∽ Corrigé du brevet de technicien supérieur ∼ Opticien–lunetier 12 mai 2021

Exercice 1 **10 points**

A. Ajustement d'un nuage de points

1.

x	60	80	120	160
$z = \ln(N(x))$	8,006	7,601	6,802	5,991

2. L'équation est $z = -0,02x + 9,21$.

3. $z = \ln(N(x)) = -0,02x + 9,21$ se réécrit $N(x) = \text{e}^{-0,02x+9,21} = \text{e}^{-0,02x} \times \text{e}^{9,21}$ or $\text{e}^{9,21} \approx 9\,996,6 \approx 10\,000$ donc le nombre d'acheteurs potentiels peut être modélisé par la fonction N_1 définie pour tout x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $N_1(x) = 10\,000\text{e}^{-0,02x}$.

4. $N_1(100) = 10\,000\text{e}^{-0,02\times 100} = 10\,000\text{e}^{-2} \approx 1\,353$ acheteurs potentiels si les lunettes sont vendues au prix de 100 euros la paire.

B. Modèle discret

1. **a.** Une diminution de 33 % correspond à un coefficient multiplicateur 0,67 donc deux diminutions successives de 33 % correspondent à un coefficient multiplicateur $0,67^2 = 0,4489 \approx 0,45$ soit une diminution globale d'environ 55 %.

b. Lorsque le prix passe de 60 à 80 euros, le nombre d'acheteurs passe de 3 000 à 2 000, ce qui correspond à une baisse de 33 % environ puisque $\dfrac{2000-3000}{3000} \approx -0,3333$.

Quand le prix passe de 80 euros à 120 euros, le nombre d'acheteurs potentiels baisse de 55 % puisque $\dfrac{900-2000}{2000} = -0,55$, et cela correspond bien à deux baisses de 33 % pour deux augmentations de 20 euros.

Enfin de 120 à 160 euros on a encore deux hausses de 20 euros et $\dfrac{400-900}{900} \approx -0,5556$ soit une baisse d'environ 55 % qui correspond bien à deux baisses de 33 %, ce qui est là encore cohérent avec les deux augmentations de 20 euros de 120 à 160.

c. $q^{20} = 0,67 \iff q = \sqrt[20]{0,67} \approx 0,98$ pour $q > 0$.

2. **a.** La relation $u_{n+1} = u_n - \dfrac{2}{100}u_n$ s'écrit aussi $u_{n+1} = 0,98u_n$,

ce qui prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

b. $u_n = 10\,000 \times 0,98^n$.

c. $u_{100} = 10\,000 \times 0,98^{100} \approx 1\,326$.

C. Modèle continu

1. Les solutions de (E) sont les fonction $y = k\text{e}^{-0,02x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2. La condition initiale $f(0) = 10\,000$ s'écrit $10\,000 = k\text{e}^{-0,02\times 0}$ or $\text{e}^0 = 1$ donc $k = 10\,000$ et $f(x) = 10\,000\text{e}^{-0,02x}$.

D. Étude d'une fonction

$B(x) = (x-55)f(x) = 10\,000(x-55)\text{e}^{-0,02x}$.

1. **a.** $B'(x) = -200(x-105)\mathrm{e}^{-0,02x}$ or $-200 < 0$ et $\mathrm{e}^{-0,02x} > 0$ sur $[0~;~300]$ donc $B'(x)$ a le signe opposé au signe de $x-105$, en particulier $B'(x)$ s'annule en $x = 105$.

x	0		105		300
$B'(x)$		+	0	−	

b. Le tableau de variations de B sur $[0~;~300]$ est :

x	0		105		300
$B'(x)$		+	0	−	
B	$-550\,000$	$\nearrow$	$166\,435,54$	$\searrow$	$6\,072,94$

2. **a.** La recette est $x \times 10\,000\mathrm{e}^{-0,02x} = xf(x)$ et le coût de production de x paires de lunettes est $55f(x)$ euros, le bénéfice en euros que peut réaliser la chaîne de magasin est alors la différence entre le chiffre d'affaires (dans cette situation simplifié, égal à la recette) et le prix de revient donc $B(x) = xf(x) - 55f(x) = (x-55)f(x)$.

b. Selon cette étude, le prix de vente des lunettes qui permet de réaliser le bénéfice maximal est 105 euros.

Exercice 2 **10 points**

A. Loi normale

1. $P(149 \leqslant X \leqslant 151) \approx 0,95$ (En reconnaissant l'intervalle à plus ou moins deux écarts type, on peut se passer de la calculatrice.)
2. Le plus grand nombre réel a **du tableau** tel que $P(X > a) > 0,96$ est $a = 149,12$.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1. **a.** L'épreuve aléatoire « prélever une branche de lunettes dans le stock » possède deux issues, le succès « la branche n'est pas acceptable » de probabilité $p = 0,02$, et l'échec.
On répète $n = 100$ fois cette épreuve de façon identique et indépendante, donc le nombre de succès Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$.

b. La probabilité qu'au plus deux branches ne soient pas acceptables dans le prélèvement est
$P(X \leqslant 2) \approx 0,68$.

2. **a.** On approche la loi Y par une loi de Poisson de même espérance $\lambda = np = 100 \times 0,02 = 2$.

b. $P(Y_1 \leqslant 2) \approx 0,68$.

C. Test d'hypothèse

1. $h = 2 \times 0,05 = 0,1$.
2. On prélève un échantillon de 100 branches dans la production de la journée et on calcule la moyenne $\overline{z}$ de leurs longueurs.
Si $\overline{z} \in [\mu - h; \mu + h]$ soit $[149,9; 150,1]$
alors on accepte H_0
sinon on rejette H_0 avec un risque d'erreur de 5 %.
3. $150,2 \notin [149,9; 150,1]$ donc le contrôleur rejette l'hypothèse nulle H_0.