"Faire des mathématiques dans un environnement qui tend à rejeter toute recherche de vérité scientifique"

Ou

"Quels apports à la ***recherche de la vérité*** *peut-on attendre aujourd'hui des mathématiques enseignées à l'école, qui permettraient aux futurs citoyens qui le désirent de pratiquer un humanisme non factice tout en restant en phase avec leur époque ?"*

(Je suis en train d'écrire un texte proposant "un changement de regard sur le savoir" qui explicitera mieux - je l'espère - les idées seulement suggérées ici.)

Marc Legrand

IREM de Grenoble

La problématique lancée il y a plus d'un an à l'ADIREM :

"aller à la recherche de l'essentiel dans l'enseignement des sciences et en particulier des mathématiques"

m'a conduit tout naturellement à m'interroger sur le rapport à la vérité que nos enseignements scientifiques suggèrent, induisent, produisent !!!

Trois types de rapport à la vérité

I) *Les vérités* ***héritées/imposées*** *(famille, société, une certaine école)*

II) *Les vérités* ***empiriquement construites***

III) L'apport des savoirs *(dont on hérite) dans les* ***vérités que l'on construit .***

La thèse (recherche de "vérité" didactique) que je soutiens ici, est que:

Les mathématiques se préoccupent des vérités universelles *(tout le monde en convient),*
mais
- pour qu'elles ne restent pas de niveau I (vérités d'autorité)
- et aident à remettre en cause (quand il le faut) le niveau II (vérités du "bon sens" empirique),
il faut que le cours de mathématiques
- ne soit pas principalement le lieu où l'on énonce *des vérités universelles (théorèmes, règles, algorithmes, formules,…)*
- mais soit essentiellement *un lieu où l'on apprend à* ***construire*** *des vérités universelles* ***(****formulation / résolution de* ***conjectures****)*
en utilisant pour cela le mode de recherche de vérité du mathématicien :

présenter les choses de telle façon que si c'est faux … ça se voit !!!!

Trois exemples révélateurs de l'impasse dans laquelle se trouve l'enseignement actuel des mathématiques pour transmettre un rapport à la vérité digne de la science:

I) L'aire du parallélogramme en première année d'université
(permet d'illustrer la différence entre
"savoir externe" et "savoir interne")

II) L'âge du capitaine en CE1-CE2

(révèle les effets pervers d'un contrat didactique que le professeur ne maîtrise pas!)

III) Les mises en équation différentialo-intégrale et les cercles vicieux avec les moniteurs du CIES en thèse de math ou de physique.

(montrent les effets dévastateurs d'un monstratif dominant qui, lorsqu'il est l'unique mode d'enseignement,cache totalement paradoxes et contradictions qui sont l'essence même de la science)

Deux regards sur le Savoir

On peut envisager le savoir **essentiellement** comme :

- externe aux personnes,

c'est alors **ce qu'on enseigne,**
ce qui est… **indiscutablement vrai,**
ce… qu'il faut savoir !

ou au contraire comme

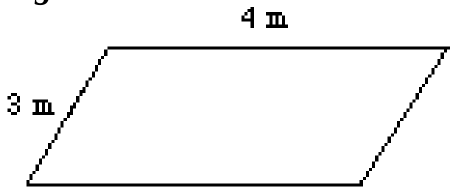
- interne à celui qui con-naît,

c'est alors un outil de **transformation** de la **personne** par la **réflexion**.

<u>Savoir externe - savoir interne</u>

A la question (impertinente à ce niveau) :

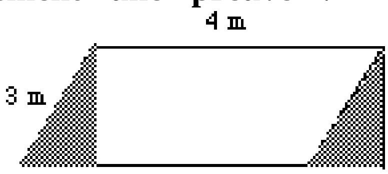
Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3 m et 4 m ?



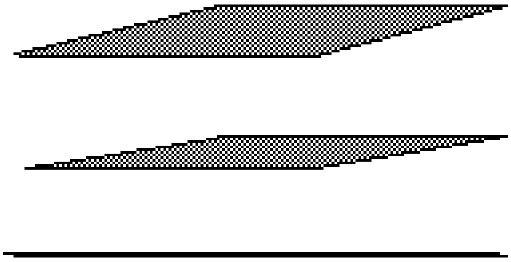
plus de 50% des étudiants de première année d'université **répondent :**

$$\mathbf{A = 12\ m^2\ \ !!!}$$

Certains donnent **"spontanément" une "preuve"** :



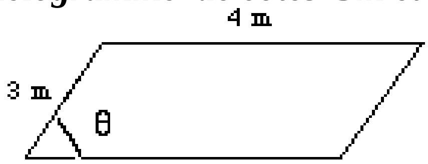
Rarissimes sont ceux qui mettent en évidence
la variable "aplatissement" !



Pourquoi ?

Si par contre on pose la ("même") question :

Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3m et 4m ?



la réponse majoritaire devient :

$$\mathbf{A = 12.sin(\theta).}$$

Formule exacte qui "dit presque tout" !

Constat

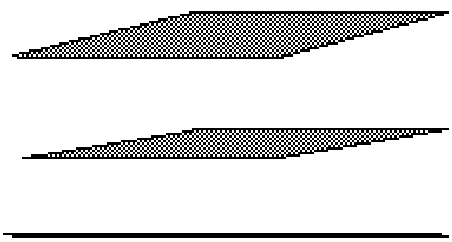
La formule exacte est ***"connue de tous",***

mais ce n'est qu'un savoir externe puisque *dans l'action,* ***elle ne dit rien sur le réel*** *dont on parle,* ***elle ne donne aucune sagesse*** *face au mauvais réflexe* ***aire = longueur x largeur ;***

c'est un savoir non intériorisé !

Le Savoir interne ici, ce serait :

A défaut de connaître l'inclinaison



tout est possible entre 0 et 12 m² !!!

***<u>Le pari et le contrat didactique</u>* :**

deux éléments incontournables ***pour mettre en acte ce changement de regard sur le savoir.***

Vouloir dépasser **une pratique assez impersonnelle** de l'enseignement où le savoir est **essentiellement vu comme**

<u>externe</u> au sujet élève

(le savoir, c'est ce qu'on doit savoir !)

pour entrer dans le désir

du partage d'un savoir

que ***l'élève <u>intériorisera</u>***

(le savoir est alors vu comme un outil de transformation de la personne par la réflexion !),

c'est accepter de bousculer énormément

habitudes et préjugés !

Dans une démocratie qui se veut humaniste, <u>l'intériorisation du savoir</u> est une pratique *que l'on tient pour* ***<u>nécessaire à tous</u>,***

car seuls les savoirs intériorisés *donnent le recul nécessaire pour* ***penser par soi-même*** *les problèmes importants* ***!***

Mais …

cette pratique qui apprend à chacun à démasquer **préjugés et croyances irraisonnées**

(d'où vient ce que je pense être vrai ?)

- *ne s'enseigne pas* ***"directement"!***

- est très délicate à évaluer !

- va "contre" la culture courante !

Tous nos élèves et nos étudiants souhaitent réussir,

combien peuvent et désirent con-naître ?

L'âge du capitaine révèle la nature du contrat didactique dominant

<u>Le contrat didactique</u>, c’est le lien institutionnel, l'entente tacite entre des personnes qui se placent en position de maître et d’élèves. Ce contrat révèle le type de coopération de ces acteurs autour de l’apprentissage d’un savoir.

<u>La nature de ce contrat</u> rend maître et élèves complices

- soit pour rester à la surface des choses
- soit au contraire pour accepter l’alchimie complexe de l’intériorisation des savoirs.

<u>Le pari didactique</u>, c'est que
par un changement de contrat
- beaucoup de nos élèves peuvent désirer con-naître
et que…
- beaucoup peuvent y parvenir!

Le ***didactique - La didactique***

Il y a **du didactique** lorsque, face à un savoir, un contrat *(le plus souvent implicite)*

- le contrat didactique -

place des personnes dans les **positions dissymétriques** de **maître** et d'**élève**.

Ce contrat

- traduit une double obligation :

"enseigner ceci … à … ,

apprendre cela … avec …",

- révèle des rôles :

ceux que maître et élève(s) s'attribuent pour tenir compte

du ***nécessaire décalage*** *entre*

**** celui qui "sait"*** *(autrement)*

et

**** celui qui "ignore"***

(ou ne sait pas ***de la même façon !)***

La didactique

C'est le pari de la rationalité :

pour tenter de ***mieux comprendre et maîtriser le réel*** *(le didactique),*

on le "met à distance"

en construisant ***théories*** *et* ***modèles.***

Cet effort théorique a pour effet de ***replacer au centre***

la question fondamentale du sens!

Par ex. **postuler** un **contrat** didactique introduit la question des **effets de contrat** :

le contrat didactique modifie-t-il la signification du savoir

pour l'élève?

pour le professeur ?

et comment ?

Effets de contrat

Dès qu'un contrat lie professeur et élèves face à un savoir,

de par ce contrat :

- le professeur "mène le jeu",

il "doit" être "le maître"!

- l'élève "entre dans le jeu du professeur"
il s'assujettit à sa pensée,

il "doit" être "sujet"
(de ce maître).

Quel maître, quels sujets?

Quel jeu véritable l'élève joue-t-il ?

Quels rôles le professeur et les élèves donnent-ils au savoir :

savoir interne / externe ?

<u>L'âge du capitaine</u>

Au problème suivant :

"Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine?"

sur 97 élèves de CE1 et CE2,
<u>76</u> **<u>donnent une réponse</u>** en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé :

26 moutons → 26 ans

ou

26 + 10 → 36 !!!

A la question subsidiaire :

"Que penses-tu de ce problème?"

<u>Peter</u> qui avait répondu :

"le capitaine a 26 ans",

ajoute :

"je trouve que c'est bien, mais je ne vois pas quel rapport entre des moutons et un capitaine!"

A la nouvelle question :

"Tu as 10 crayons dans chaque poche; quel âge as-tu ?"

- Paul répond : ***"20 ans !"***

- oh! Paul, tu sais bien que tu n'as pas 20 ans !

- " ***c'est ta faute,***
tu ne m'as pas donné
les bons nombres !"

Suivant les **contrats didactiques** que nous leur proposons, nos élèves attribuent

tel ou tel **rôle**

au savoir, au professeur, à eux-mêmes

- nous sommes alors des ***maîtres***
d'une sorte ou d'une autre,

*- ils deviennent des "****sujets****"*
d'un type ou d'un autre,

- leurs ***connaissances*** *sont*
d'une nature ou d'une autre !

L'infinitésimal réduit au néant par simplifications abusives

Le Paradoxe de l'explication

***Pour expliquer le difficile**, le complexe, ce qui va contre habitudes et préjugés,*

on cherche à aider notre interlocuteur,
on tend donc naturellement à ***simplifier,***
i.e. à présenter un savoir :

- clair, non ambigu, ordonné, complet

- dépoussiéré de doutes, de contradictions, de points de vue divergents, etc.

Mais alors …

pour faire comprendre tout et tout de suite

- ne répondons-nous pas aux questions que l'élève ne peut poser ?

- ne lui interdisons-nous pas d'entrer dans un vrai questionnement scientifique?

(C'est tellement clair qu'on ne peut plus voir où il y a problème!)
Finalement ne tendons-nous pas à lui fermer définitivement la porte d'accès
au sens du savoir scientifique?

Après avoir proposé de débattre sur une procédure de mise en équation différentialo-intégrale classique qui est le plus souvent plébiscitée par presque tous (étudiants de tous niveaux et professeurs de math et de physique) car elle est simple (simpliste) et fournit des résultats exacts quand les conditions sont favorables (mais c'est une chance puisqu'on ignore ces conditions) et produit "n'importe quoi" quand c'est plus complexe (ce que la démarche scientifique devrait nous aider à prévoir), je propose à mes interlocuteurs la synthèse suivante :

Institutionnalisation autour des procédures infinitésimales

Il y a **nécessité** d'une procédure infinitésimale

- quand le but est le calcul d'un résultat global R (longueur, aire, volume, masse, etc) attaché à **la mesure d'un objet complexe Ω**

- et quand **l'obstacle** rencontré pour effectuer ce calcul tient à la présence d'un paramètre **variable sur Ω qui rend impossible tout calcul linéaire du type:**

$$\mathbf{S = a * b} \text{ ou } \mathbf{V = S * H} \text{ ou } \mathbf{m = \sigma * V}$$

…

La philosophie d'une procédure infinitésimale est alors :

Découper *Ω en "tranches Ωi* ***assez fines"*** *pour que sur chaque tranche* ***le paramètre "gênant"***

"ne varie quasiment plus"!

Car si sur chaque tranche Ω_i on parvient ainsi à mieux calculer ***le résultat partiel Ri*** *,* ***le résultat global R*** *s'obtiendra par le calcul*

$$R = \sum Ri$$

Dans l'enseignement la pratique quasi universelle est approximativement la suivante :

Pour calculer le résultat R = ∑ ΔR ,

- on **choisit** un paramétrage **x** , puis on prend un élément **dΩ ou ΔΩ "infiniment petit"** autour de la position définie par x et on appelle **dR** ou **ΔR** la mesure du résultat correspondant.

Cette pratique devrait normalement donner lieu à des ***discussions sur le sens que l'on attribue à dx , dΩ et dR*** *, puisque*

épaisseur infiniment petite = mesure nulle !!!

Mais le contrat didactique tacite est ainsi fait qu'on constate que ces discussions n'ont pratiquement jamais lieu.

- on calcule alors la contribution infinitésimale correspondante dR en utilisant le formalisme :

dR = f(x)dx,

où f(x) est ce qu'on "arrive à calculer",

- On marque enfin son intention de calculer la somme des contributions infinitésimales en faisant "glisser" le ∑ **dR** en ∫ **f(x).dx** .

(Dans l'accomplissement de ce rite, le glissement symbolique du signe ∑ au signe ∫ a le pouvoir magique de résorber tous les conflits sémantiques.)

- **Pour achever ce "rite intégrale"** on cherche une **primitive F de f** et l'on affirme **sans laisser apparaître le moindre doute** que **R = F(b) - F(a)**

même si cela tend à montrer que 1 = 0 !!!

Ce rite infinitésimal repose sur la coutume didactique d'évitement des paradoxes !

Or des paradoxes, il y en a !!!

1^er^ Paradoxe:

- Si découpage infini $\Rightarrow$ $R_i = 0$!

et quel **sens** donner **à** $\sum_\infty 0_i$ **???**

- Si découpage fini $\Rightarrow$ épaisseur $\neq 0$

$\Rightarrow$ le paramètre continue **à varier** sur la tranche **donc** ***(sauf** *cas trivial où cette* ***procédure est inutile !!!!)***

le calcul local exact échoue !!!

Méthode scientifique

Partant d'un découpage en n tranches :

* ***Substituer au réel*** R_i ***(incalculable)***

le résultat R_{Mi} ***d'un modèle***

(choisi pour tenir compte de l'essentiel et pour que les calculs se fassent),

* ***Calculer le résultat global dans le modèle***

par la formule $R_M = \sum R_{Mi}$

qui devient dans les cas favorables $R_M = \int dR_M$

* ***S'interroger sur la fidélité de ce calcul!***

Pour contrôler la fidélité du calcul dans le modèle apparaît un 2nd **Paradoxe:**

si la procédure est utile,
sur chaque tranche se crée
un écart ε_i entre réel et modèle.

Pour diminuer l'erreur ε_i on augmente le nombre n de tranches .

Quand n→ ∞ :

- on est certain que chaque $\varepsilon_i \to 0$

- mais quid de la somme: $\sum_n \varepsilon_i \to$???

Observation en "or" !

- $\sum_n 1/\sqrt{n} = \sqrt{n} \to \infty$ si $n \to \infty$.
- $\sum_n 1/n = 1$ et 1 est incompressible même si $n \to \infty$.
- $\sum_n 1/n.\sqrt{n} = 1/\sqrt{n} \to 0$ si $n \to \infty$.

En conclusion

Si par des découpages ad hoc on fait apparaître de "**bons**" modèles locaux i.e.

- dans chaque modèle local **on peut aisément calculer le résultat R_{Mi}**

et

- **on contrôle"bien"les écarts** de modélisation, i.e. **sans avoir à faire le calcul exact des écarts** $\varepsilon_i = | Ri - R_{Mi} |$ pour les tranches Ωi ou $\varepsilon_{(\Delta x)}$ pour les tranches $\Delta\Omega$ d'épaisseur Δx

on arrive néanmoins à prouver qu'il sont du second ordre

On peut alors garantir que le modèle global

$R_n = \sum_{i=1,2,\ldots n} R_{Mi}$ est de plus en plus fidèle à la réalité quand n augmente.

La théorie de l'intégration qui prend en charge le passage de $\sum$ à $\int$, permet alors d'écrire en toute rigueur

$$R = \lim_n R_{M(n)} = \int dR_M$$

Et si pas de contrôle des écarts, la procédure infinitésimale est une mystification scientifique !!!

***En pratique, le "génie"de la mise en équation consiste** à se ramener à une procédure différentialo-intégrale à une variable réelle :*

- on essaye de "balayer" l'objet Ω en faisant varier un paramètre réel x entre deux valeurs x_0 et x_1 ,
- on cherche à exprimer le résultat ΔR correspondant à une variation du paramètre x sur $[x , x + \Delta x]$ sous la forme: $\mathbf{\Delta R = f(x)\, \Delta x + r(\Delta x)}$

où **r(Δx) est la partie du résultat** qu'on ne sait pas calculer exactement et qui correspond normalement à un "très petit morceau",

- si on arrive à montrer que ce reste $r(\Delta x)$ est du second ordre, i.e. infiniment petit devant Δx , alors on a prouvé que le résultat partiel $R(x)$ sur $[x_0, x]$ est différentiable de dérivée $f(x)$.

Le résultat global R n'est alors autre que la variation d'une primitive de f entre x_0 et x_1 , d'où la formule non miraculeuse

$$R = \int f(x)\, dx$$

- Et si on n'arrive pas à montrer que ce reste $r(\Delta x)$ est du second ordre, i.e. infiniment petit devant Δx ,

alors la procédure ne vaut rien puisqu'elle permet d'obtenir n'importe quoi !

Ces exemples montrent qu'à tous les niveaux, le rapport à la vérité qu'induit l'école est beaucoup plus institutionnel et conformiste ("c'est vrai parce que le professeur le dit, parce que c'est écrit dans un livre, parce que l'énoncé l'induit, parce que tout le monde fait ça!") que scientifique ("c'est vrai parce que j'ai pris mes précautions pour que ce ne soit pas trivialement faux, j'ai essayé d'envisager les coups les plus tordus, c'est vrai parce que ça repose rationnellement sur des bases très solides!")

Pour induire un autre rapport à la vérité, il me paraît donc indispensable d'effectuer trois changements :

I) un changement de regard sur le savoir :

savoir externe → savoir interne

II) un changement de pari sur nos élèves

"Nos élèves ne sont pas des c… qui ne peuvent s'intéresser à la "vraie" science !"

Faisons le pari : "ils sont intelligents et capables de créativité scientifique, ils peuvent se passionner pour l'abstraction dès qu'ils en sont co-auteurs!"

Faire le pari d'une possible confraternité scientifique.

***III) Changement de contrat didactique* : au lieu de "tout montrer", ouvrir une forme de "débat scientifique" qui tend à faire dévolution à l'élève d'une part de responsabilité sur la vérité et la pertinence scientifique de ce qui se discute en classe.**

L'enseignement des mathématiques doit permettre l'éducation d'un certain rapport à la vérité *(toutes les disciplines ont cette mission, c'est vrai, mais les mathématiques y ont un rôle très spécifique et de mon point de vue irremplaçable).*

En faisant des conjectures en cours de mathématiques et en apprenant à les résoudre collectivement, l'élève peut découvrir comment se convaincre de la validité et de la vérité de certaines assertions :

"Jusqu'à quel point peut-on être têtu devant l'affirmation d'un autre ?

Comment se rendre à une raison, à une démonstration qu'on vous donne, sans perdre la face ?

Comment se séparer, dans l'établissement de la vérité, de ce qui est de l'amour-propre, de ce qui est bâti pour la défense du sujet ou d'un petit groupe?

C'est-à-dire comment constituer cet instrument fondamental de rapport avec autrui, avec d'autres qui ont besoin de pouvoir compter chez vous sur une sorte de sincérité, d'honnêteté, intellectuelle, et sur lesquels vous devez vous appuyer dans vos rapports avec les autres pour la même raison ?

"Comment établit-on la vérité?" c'est ce qui me paraît être dans les mathématiques le modèle d'un rapport citoyen :

- dans toutes les organisations de la société, qu'elles soient savantes ou non, on constate qu'il y a une pratique sociale de la vérité qui est inverse!

- où que nous soyons, nous subissons des pressions terribles qui nous poussent à des <u>attitudes téléologiques</u>, c'est-à-dire à faire dépendre la vérité de ce que vous dites, des objectifs que vous avez, des intentions que vous avez, de ce que vous voulez montrer, et ce avant même de considérer la démonstration.

Et ça c'est vraiment quelque chose contre lequel les mathématiques nous donnent des armes et c'est important d'en doter nos élèves car c'est vraiment la défiguration de la connaissance et du savoir que d'asservir la connaissance à un objectif qui est tout à fait extérieur à elle ! ***(citations pour partie de Guy Brousseau lors du séminaire ADIREM de mars 2004)***

En faisant agir l'élève/étudiant en <u>auteur de conjectures et de preuves</u>, on lui permet de découvrir peu à peu qu'un autre rapport à la vérité que celui qui lui est quotidiennement proposé dans la vie ordinaire est possible, passionnant et socialement tenable.

Chaque métier a sa déontologie qui concrétise une éthique universelle, la première règle de notre déontologie doit être, à mon sens, de ne "rien lâcher" dans la transmission de cet autre rapport à la vérité.

Ce moyen d'être plus authentique, nous en avons tous un besoin impérieux pour vivre dans un certain bonheur, pour pouvoir faire confiance aux autres, pour pouvoir faire confiance à nous-même, pour pouvoir aimer et être aimé …véritablement !