Un (tout petit) pas vers le développement de Mertens (1874).

Notations: $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. N est une borne entière destinée à tendre vers $+\infty$. Sur la route (escarpée) qui mène au développement asymptotique dû essentiellement au mathématicien polonais Franz Mertens (1840-1927):

$$\exists M \in \mathbb{R}, \sum_{p\in\mathcal{P}, p\leq N} \frac{1}{p} = \ln(\ln N) + M + o(1) \text{ quand } N \to +\infty$$

(développement dans lequel $o(1)$ désigne une suite qui tend vers 0) nous établissons seulement cette minoration qui entraîne la divergence vers $+\infty$ (et qui capte l'ordre de grandeur principal) :

$$\boxed{\sum_{p\in\mathcal{P}, p\leq N} \frac{1}{p} \geq \ln(\ln N) - 2}$$

1 Les grandes lignes de la preuve

1. L'entier $e = \lfloor \log_2(N) \rfloor$ est tel que $2^{e+1} > N$, donc la factorisation première de tout nombre $n \leq N$ a au plus e facteurs (distincts ou non) : **point (0)**.

2. Minorons par une somme partielle $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p^j} \geq \sum_{j=0}^{e} \frac{1}{p^j}$ d'où pour le produit sur tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à N $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \cdots < p_k \leq N < p_{k+1}$:

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j}} \geq \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_k\leq e} \frac{1}{p_1^{i_1}\cdots p_k^{i_k}} \underbrace{\geq}_{(0)} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \tag{1}$$

3. Cette inégalité est très classique

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \geq \ln(N+1) \geq \ln(N) \tag{2}$$

d'où en linéarisant (1) par la fonction logarithme qui est croissante :

$$\sum_{j=1}^{k} -\ln\left(1-\frac{1}{p_j}\right) \geq \ln\ln(N)$$

4. Or l'inégalité ([1]) $\forall x \in [0, 1/2]\,, -\ln(1-x) \leq x + x^2$ conduit à

$$\sum_{j=1}^{k} -\ln\left(1-\frac{1}{p_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j^2}$$

où la dernière somme converge car $0 \leq 1/p_j^2 \leq 1/j^2$ et la série de Riemann $\sum_j 1/j^2$ converge. Sa somme est connue ([2]) mais il est facile de la majorer par 2.

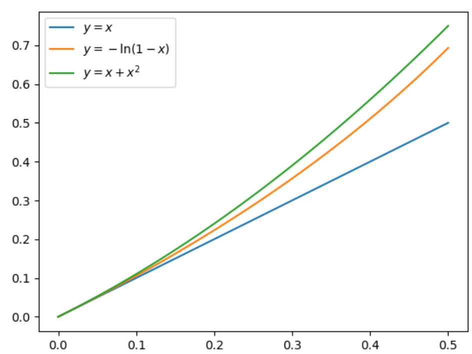


Illustration de l'encadrement

$$\forall x \in [0, 1/2],\ x \leq -\ln(1-x) \leq x + x^2 \tag{3}$$

[1] que les étudiants de licence (L2?) peuvent voir comme une conséquence du développement en série entière $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j}$

[2] Consulter `http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2008-01.pdf`

5. Finalement :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} \geq \ln\ln(N) - 2 \to +\infty \text{ quand } N, k \to +\infty \tag{4}$$

6. En appliquant deux fois la fonction exponentielle qui est croissante, on trouve la condition suffisante :

$$\text{Si } N \geq \exp(\exp(A+2)) \text{ alors } \ln\ln(N) - 2 \geq A \text{ donc } \sum_{p\in\mathcal{P}, p\leq N} \frac{1}{p} \geq A$$

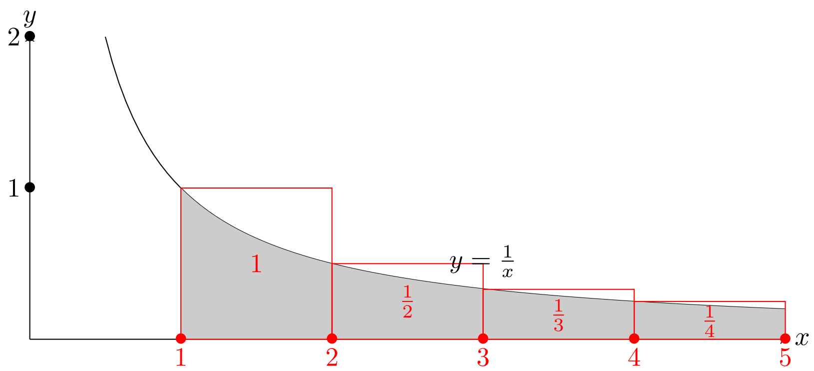
Même avec PYTHON , le calcul numérique de N ne peut pas dépasser $A = 4$: $\exp(\exp(6)) \approx 1.6.10^{175}$.

2 Références

- W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill (exercice 10 page 197)
- https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_des_inverses_des_nombres_premiers
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Franz_Mertens

3 Étapes détaillées dans le style "Do it yourself"

3. Deux moyens d'établir l'inégalité "classique" (2)
a. Comparaison à une intégrale
La comparaison entre l'aire sous la courbe représentative d'une fonction décroissante et l'aire de rectangles de largeur 1 qui s'appuient sur cette courbe donne:



$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$

b. Vérification par récurrence
Notons $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

- Appliquer l'inégalité (3) avec $x = -1/j$, $j \geq 2$ pour montrer l'hérédité de l'inégalité $H_n \geq \ln(n+1)$.
- Conclure $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geq \ln(n+1)$.

4. L'encadrement (3)
a. Minoration par convexité

- La minoration $\forall x < 1$, $x \leq -\ln(1-x)$ est une conséquence de la convexité de $f : x < 1 \mapsto -\ln(1-x)$.
  - les deux premières dérivées de f sont $f'(x) = \cdots \quad , f''(x) = \cdots$
  - $f(0) = \cdots \quad , f'(0) = \cdots$ donc $y = x$ est une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point $O = (0, 0)$.
  - la fonction f est convexe car $f''(x) \cdots$.

– la courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de la tangente en chacun de ses points donc en particulier en O :

$$\forall x < 1, -\ln(1-x) \geq x \tag{5}$$

b. Majoration

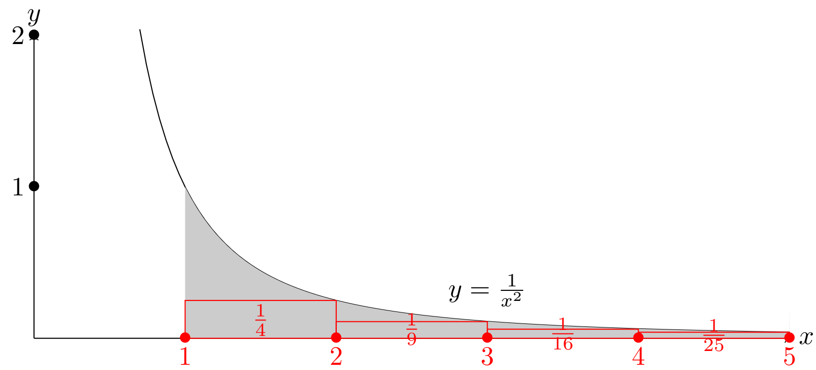
La majoration peut se démontrer en étudiant les variations de la différence des deux membres

$$g : x \in [0, 1/2] \mapsto \ln(1-x) + x + x^2$$

– $g'(x) = \cdots$
– la fonction g est croissante car ...
– donc $\forall x \in [0, 1/2]$, $g(x) \geq g(0) = \cdots$

4. Minoration par 2 (décalquée de 3.)

a. Comparaison à une intégrale



$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$$

b. Vérification par récurrence

Notons $K_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$.

– Vérifier la majoration $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
– L'inégalité $K_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$ est héréditaire car ...
– On conclut $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n \leq 2$ car ...
– La suite (K_n) est majorée par 2 donc elle converge parce qu'elle ...