Brevet de technicien supérieur 10 mai 2021 - groupement A

Exercice 1 **11 points**

Partie A : Étude d'un signal - série de Fourier

1. **a.** D'après le graphique, on mesure que $T = 10\ \mu$s.

   b. La fréquence vaut $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{10 \times 10^{-6}} = 10^5$ Hz $= 100$ kHz.

2. **a.** Le signal étant pair, alors $b_n = 0$.

   b. $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Or $f(t) = 0$ si $t \in [0\ ;\ 1[\cup[9\ ;\ 10]$ et $f(t) = 12$ si $t \in [1\ ;\ 9]$.

   Soit $a_0 = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_1^9 12\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{10}(12 \times 9 - 12 \times 1) = 9,6$.

   Le résultat est en accord avec la valeur demandée.

   Remarque : graphiquement, on peut aussi déterminer la valeur moyenne du signal en calculant l'aire sous la courbe et en divisant par la période, soit $a_0 = \dfrac{A}{T} = \dfrac{12 \times 8}{10} = 9,6$.

3. $U_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{10}\left[12^2 t\right]_1^9 = \dfrac{1}{10}\left(12^2 \times 9 - 12^2 \times 1\right) = 115,2$.

   Soit $U_{\text{eff}} = \sqrt{115,2} \approx 10,7$ V.

   Le résultat est en accord avec la valeur demandée.

4. Le taux de distorsion harmonique vaut $T_F = \sqrt{\dfrac{U_{\text{eff}}^2 - a_0^2}{M^2}}$ avec $M = 20\,000$ V.

   Soit $T_F = \sqrt{\dfrac{10,733^2 - 9,6^2}{20\,000^2}} \approx 2,3 \times 10^{-4}$. Il n'y a donc pas d'incidence sur le réseau.

Partie B : Transmission numérique - Loi binomiale

1. La variable aléatoire X suit une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et aléatoires de paramètres $n = 80$ et $p = 0,015$.

   X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(80\ ;\ 0,015)$.

2. Si tous les bits sont correctement transmis alors $X = 0$.

   D'après la calculatrice, $P(X = 0) \approx 0,298$.

3. $P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 0,007$.

4. **a.** L'espérance de la variable X vaut $E(X) = n \times p = 80 \times 0,015 = 1,2$.

   b. L'espérance correspond à la moyenne de la variable associée à sa loi de probabilité.

   Donc en moyenne, la ligne est de qualité, puisque moins de 2 bits sont mal transmis durant une période.

Partie C : Durée de vie du coupleur CPL - Loi normale

1. D'après la calculatrice, $P(10 \leqslant Y \leqslant 12) \approx 0,341$.
2. La probabilité que le coupleur ait une durée de vie supérieure à 10 ans est $P(Y \geqslant 10) \approx 0,841$.

3. $P_{Y\geqslant 10}(Y\leqslant 12)=\dfrac{P\big((Y\geqslant 10)\cap(Y\leqslant 12)\big)}{P(Y\geqslant 10)}=\dfrac{P(10\leqslant Y\leqslant 12)}{P(Y\geqslant 10)}\approx\dfrac{0,341}{0,841}\approx 0,405.$

EXERCICE 2

Partie A : Test du filtre - Équations différentielles du 1^er^ ordre

1. $L=0,001$ H.

   Soit (E) : $\quad y'(t)+Ry(t)=0 \iff y'(t)+\dfrac{R}{0,001}y(t)=0 \iff y'(t)+1\,000R\cdot y(t)=0.$

   L'ensemble des solutions de (E) est : $y(t)=K\mathrm{e}^{-\frac{1000}{1}Rt}=K\mathrm{e}^{-1000Rt}$, avec $K\in\mathbb{R}$.
2. $y(0)=K\mathrm{e}^{-1000R\times 0}=12$ soit $K=12$.

   L'unique solution vérifiant la condition initiale est $v_s(t)=12\mathrm{e}^{-1000Rt}$.
3. **a.** On a $v_s'(t)=-1\,000Rt\mathrm{e}^{-1000Rt}$; comme $\mathrm{e}^{-1000Rt}>0$ quel que soit t, $v_s'(t)<0$ donc v_s est une fonction strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-1000Rt}=0$ car $-1\,000R<0$.
4. $v_s(t=0,001)=\dfrac{v_e}{100}\iff 12\times\mathrm{e}^{-1000R\times 0,001}=\dfrac{12}{100}\iff \mathrm{e}^{-R}=0,01\iff \ln\left(\mathrm{e}^{-R}\right)=\ln 0,01\iff$ $-R=\ln 0,01\iff R=-\ln 0,01$ donc $R\approx 4,6$ (Ω).

   La valeur de la résistance R doit être égale à $4,6\ \Omega$ à $0,1\ \Omega$ près.

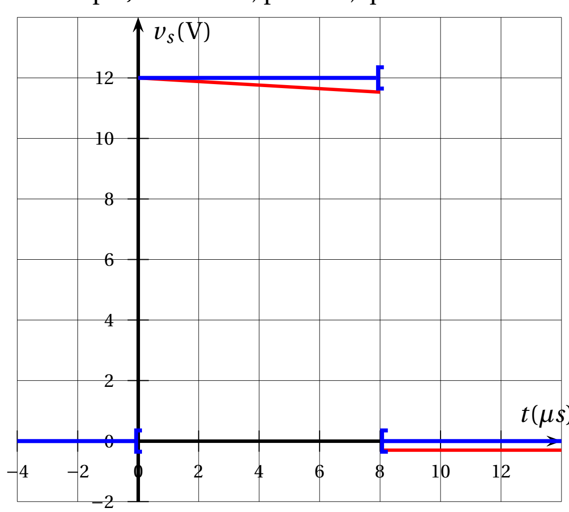
Partie B : Étude du filtre - Transformée de Laplace

1. Erreur de sujet sur cette question, on a reçu une modification de l'E. N. à 16 h 10 !

   Remplacer : $0\leqslant 8.10^{-6}$ et $t>8.10^{-6}$ par $0\leqslant t<8.10^{-6}$ et et $t\geqslant 8.10^{-6}$.

   Soit $v_e(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0\\ 12 & \text{si} \quad 0\leqslant t<8.10^{-6}\\ 0 & \text{si} \quad t\geqslant 8.10^{-6}\end{cases}$.
2. **a.** La transformée de Laplace de $v_e(t)$ vaut $V_E(p)=\dfrac{12}{p}-\dfrac{12}{p}\mathrm{e}^{-8.10^{-6}p}$.

   b. $V_s(p)=H(p)\cdot V_E(p)=\dfrac{p}{p+5\,000}\left(\dfrac{12}{p}-\dfrac{12}{p}\mathrm{e}^{-8.10^{-6}p}\right)=\dfrac{12}{p+5\,000}-\dfrac{12}{p+5\,000}\mathrm{e}^{-8.10^{-6}p}$.
3. L'original de $V_s(p)$ vaut $v_s(t)=12\mathrm{e}^{-5000t}\cdot\mathcal{U}(t)-12\mathrm{e}^{-5000(t-8.10^{-6})}\cdot\mathcal{U}\left(t-8\cdot 10^{-6}\right)$.
4. ANNEXE (à rendre avec la copie) Exercice 2, partie B, question 4.



On constate que la tension de sortie est amortie par rapport à la tension d'entrée.