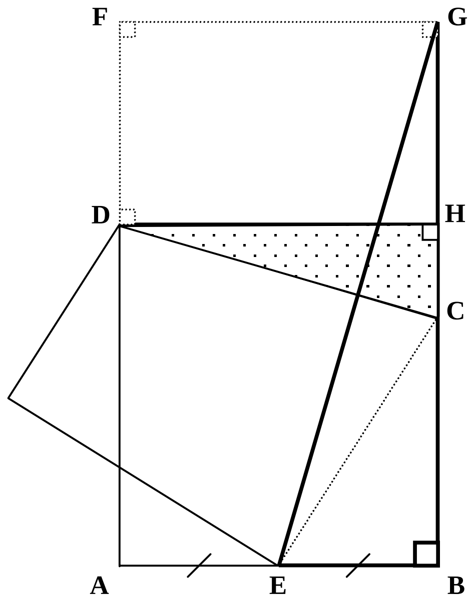
$\frac{7056 + 21168}{2L} = 49$, d'où : $L = \frac{28224}{2 \times 49} = 288$ (mm)

↳ ***ou trigonométrie dans un triangle rectangle…*** Par exemple :

HC = $\sqrt{175^2 - 168^2} = 49$; sin $\widehat{HCD} = \frac{DH}{DC} = \frac{168}{175}$, d'où : $\widehat{HCD} \approx 73{,}74°$; or $\widehat{BCE} = 180° - 2\times\widehat{HCD}$, d'où : $\widehat{BCE} \approx 32{,}52°$. Comme EC = 84 / sin $\widehat{BCE}$ et CB = 84 / tan $\widehat{BCE}$, on a donc : EC ≈ 156,25 et CB ≈ 131,75, d'où L ≈ 288 (mm)

L'inconvénient, ici, est que les résultats sont approchés… En classe de 1ère (ou si l'on a eu l'opportunité de le montrer en seconde…) on peut travailler en valeurs exactes en passant par :

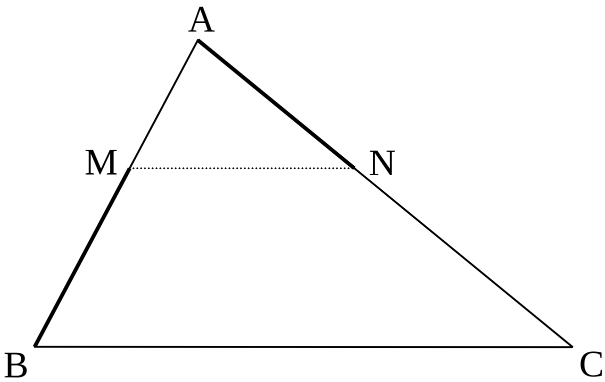
$$\begin{aligned}\sin \widehat{BCE} &= \sin(180° - 2\times\widehat{HCD})\\ &= \sin 2\times\widehat{HCD}\\ &= 2\times\sin \widehat{HCD}\times\cos \widehat{HCD} \quad \left(= 2\times\frac{168}{175}\times\frac{49}{175}\right)\end{aligned}$$



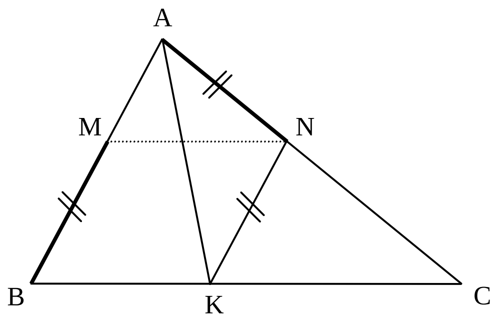
Remarque : les élèves qui utilisent la trigonométrie pour cet exercice établissent des égalités de rapports… qui peuvent également s'interpréter par le fait que l'on a des triangles de même forme… à savoir les triangles BEG et HDC…
(*Indication* : comme CE = CG et DE = DG, la droite (CD) est la médiatrice du segment [EG] et donc les segments EG et CD sont bien perpendiculaires tout comme les segments BG et DH…)

En utilisant comme précédemment le fait que $\beta - \alpha = 49$ puis en écrivant l'égalité des rapports on obtient : $\frac{GB}{DG} = \frac{EB}{CH}$ c'est à dire $\frac{L}{168} = \frac{84}{49}$ qui amène L = 288 !

Un problème de partage...



Un triangle ABC étant donné, trouver comment construire le point M sur le côté [AB] et le point N sur le côté [AC] tels que : AN = BM et (MN) // (BC)



Qui dit parallélisme dit ... parallélogramme ...

- ✎ compléter la figure en plaçant le point K sur le segment [BC] tel que MNKB soit un parallélogramme c'est à dire tel que [NK] // [AB] et coder la figure en conséquence (pour les égalités de longueurs + les droites parallèles de même couleur)
- ✎ le triangle ANK est isocèle en N
- ✎ considérations angulaires : angles à la base égaux + angles alternes-inernes (mettre les parallèles de la même couleur aide grandement à reconnaître cette configuration clé…)

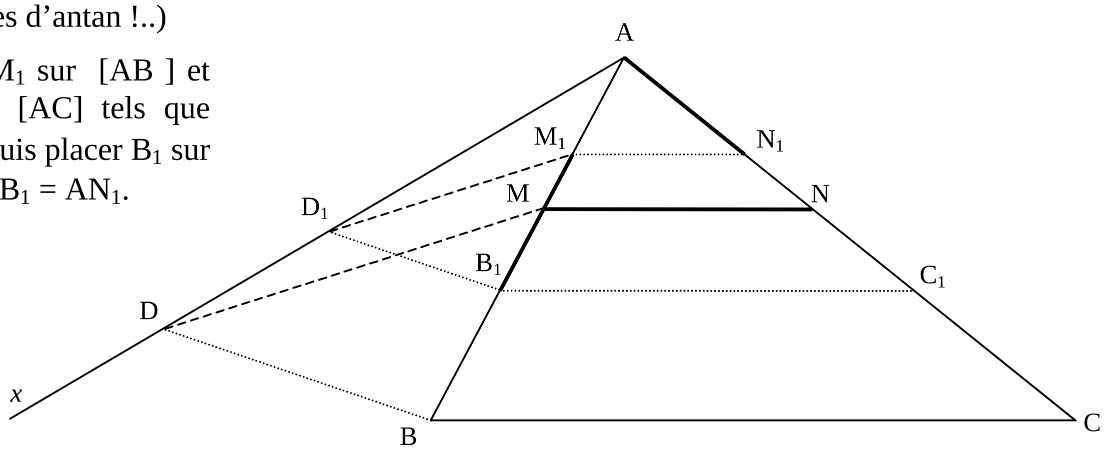
Reconnaissance de configurations…

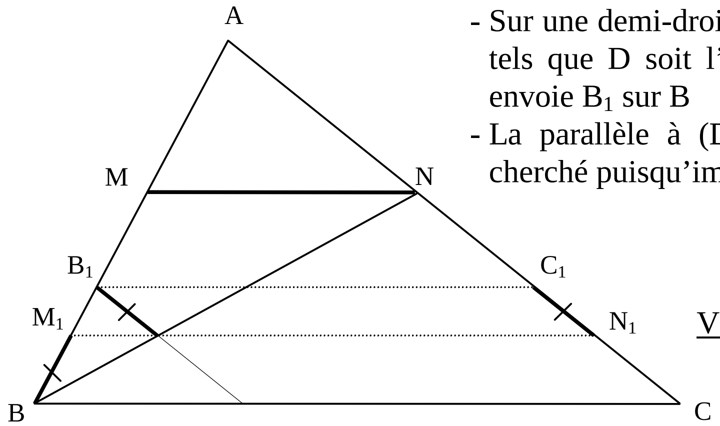
Par abandon d'une contrainte...

Essayer successivement d'abandonner telle ou telle contrainte... l'abandon de (MN) // (BC) semble difficile à récupérer par la suite, sinon par essais et corrections successifs...

↳ abandonner la contrainte concernant le côté [BC] ... puis la récupérer par agrandissement-réduction (où sont les homothéties d’antan !..)

- Placer un point M_1 sur [AB] et un point N_1 sur [AC] tels que $(M_1N_1) \parallel (BC)$, puis placer B_1 sur $[M_1B]$ tel que $M_1B_1 = AN_1$.





- Sur une demi-droite quelconque [Ax), construire les points D et D_1 tels que D soit l’image de D_1 par l’homothétie de centre A qui envoie B_1 sur B
- La parallèle à (D_1M_1) passant par D coupe [AB] au point M cherché puisqu’image de M_1 par cette même homothétie…

<u>Variante</u> : abandonner la contrainte concernant le sommet A…

Par des calcul de longueurs…

Les théorèmes de Pythagore et de Thalès étant rencontrés dès le collège, une fois en lycée on peut dire que nos élèves sont relativement bien familiarisés à leur emploi ainsi que pour repérer les situations propices à leur utilisation. De ce fait, nos élèves se sentent souvent plus “armés” pour se lancer dans des calculs de longueurs que dans des démarches purement géométriques. Il n’est donc pas rare, pour ne pas dire “naturel” pour eux, d’essayer de ramener un exercice de construction à un calcul de longueur(s).

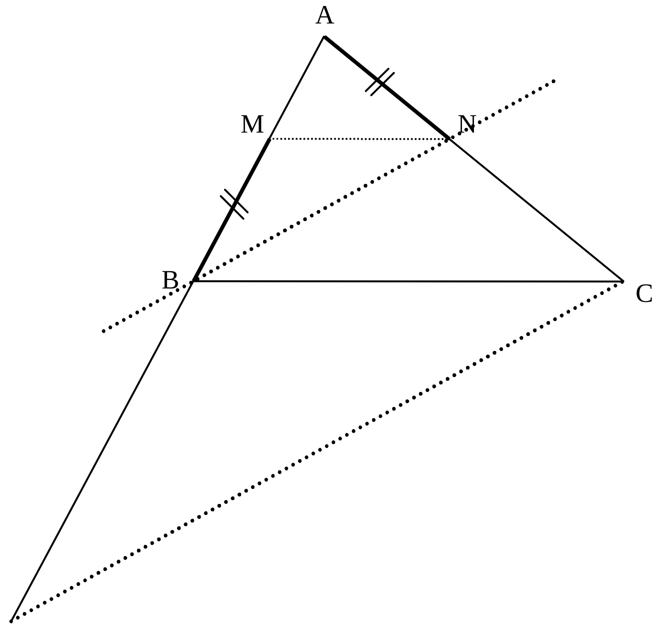
L’absence de mesure des longueurs des côtés du triangle peut constituer ici un frein à se lancer dans cette démarche, mais à chaque fois que cet exercice a été donné, quelques élèves se sont tout de même lancé dans des calculs de longueurs, certains en posant AM = x, d’autres AN = x = MB…

Le fait que (MN) soit parallèle à (BC) crée effectivement un réflexe quasi pavlovien amenant à l’égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Un peu plus difficilement vient ensuite la traduction du fait que AN = MB, ce qui donne, par exemple : $\frac{AM}{AM + AN} = \frac{AN}{AC}$… d’où ils déduisent $AM = \frac{AN^2}{NC}$ mais se trouvent ensuite bloqués…

(c’est le cas de ceux qui ont pris pour inconnue x = AM)

Ce n’est en effet pas si simple pour nos élèves que de penser alors ***à changer de stratégie***. On peut cependant essayer de leur faire comprendre pourquoi le résultat précédent conduit à une impasse vu qu’ils ont exprimé AM à l’aide des longueurs AN et NC qui ont elles même le statut d’inconnues… et les inciter à “*revenir en arrière*” pour écrire, par exemple : $\frac{AB - AN}{AB} = \frac{AN}{AC}$… Pour cela il faudra pas mal d’entraînement et avoir compris que AB et AC sont des données du problème même si l’on n’en connaît pas la valeur et qu’il est donc “plus naturel” de procéder ainsi…

(par contre ceux qui, dès le départ, ont pris pour inconnue x = AN n’auront pas tous ce problème…)



Mais ce n'est pas fini pour autant car ils aboutissent ensuite à $AN = \dfrac{AB \times AC}{AB + AC}$, calcul qui n'amène pas de solution satisfaisante pour dégager une **construction exacte**…

Une "**clé**" consiste alors à transformer cette égalité sous la forme $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AB + AC}$ que l'on interprète comme une "égalité de Thalès"…

Il reste ensuite à enrichir la figure en prolongeant le côté [AB] d'une longueur égale à AC…

Remarque : les élèves ont énormément apprécié la *beauté* de cette solution, peu courante pour eux, car plus habitués à raisonner dans le sens :

"Thalés $\rightarrow$ égalité de rapports"

Reconnaître des expressions et les contextualiser devient alors une méthode parmi d'autres pour ces élèves. Ainsi, par exemple, pour résoudre le petit problème suivant :

Étant donné trois nombres positifs a, b et c, démontrer que :

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

cela sera quasiment naturel pour certains de penser à considérer l'expression $\sqrt{a^2+b^2}$ *comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côté a et b ou encore* $(a+b+c)\sqrt{2}$ *comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté (a + b + c)…*

Solution proposée par un élève de 1ère S en "option Sciences" : faire intervenir une isométrie…

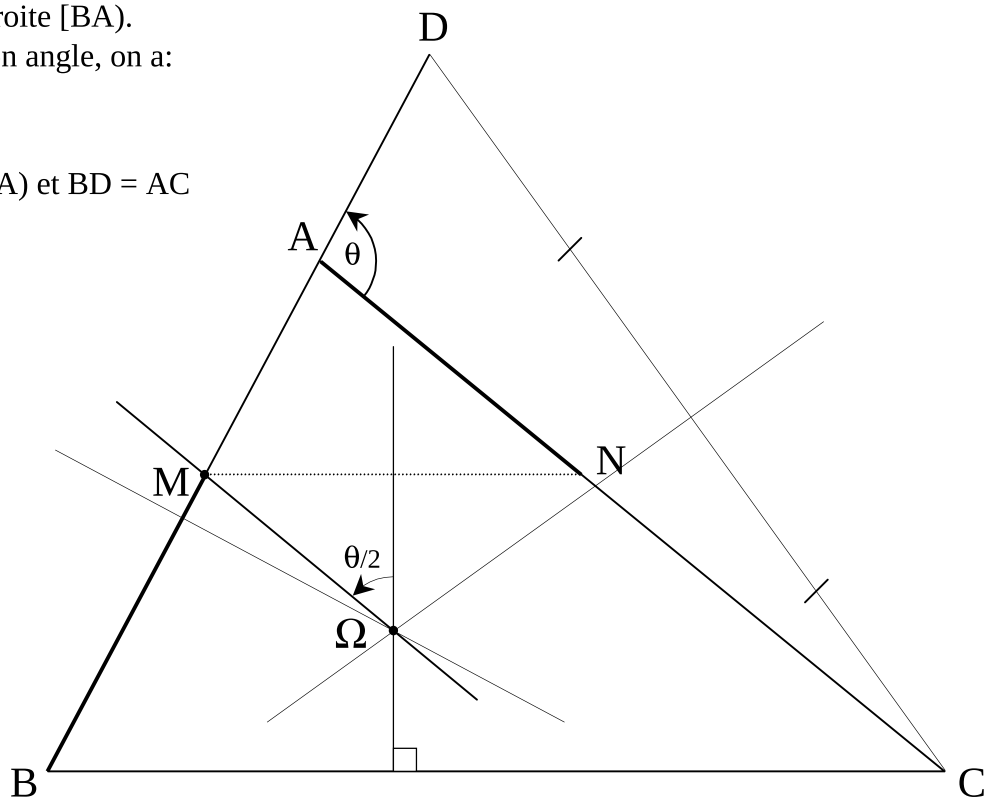
Comme AN = BM, on peut tenter de chercher une isométrie, transformant [AN] en [BM] par exemple...

➯ Faire intervenir la rotation ***r*** qui envoie la demi-droite [AC) sur la demi-droite [BA).

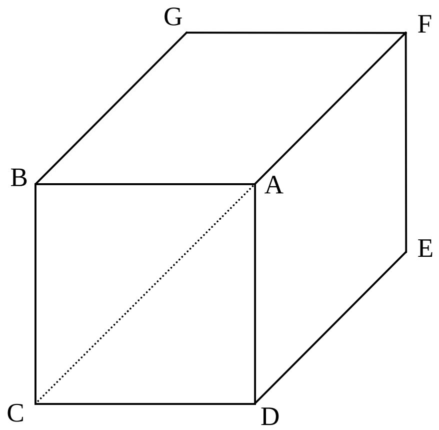
Si Ω est son centre et θ son angle, on a:

$$\boldsymbol{r} : \begin{array}{lcl} \Omega & \mapsto & \Omega \\ A & \mapsto & B \\ C & \mapsto & D \text{ tel que } D \in [BA) \text{ et } BD = AC \\ N & \mapsto & M \end{array}$$

et $\theta \equiv (\overrightarrow{AC} \,;\, \overrightarrow{BD})\ [2\pi]$…



Construction de figure…



Sur la figure ci-contre :
- ABCD est un carré,
- ABGF et ADEF sont des losanges,
- les points C, A et F sont alignés.

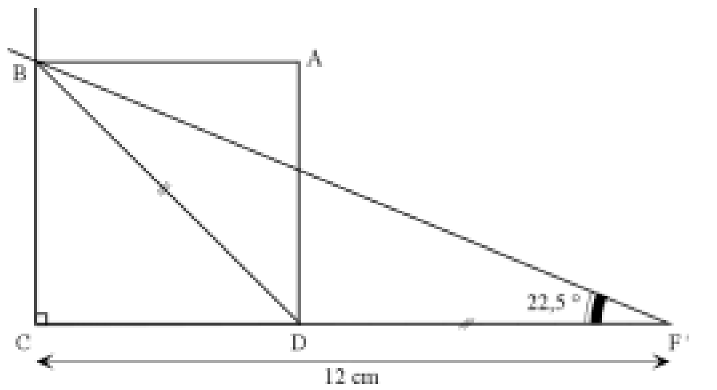
Le but de cet exercice est de trouver une construction exacte de cette figure de telle sorte que CF = 12 cm.

➯ Solution faisant intervenir une transformation : par “abandon d’une contrainte”… on construit une figure *semblable* à celle demandée à partir d’un carré quelconque ABCD, puis selon le cas on est ramené à agrandir ou à réduire la figure à l’aide d’une homothétie…

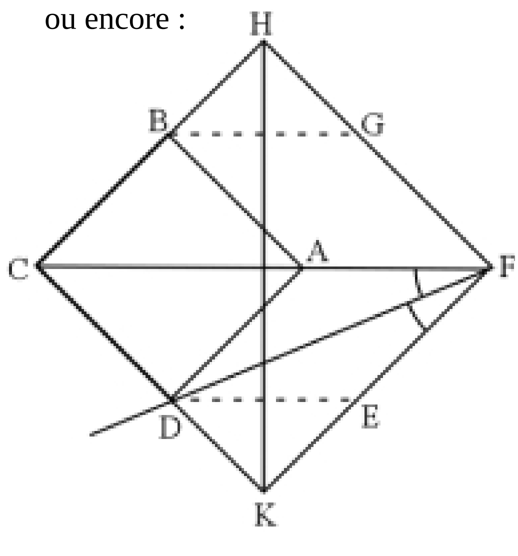
Mais il y a bien d’autres façons d’y arriver :

➯ Solutions faisant intervenir des considérations angulaires :

CF = CA + AF = DF’ + CD avec F’ tel que D sur [CF’], d’où BDF’ isocèle en D, …
On trace [CF’] de 12 cm puis une demi-droite d’origine F’ faisant un angle de 22,5° avec [F’C) qui coupe la perpendiculaire en C à [F’C] en B, on peut alors construire le carré CBAD avec D sur [CF’], etc.



ou encore :



On trace un carré CHFK dont les diagonales mesurent 12 cm, puis on trace la bissectrice de $\widehat{CFK}$ qui coupe [CK] en D, etc.

➯ sans oublier une solution algébrique : en posant x la longueur du carré ABCD, on trouve :

$$x\sqrt{2}+x=12 \text{ d'où } x=\frac{12}{1+\sqrt{2}}=12\sqrt{2}-12\ldots$$

on peut en déduire une construction exacte en partant d’un carré de 12 cm de côté… (exemple où “rendre rationnel le dénominateur” présente de l’intérêt…)

Etc…

Exercice avec prise d'initiative en Première S

Énoncé

Comparer $sin(2x)$ e t $x - 1$, pour tout nombre réel x.

Remarques

1) L'entrée dans le problème est facile grâce aux calculatrices graphiques.

2) Accepter une stratégie utilisant une étude de fonction directement sur $]-\infty ; +\infty[$ ou un autre découpage que celui qui est proposé dans la grille de la page suivante.

3) La grille met en évidence des éléments à valoriser dans la notation d'une copie où le problème n'est pas traité complètement. Il n'est pas question de détailler le barème relatif à cet exercice en tenant compte de tous les points visibles dans la grille.

Grille d'analyse a priori

Niveau 1ère S ou TS	Prise d'initiative et engagement dans une démarche	Aboutissement de la démarche engagée	Communication	Manifestation de savoir ou savoir-faire	Manifestation d'esprit critique
Expérimentation Recherche	* Utilisation de la calculatrice graphique pour émettre des conjectures. * Essais numériques relativement aux intervalles cités dans la colonne suivante.	* Conjecture partielle relative aux intervalles : $]-\infty ; 0[$, $]2 ; +\infty[$. * Conjecture partielle relative à $[0 ; 1[$. * Conjecture partielle relative à $[1 ; 2[$. * Conjecture relative à $]-\infty ; +\infty[$.	* Comprendre « comparer pour tout x réel ». * Explications ou graphiques relevant de l'utilisation de la calculatrice par rapport aux intervalles cités. * Explications de ce que l'on peut tirer d'une expérimentation numérique.	* Savoir interpréter graphiquement le signe d'une fonction ou comparer graphiquement deux fonctions.	* Mise en défaut de ses propres conjectures.
Démonstration	* Conscience de la nécessité de démontrer. * Choix d'une stratégie de comparaison directe sur $]-\infty ; 1[$, $]2 ; +\infty[$, puis d'étude du signe d'une fonction sur $[1 ; 2]$. * Choix d'une stratégie d'étude du signe d'une fonction sur $]-\infty ; +\infty[$.	* Maintien de la cohérence. * Prise en compte des propriétés utiles de la fonction sur $[1 ; 2]$ (ou tout intervalle inclus dans $[1 ; 2]$), justification correcte du signe d'une fonction trigonométrique.	* Mise en évidence ou non des différents cas. * Rigueur dans l'étude de chaque cas.	* Savoir que : $-1 \leq sin(2x) \leq 1$. * Théorèmes sur les inégalités. * Dérivée d'une fct. composée. * Équ. et inéqu. trigo. * Théorème fct. dérivable et strict. monotone sur I.	* Manifestation que la démarche n'a pas abouti.

Corrigé

1) Pour tout nombre réel x strictement inférieur à 0 :

$x - 1 < -1$ et $-1 \leq sin(2x) \leq 1$, donc $sin(2x) > x - 1$.

2) Pour tout nombre réel x strictement supérieur à 2 :

$x - 1 > 1$ et $-1 \leq sin(2x) \leq 1$, donc $x - 1 > sin(2x)$.

3) Pour tout nombre réel x appartenant à [0 ; 1[:

$2x \in [0 ; 2[$ et, pour tout $y \in [0 ; 2[$, $sin\ y \geq 0$, donc $sin(2x) \geq 0$.

Comme $x - 1 < 0$, on en déduit que $sin(2x) > x - 1$.

4) Sur [1 ; 2] :

On étudie $f : x \mapsto sin(2x) - x + 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2cos\,(2x) - 1$.

Quand x décrit l'intervalle [1 ; 2], $2x$ décrit l'intervalle [2 ; 4], donc $cos(2x)$ reste strictement inférieur à 0, donc à 0,5, d'où $f'(x)$ reste strictement négative.

Donc f est strictement décroissante sur [1 ; 2].

D'après la calculatrice, $f(1)$ est égal à 0,91 à 10^{-2} près, donc $f(1) > 0$, et $f(2)$ est égal à $-1{,}76$ à 10^{-2} près, donc $f(1) < 0$.

Puisque f est dérivable et strictement décroissante sur [1 ; 2] et que $f(2) < 0 < f(1)$, il existe une seule valeur a telle que $f(a) = 0$.

Grâce à la calculatrice, $f(1{,}377) > f(a) > f(1{,}378)$, donc $1{,}377 < a < 1{,}378$, puisque f est strictement décroissante sur [1 ; 2].

Donc, pour tout nombre réel x appartenant à $[1 ; a[$, $f(x) > f(a)$, donc $f(x) > 0$, d'où $sin(2x) > x - 1$.

Et, pour tout nombre réel x appartenant à $]a ; 2]$, $f(x) < f(a)$, donc $f(x) < 0$, d'où $sin(2x)<x - 1$.

Exercice avec prise d’initiative en Terminale S

Exercice 1

Énoncé

Dans le plan orienté, à tout parallélogramme *OABC*, on associe les deux triangles équilatéraux directs *OAD* et *OFC*.

Quelle est la nature du triangle *FBD* ?

Remarques

1) L’entrée dans le problème est facile : tout élève devrait pouvoir au moins expérimenter et émettre une conjecture.

2) La grille suivante met en évidence des éléments à valoriser dans la notation d’une copie où le problème n’est pas traité complètement. Il n’est pas question de détailler le barème relatif à cet exercice en tenant compte de tous les points visibles dans la grille.

Grille d’analyse a priori

Niveau TS	Prise d’initiative et engagement dans une démarche	Aboutissement de la démarche engagée	Communication	Manifestation de savoir ou savoir-faire	Manifestation d’esprit critique
Expérimentation Recherche	* Étude d’exemples : dessin de plusieurs figures, triangles à l’extérieur ou qui “chevauchent” le parallélogramme.	* Emission de la conjecture que le triangle *DEB* est équilatéral.	* Un ou plusieurs dessins clairs. * Mise en évidence que « *DEB* est équilatéral qqst le plg. *OABC* » est une conjecture.	* Savoir ce qu’est un triangle équilatéral direct.	* Mise en défaut de ses propres conjectures dans le cas, par ex., où il n’est pas tenu compte de l’hyp. « direct ».
Démonstration	* Conscience de la nécessité de démontrer. * Choix d’une stratégie : 1) utiliser le plan complexe avec un repère d’origine O, 2) utiliser la composée de transformations. * Reformuler les hypothèses et la conclusion à démontrer dans le cadre choisi.	* Maintien de la cohérence. * Raisonnement correct.	* Rédaction correcte d’une démonstration.	1) Traduction dans $\mathbb{C}$ d’un triangle équilatéral direct et d’un plg., calculs dans $\mathbb{C}$. 2) Nature de la composée de la translation suivie de la rotation utiles, égalité de deux rotations de même centre qui coïncident en un même point.	* Manifestation que la démarche n’a pas abouti.

Corrigé

Stratégie 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct de centre O. Soient a, b, c, d, f les affixes respectives des points A, B, C, D, F.

- Puisque $OABC$ est un parallélogramme, $OA = CB$, donc $a = b - c$.
- Puisque OAD est équilatéral direct, $d = e^{i\frac{\pi}{3}}a$.
- Puisque OFC est équilatéral direct, $c = e^{i\frac{\pi}{3}}f$.

On veut démontrer que FBD est équilatéral direct, donc que $d - f = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - f)$

$$\begin{aligned}
d - f &= e^{i\frac{\pi}{3}}a - f \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) - f \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}b - e^{i\frac{\pi}{3}}c - f \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}b - e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}f - f \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}b - e^{i\frac{\pi}{3}}f\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}b - 2cos\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}f \quad \text{cqfd}
\end{aligned}$$

Stratégie 2

On utilise la composée $r \circ t$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{CO}$.

La composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'une translation est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc $r \circ t$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Or $r \circ t$ transforme C en O et la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme aussi C en O, puisque OFC est équilatéral direct.

Comme deux rotations de même angle qui transforment toutes les deux C en O sont égales, on en déduit que $r \circ t$ est la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Enfin, $t(B) = A$, car $OABC$ est un parallélogramme, et $r(A) = D$, car OAD est équilatéral direct, donc $r \circ t\ (B) = D$. Autrement dit, D est l'image de B par la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc FBD est équilatéral direct.

Exercice avec prise d'initiative en Terminale S

Exercice 2 : INTERSECTION D'UNE DROITE AVEC UNE CUBIQUE

<u>Texte</u> :

Dans un repère orthogonal, on note (C) la courbe représentative sur [0, +∞[de la fonction $x \mapsto x^3$. Pour tout nombre réel positif p, on note (Δ_p) la droite d'équation : $y = 3p^2x - 2$.
Le propos de cet exercice est de déterminer, suivant les valeurs du réel positif p, le nombre de points d'intersections de (C) avec (Δ_p).
a) Traiter le problème graphiquement. (On ne demande pas de démonstration rigoureuse).
b) Donner la solution de ce problème, en démontrant chacun des résultats.

<u>Analyse a priori</u> :

<u>Connaissances mobilisés</u> : *Equations de droites, méthode de recherche des points d'intersection de deux courbes, étude des variations d'une fonction, théorème de bijection.*

<u>Compétences requises</u> :

• *Dans la partie a), le candidat est amené à* ***traduire*** *géométriquement la forme* $y = 3p^2x - 2$ *de l'équation réduite de la droite* (Δ_p)*, puis à* ***expérimenter*** *graphiquement pour* ***émettre une conjecture****.*

• *Dans la partie b), il doit prendre plus d'****initiative*** *et* ***élaborer une stratégie*** *comportant plusieurs étapes :*
- Considérer la différence des fonctions.
- Établir le tableau de variations de la «fonction différence».
- Distinguer différents cas suivant la valeur du minimum de cette fonction.
- Utiliser le théorème de bijection pour obtenir les résultats sur l'équation (f – g)(x) = 0.

<u>Remarques</u> :

• *La fonction dont l'introduction est la plus naturelle est* $x \mapsto x^3 - 3p^2x + 2$. *On peut évidemment aussi introduire :* $x \mapsto x^3 - 3p^2x$.

• *Dans la partie a) ou dans la partie b), il est possible que des candidats, sans traiter l'ensemble des cas* ***démontrent*** *que la droite correspondant à p=1 est tangente à (C), ou bien qu'elle a avec (C) un seul point d'intersection. Il conviendra d'accorder une certaine valeur à une telle résolution partielle.*

• *D'après une lecture stricte des programmes, le candidat ne dispose pas du théorème de bijectivité sur l'intervalle non borné [p, +∞[. Cependant on ne sanctionnera pas le candidat qui l'aura utilisé. On pourra valoriser cependant le travail de celui qui a d'abord appliqué ce théorème sur l'intervalle [p, 2p], par exemple.*

<u>Critères d'évaluation</u> :

• *<u>Barème suivant les questions</u> :*
1,5 points pour la question a)
3,5 points pour la question b)

• *<u>Évaluation des compétences</u>*
Le correcteur prendra en compte les diverses compétences dont aura fait preuve le candidat, telles qu'elles apparaissent dans la grille ci-dessous.

COMPÉTENCES REQUISES	Question	TRAVAIL ATTENDU
Traduire	**a)**	Traduire le problème en termes géométriques.
Présenter	**a)**	Réaliser un graphique clair.
S'exprimer	**a)**	Exprimer correctement la résolution graphique (passage du coefficient directeur de la droite au nombre p)
Elaborer et organiser une démarche	**b)**	– Considérer la différence des deux fonctions. – Entreprendre d'étudier le sens de variation de la fonction différence. – Penser à utiliser le théorème de bijection.
S'exprimer	**b)**	Mener clairement la discussion à partir de la valeur de p, en considérant les trois cas : $0 \leq p < 1$; $p = 1$; $p > 1$
Exécuter	**b)**	– Obtenir le tableau de variations de la fonction différence. – Utiliser avec rigueur le théorème de bijection.

Exercice avec prise d'initiative en Terminale S

Exercice 3 : **COURBE D'HIPPIAS**

(À FAIRE EN CLASSE OU EN DEVOIR À LA MAISON)

Remarque :

Ce texte est sans doute trop long et trop ambitieux pour être donné comme sujet d'examen. Mais il donne un exemple d'un exercice qui peut être donné à faire aux élèves pendant l'année scolaire, pour favoriser la prise d'initiative de leur part.

Texte :

Préliminaire. Les deux résultats ci-dessous seront utiles pour la suite :

- $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\tan u}{u} = 1$
- Pour tout réel non entier u : $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}u\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}(1-u)\right)}$

Relier le premier résultat à un nombre dérivé, puis démontrer le second résultat.

Hippias d'Élis vivait un peu avant 400 avant Jésus-Christ. Il inventa la courbe décrite ci-dessous.

ABCD est un carré de sens direct, c'est-à-dire tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radians. E étant un point mobile sur le quart de cercle d'extrémités D et B et de centre A, le segment [AE] tourne à vitesse angulaire constante autour de A, dans le sens rétrograde, en partant de la position [AD] pour arriver à la position [AB].

Par ailleurs, F étant un point mobile sur [AB], et Δ la droite passant par F et perpendiculaire à (AB), Δ part de la position (AD) et se déplace parallèle à elle-même à vitesse constante, pour arriver à la position (BC).

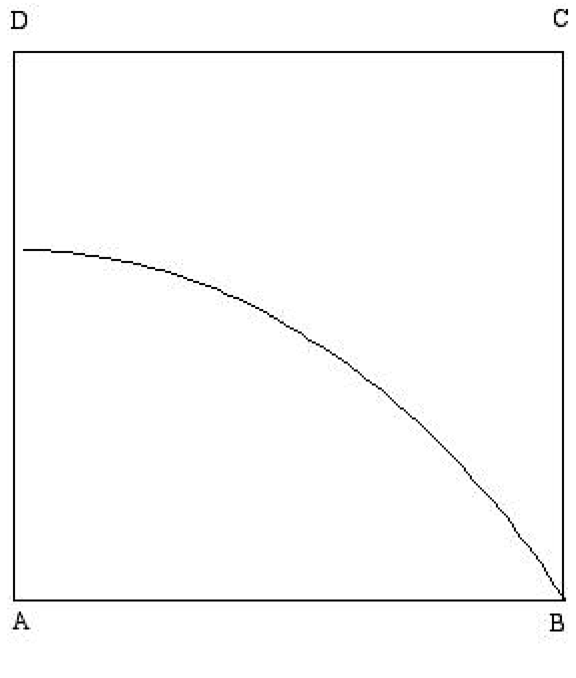
Au départ des mouvements, E coïncide avec D et Δ avec la droite (AD); à la fin des mouvements, [AE] arrive sur [AB] au moment même où Δ arrive sur (BC).

À tout instant, sauf à l'instant initial, le point M est l'intersection du segment [AE] et de la droite Δ. La trajectoire du point M est alors la *Courbe d'Hippias* que nous noterons ici (*H*).

Hippias se sert de cette courbe pour construire le tiers d'un angle aigu quelconque.

On doit à Dinostrate, qui vécut un peu plus tard, entre 400 et 300 avant Jésus-Christ, d'avoir étudié le point-limite de (*H*) sur le segment [AD], que nous noterons L : Il a démontré que le rapport $\dfrac{AL}{AD}$ est égal au nombre qui est noté aujourd'hui $\dfrac{2}{\pi}$.

On pourra voir la courbe d'Hippias sur la figure ci-contre.



a) Expliquer comment faire afficher la courbe d'Hippias sur l'écran d'une calculatrice graphique. Justifier la méthode.

b) Expliquer comment on peut utiliser la courbe d'Hippias pour construire le tiers d'un angle aigu quelconque.

Pour les deux dernières questions, on pourra utiliser les résultats du préliminaire.

c) Démontrer le résultat de Dinostrate.

d) Déterminer la tangente à la courbe (*H*) au point B.

Analyse a priori :

Connaissances mobilisés : *Trigonométrie élémentaire. Nombre dérivé et interprétation géométrique de celui-ci. Limite de la composée (i.e. changement de variable pour déterminer une limite). Pratique des courbes paramétrées.*

Compétences requises :

- *Dans le préliminaire, il s'agit simplement d'applications immédiates de connaissances.*
- *La question a) requiert du candidat qu'il* ***traduise*** *en termes de fonctions ou de courbe paramétrée une explication donnée dans un langage géométrique et cinématique assez inhabituel.*

  Il est possible, mais pas obligatoire, d'introduire un paramétrage par une variable temps t, le plus simple étant de paramétrer entre 0 et 1.

  On a alors : $\widehat{DAE} = \frac{\pi}{2}t$ *, AF = t.*

  Il est nécessaire par la suite de se placer dans un repère. On aboutit alors à : $y = \dfrac{x}{tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

  ou bien alors à la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \end{cases}$

  L'une ou l'autre de ces égalités permet le tracé de la courbe représentative.
- *Dans la question b), le candidat doit* ***réinvestir*** *la compréhension qu'il a acquise de la courbe, et* ***faire preuve d'initiative.***

  Il est difficile de partager un angle en trois, mais aisé de le faire pour un segment.

  Pour partager l'angle DAE, on considére le point F correspondant, puis on partage en trois le segment [AF], on onbtient le point F' qui à son tour fournit le point E' recherché, de par les propriétés de la courbe.
- *La question c) incite à se* ***ramener à des résultats connus*** *: aussi bien la limite donnée en préliminaire que le résultat numérique de Dinostrate. Il faut utiliser un changement de variable.*
- *Il en est de même de la question d), avec auparavant une* ***traduction*** *du géométrique à l'analytique qui est de l'ordre de la* ***connaissance du cours****. La méthode est ici plus difficile à trouver.*

Évaluation des compétences

La grille ci-dessous essaie de mettre en évidence les diverses compétences requises des élèves.

COMPÉTENCES REQUISES	Question	TRAVAIL ATTENDU
Traduire	**a)**	Traduire le problème en termes de fonction ou de représentation paramétrique.
Prendre des initiatives	**a)**	Introduire un paramétrage par le temps (facultatif).
Présenter : Réaliser un graphique	**a)**	Le graphique est fourni. Mais le candidat devra l'avoir recopié (ou joint) et complété, avec *x*, *y*, l'angle *t*.
Présenter : Réaliser une construction	**b)**	A savoir celle du tiers de l'angle. On appréciera que le candidat ait utilisé le théorème de Thalès pour couper un segment en trois.
S'exprimer	**b)**	Expliquer et justifier la construction.
Prendre des initiatives	**c)**	Poser un changement de variable, considérer l'inverse du quotient.
Traduire	**d)**	Traduire le problème de tangente en une recherche de limite.
Prendre des initiatives	**d)**	Transformer l'écritures de l'expression, faire un changement de variable ou considérer un autre nombre dérivé.