Brevet de technicien supérieur session 2013
Métropole Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **12 points**

L'objectif de cet exercice est d'utiliser une modélisation du pourcentage de bacheliers en France entre 1951 et 1985 puis d'en bâtir une deuxième sur la période allant de 1985 à 2010.

Partie A : étude d'une fonction logistique.

Considérons la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par la relation : $f(x) = \dfrac{33}{1+1417\mathrm{e}^{-0,11x}}$

On désigne par $\mathbb{C}_f$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé.

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,11x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+1417\mathrm{e}^{-0,11x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 33$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 33$ est asymptote à $\mathbb{C}_f$.
2. **a.** $f'(x) = 33 \times \left(-\dfrac{1417\times(-0,11e^{-0,11x})}{\left(1+1417\mathrm{e}^{-0,11x}\right)^2}\right) = \dfrac{5\,143,71\mathrm{e}^{-0,11x}}{\left(1+1\,417\mathrm{e}^{-0,11x}\right)^2}$

   b. Une exponentielle et un carré étant toujours positifs, on en déduit le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\approx 0,02$	33

Partie B : une fonction rationnelle.

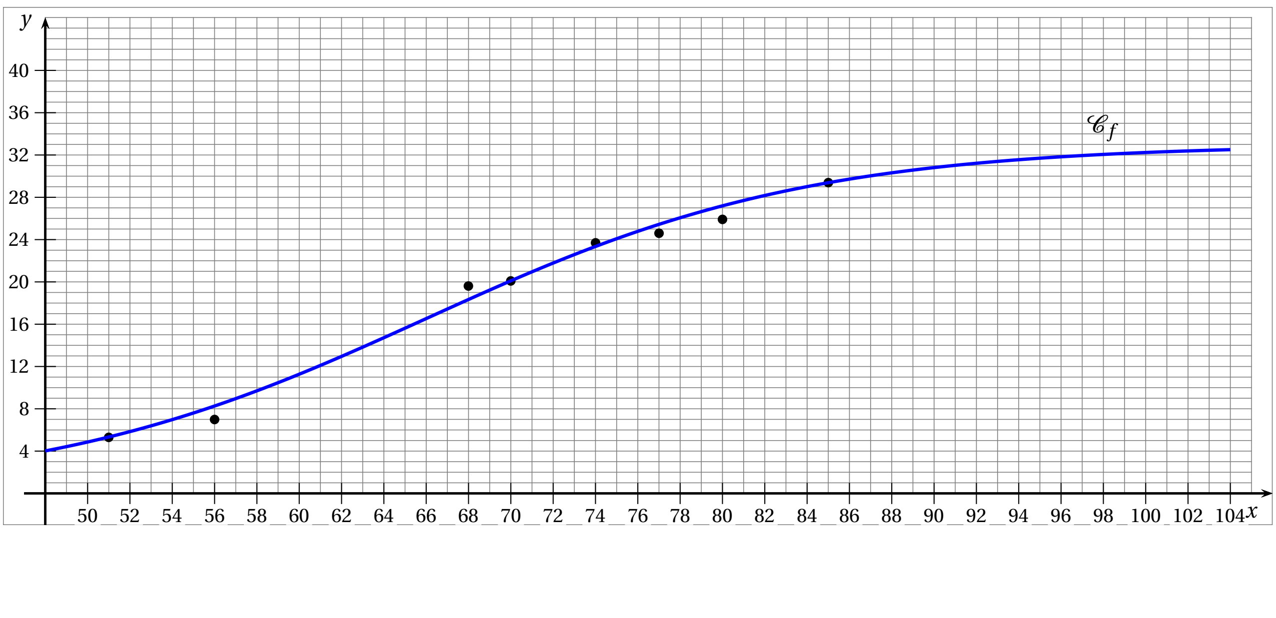
1. Sur $[85\,;\,+\infty[$, $x-70>0$, une primitive de $\dfrac{1}{x-70}$ est donc $\ln(x-70)$, une primitive de g est donc $G(x) = -871\ln(x-70)+87,5x$.
2. $\displaystyle\int_{85}^{110} g(x)\,\mathrm{d}x = G(110)-G(85) = -871\ln(40)+87,5\times110-(-871\ln(15)+87,5\times15) = 871\ln\left(\frac{15}{40}\right)+2\,187,5 = 871\ln\left(\frac{3}{8}\right)+2\,187,5.$
3. $V_m = \dfrac{1}{110-85}\times\displaystyle\int_{85}^{110} g(x)\,\mathrm{d}x \approx 53,3.$

Partie C : modélisation du pourcentage de bacheliers en France entre 1951 et 1985.

1. **a. Tableau de valeurs**

x	48	51	55	60	65	70	75	80	85
$f(x)$	4	5,3	7,6	11,3	15,6	20,1	24,1	27,2	29,4

Nuage de points associé au tableau n° 1 et courbe $\mathbb{C}_f$



b. La fonction f modélise convenablement l'évolution du pourcentage de bacheliers sur la période 1951–1985 car la courbe est « proche » du nuage de points.

2. La proportion maximale de bacheliers en France dans les années suivantes est de 33% (Limite de f).

Partie D : modélisation de la proportion de bacheliers en France de 1985 jusqu'en 2010.

1. Le modèle utilisé dans la partie C n'est pas fiable sur cette période car la proportion de bacheliers dépasse 33 %.

2. a. $g(85) = \dfrac{a}{15} + b$ et $g(110) = \dfrac{a}{40} + b$.

b. $g(85) = 29,4$ donc $\dfrac{a}{15} + b = 39,4$, $g(110) = 67,5$ donc $\dfrac{a}{40} + b = 67,5$, en multipliant la première équation par 15 et la seconde par 40, on obtient le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcr} a + 15b & = & 441 \\ a + 40b & = & 2628 \end{array}\right.$

c. Il suffit de soustraire les deux équations, on trouve alors $b = 87,48$, puis en remplaçant b par sa valeur dans une des deux équations, on trouve $a = -871,2$.

3. a. Une prévision du pourcentage maximal de bacheliers en France par classe d'âge les années suivantes est de 87,5 % (limite de g).

b. Le pourcentage moyen de bacheliers en france par classe d'âge entre 1985 et 2010 est de 53,3 %.

Exercice n° 2 **(8 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Q.C.M.

1. a. Réponse 1

b. Réponse 1

2. Réponse 1

3. Réponse 3

Partie B

1. Il y a répétition de la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,38)$

2. Dix Allemands se retrouvent un soir dans une brasserie parisienne.

a. La probabilité que neuf d'entre eux soient présents en France pour des raisons touristiques ou personnelles est $P(X = 1) = 10 \times 0,38 \times 0,62^9 \approx 0,0514$.

b. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,62^{10} \approx 0,9916$. Il y a 99,16 % de chance d'avoir au moins un Allemand venu pour raison professionnelle dans un groupe de 10 Allemands.

3. On peut ici, soit utiliser le changement de variable $T = \dfrac{x - 2000}{550}$, T suit alors la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et utiliser la table, soit utiliser une calculatrice.

a. $P(Y \leqslant 3200) \approx P(T \leqslant 2,18) \approx 0,9854$ la probabilité qu'un Allemand parcourt en France une distance inférieure ou égale à 3 200 km vaut 0,985 4.

b. $P(1300 \leqslant Y \leqslant 2700) \approx P(-1,27 \leqslant T \leqslant 1,27) = 2\pi(1,27) - 1 \approx 0,796$.