CHAPITRE 7 LE MAGICIEN QUI TRANSFORME LES PRODUITS EN SOMMES

Problème N°1 Le message du Baron de Merchiston dit Neper

Très chers amateurs passionnés de mathématiques.

Étant donné que rien n'est aussi désagréable à la pratique mathématique (en freinant et retardant les spécialistes du calcul) que les multiplications, les divisions et les extractions de racines carrées ou cubiques de grands nombres qui, en plus de l'ennui dû à leur longueur, induisent nombre d'erreurs dangereuses, j'ai entrepris de rechercher par quels moyens sûrs et commodes je pourrais me débarasser de ces difficultés dont je viens de parler. J'en ai ensuite dans ce but, examiné attentivement de nombreux et j'ai fini par trouver quelques raccourcis remarquables qu'il faudra peut-être traiter ailleurs.

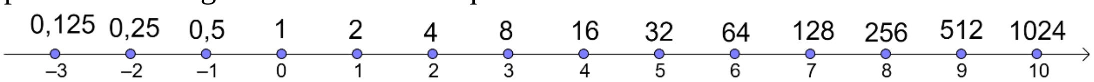
À la vérité, aucun n'est plus utile que celui-ci, qui consiste à rejeter du travail les nombres utilisés eux-mêmes et les multiplications, les divisions et les extractions de racines longues et difficiles, et à substituer à leur place des nombres qui se chargent de ces calculs par l'intermédiaire des seules additions, soustractions et divisions par 2 ou 3.

Ce procédé, bien qu'il soit un secret, sera d'autant meilleur qu'il sera porté à la connaissance d'un plus large public (et c'est le cas pour tout ce qui est bon). J'ai donc trouvé bon de le divulguer pour l'usage commun des mathématiciens. Voilà pourquoi servez-vous en à votre aise, amateurs de connaissances, et cette méthode qui vient de moi, recevez-là avec le même esprit d'obligeance. Portez-vous bien.

(D'après une traduction d'Yves Tréguer de la préface de *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio*, citée dans *Faire des Mathématiques d'après leur histoire* tome 3, IREM de Rennes.)

Ce chapitre va démontrer qu'il est possible de transformer les produits en sommes, les divisions en soustractions et les racines $n^{\text{ième}}$ en divisions par n, et d'en montrer l'intérêt.

La substitution des nombres dont il est question se voit mieux en regardant un axe gradué selon une suite géométrique comme ci-dessous où on a écrit 2^n en face de n placé dans une graduation arithmétique.



On note L la fonction qui à chaque nombre de la graduation géométrique associe le nombre de la graduation arithmétique. Par exemple, $L(4) = 2$ et $L(8) = 3$.

a) Que vaut L(32) ? Est-ce que $L(4 \times 8) = L(4) + L(8)$? Trouve d'autres exemples.

b) Que vaut $L(512) – L(32)$? et $L(512/32)$? Trouve d'autres exemples.

c) Que vaut $L(64) : 2$? et $L\left(\sqrt{64}\right)$? Trouve d'autres exemples.

d) Supposons que a et b soient deux nombres réels strictement positifs de la graduation géométrique, démontre que $L(ab) = L(a) + L(b)$.

Problème N°2 Les sous-graduations logarithmiques

On peut prolonger la fonction L pour les nombres négatifs en observant que $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ et on a vu dans le chapitre précédent que l'on pouvait réaliser des subdivisions aussi fines que souhaitées de la graduation et même définir 2^x pour tout nombre réel x.

Pour tout réel $y > 0$, il existe un réel x tel que $y = 2^x$, on définit L par $L(y) = L(2^x) = x$.

Supposons que a et b soient deux nombres réels strictement positifs d'une même graduation géométrique de raison $q = 2^r$, il existe deux nombres entiers n et p tels que $a = q^n$ et $b = q^p$.

Démontre que $L(ab) = L(a) + L(b)$. *Il y a des indications page 88 si tu n'y arrives pas seul.*

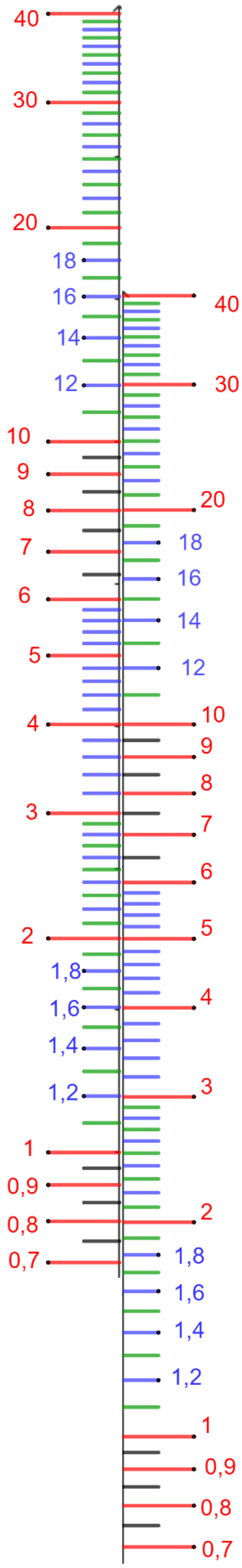
La fonction L est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 2^x$.

L est appelée la fonction logarithme de base 2 et est notée $\log_2$.

Pour tout réel $q > 0$ et $q \neq 1$, on peut définir définir $\log_q$ tel que $\log_q(q^x) = x$ comme précédemment.

Problème N°3 La règle à calcul

Si on veut graduer un axe de sorte qu'une translation de 1 dm corresponde à une multiplication par 10, la position d'un nombre par rapport à 1 est alors déterminée en dm par la fonction logarithme décimal notée $\log_{10}$ ou simplement log. C'est ainsi que tu peux réaliser les règles présentées ci-contre où on a repéré les nombres de 0,7 à 40 en plaçant les entiers de 1 à 10 (en rouge) et des subdivisions de 0,1 en 0,1(en vert ou bleu) puis de 0,2 en 0,2 (en bleu) puis de 0,5 en 0,5 (en noir). Cette graduation est ensuite reproduite avec des nombres 10 fois plus grands ou 10 fois plus petits.



La fonction log définie de]0 ; + ∞[sur]– ∞ ; + ∞[vérifie la propriété :
Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\log(a\,b) = \log(a) + \log(b)$.
Transformer ainsi les produits en sommes permet d'effectuer les multiplications en déplaçant une règle devant l'autre.
Par exemple, pour multiplier 2,5 par 3,2 on observe que 2,5 est à environ 0,4 dm de 1, et 3,2 à 0,5 dm de 1. Si on additionne ces deux distances, soit environ : 0,4 + 0,5 = 0,9, le nombre situé à cette distance de 1 est 8, soit environ $10^{0,9}$ et de façon exacte $8 = 10^{\log(2,5) + \log(3,2)} = 10^{\log(2,5 \times 3,2)} = 10^{\log(8)}$.
Ces calculs peuvent paraître approximatifs, mais en positionnant la règle de gauche de sorte que le 1 de gauche soit en face de 2,5 à droite, puis en regardant 3,2 sur la règle de gauche on trouve 8 en face sur la règle de droite et on observe que tous les nombres à droite sont les produits de ceux situés en face à gauche par 2,5.
On peut de la même façon multiplier par n'importe quel nombre.
Le défaut de la règle à calcul c'est le manque de précision, mais son avantage, c'est la simplicité. Ceci était très utile lorsqu'il n'y avait pas de calculatrices électroniques.

1) D'après la figure ci-contre, que valent :
a) 2,5 × 2 ? **b)** 2,5 × 4 ? **c)** 2,5 × 3 ? **d)** 2,5 × 7 ? **e)** 2,5 × 8 ?

2) En divisant tes résultats précédents par 2,5, tu retrouves respectivement 2 ; 4 ; 3 ; 7 ; 8. Il suffit de prendre un nombre de la règle de droite pour lire en face sur la règle de gauche le résultat de la division par 2,5.
D'après la figure ci-contre, que valent :
a) 4 : 2,5 ? **b)** 6 : 2,5 ? **c)** 9,5 : 2,5 ? **d)** 15 : 2,5 ? **e)** 35 : 2,5 ?

Les nombres choisis dans cet exercice permettent des lectures assez faciles, mais une multiplication ou une division par 1,7 par exemple, serait plus délicate. Avec une graduation assez fine et un bon entraînement, la précision pouvait rester de l'ordre de 1 %. Tu peux réaliser toi-même ces réglettes en utilisant ta calculatrice. Ou bien simplement photocopier cette figure et découper les deux réglettes. Comme les graduations se répètent à chaque multiplication par 10, il est aussi possible de réaliser une règle à calcul circulaire de sorte qu'un tour correspond à une multiplication par 10.

3)
Pour multiplier par 45, on utilise l'astuce suivante : multiplier par 45 revient à multiplier par 4,5 puis multiplier le résultat par 10. De façon générale, la règle à calcul donne les chiffres significatifs et il reste à calculer l'ordre de grandeur c'est-à-dire un nombre a compris dans [1 ; 10[et la puissance n tel que $a \times 10^{n}$ soit une bonne approximation du nombre cherché.
Donne un ordre de grandeurs des produits suivants par calcul mental :
a) 53 × 19 **b)** 0,37 × 102 **c)** 784 × 6 322 **d)** $2,1 \times 10^5 \times 8,12 \times 10^9$ **e)** π/8

Définition et propriété admise

Pour chaque nombre réel q strictement positif et distinct de 1, la fonction exponentielle de base q qui à tout nombre réel x associe le nombre réel strictement positif q^x est continue et est une bijection de $]-\infty\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque appelée **logarithme de base q** et notée $\mathbf{log_q}$ définie et continue de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

Pour tous les nombres réels a et b strictement positifs, $\log_q(a\,b) = \log_q(a) + \log_q(b)$.

La propriété ci-dessus est une propriété caractéristique des fonctions logarithmes.

De plus $\mathbf{\log_q(1) = 0}$, $\mathbf{\log_q(q) = 1}$ et pour tout nombre réel x, $\mathbf{\log_q(q^x) = x}$ par définition.

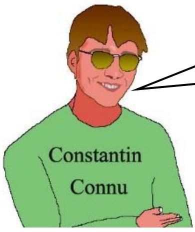
Problème N°4 Transformer les divisions en soustractions

Soit f une fonction définie de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$ qui transforme les produits en sommes, démontre qu'elle transforme les quotients en différences.

Autrement dit, démontre que :

Si pour tous les nombres réels a et b strictement positifs, on a $f(a\,b) = f(a) + f(b)$,

alors pour tous les nombres réels c et d strictement positifs, on a $f(c/d) = f(c) - f(d)$



Il suffit d'appliquer la première formule à des nombres bien choisis avec c et d.

On peut transformer une soustraction en addition équivalente et vice versa.

Problème N°5 Transformer les exposants en coefficients multiplicateurs

1) Soit f une fonction définie de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$ qui transforme les produits en sommes, démontre qu'elle transforme le carré en un double, et le cube en triple et plus généralement la puissance $n^{\text{ième}}$ en un produit par n, la racine $n^{\text{ième}}$ en division par n.

Autrement dit, démontre que :

Si pour tous les nombres réels a et b strictement positifs, on a $f(a\,b) = f(a) + f(b)$,

alors pour tout nombre réel x strictement positif et pour tout entier naturel n, on a :

a) $f(x^2) = 2\,f(x)$ **b)** $f(x^3) = 3\,f(x)$ **c)** $f(x^n) = n\,f(x)$ **d)** $f(x^{-n}) = -n\,f(x)$

e) pour tout nombre rationnel r on a : $f(x^r) = r\,f(x)$ et en particulier $f\left(\sqrt[n]{x}\right) = f(x)/n$.

Si une propriété est vraie pour un entier m et si chaque fois qu'elle est vraie pour un entier k alors elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$, on peut en déduire qu'elle est vraie pour tous les entiers à partir de m.

2) Supposons que la fonction f soit la fonction logarithme de base q, $\log_q$, où q est un nombre réel strictement positif et distinct de 1.

Pour tout nombre réel x strictement positif, il existe un nombre réel $s = \log_q(x)$ et comme $\log_q$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base q alors $q^s = x$ ainsi $\log_q(q^s) = s$.

En déduire que pour tout nombre réel t, on a : $\log_q(x^t) = t\log_q(x)$.

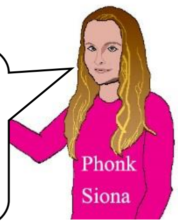
Problème N°6 La voiture de Barnabé

Barnabé a placé un capital de 8 000 € à 4 % d'intérêts composés par an.

S'il retire son capital en cours d'année le taux mensuel moyen est appliqué. Il prévoit de le retirer pour acheter une voiture lorsque ce capital aura atteint au moins 10 000 €.

Dans combien de temps (années et mois) cela se produira-t-il ?

$a^x \geq k > 0$ équivaut à $\log(a^x) \geq \log(k)$ car log est définie et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.



Les problèmes 1 et 2 sont corrigés page 90.

PROBLEME 2 Les sous-graduations logarithmiques   *Indications*

On sait que $a = q^n$ et que $q = 2^r$ donc $a = (2^r)^n = 2^{rn}$ et $L(a) = L(2^{rn}) = r\,n$.
Par ailleurs, $a\,b = q^n\,q^p = q^{n+p}$.

PROBLEME 3 La règle à calcul   *Indications*

3) L'ordre de grandeur de 53×19 est celui de 50×20, c'est-à-dire $1\,000 = 10^3$.
En fait, $53 \times 19 = 1\,007 = 1{,}007 \times 10^3$. Tu peux ainsi facilement vérifier les ordres de grandeurs que tu as trouvé et t'entraîner à ce calcul avec d'autres opérations.

PROBLEME 4 Transformer les divisions en soustractions   *Indications*

Si pour tous les nombres réels a et b strictement positifs, on a $f(a\,b) = f(a) + f(b)$,
alors pour tous les nombres réels c et d strictement positifs, c/d et d sont strictement positifs donc on a : $f(c/d) + f(d) = f(c)$ donc …

PROBLEME 5 Transformer les exposants en coefficients multiplicateurs *Indications*

Si pour tous les nombres réels a et b strictement positifs, on a $f(a\,b) = f(a) + f(b)$,
alors pour tout nombre réel x strictement positif et pour tout entier naturel n, on a :
1) a) $f(x^2) = f(x\,x) = f(x) + f(x)$…   **b)** $f(x^3) = f(x^2\,x)$…

c) $f(x^0) = f(1)$, or $f(1\,b) = f(1) + f(b)$ donc $f(1) = 0$ ainsi $f(x^0) = 0\,f(x)$.
La propriété est vraie pour 0.
Démontrons que si elle est vraie pour l'entier naturel k alors elle est vraie pour le suivant $k + 1$:

Nous supposons que $f(x^k) = k\,f(x)$ alors
$f(x^{k+1}) = f(x^k\,x) = f(x^k) + f(x) = k\,f(x) + f(x) = (k + 1)\,f(x)$.
Ainsi la propriété est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie pour un entier k alors elle est vraie pour le suivant donc la propriété $f(x^n) = n\,f(x)$ est vraie pour tout entier naturel n.
d) Pour démontrer que pour tout entier naturel n, $f(x^{-n}) = -\,n\,f(x)$, on peut faire le même type de démonstration que ci-dessus, mais on peut utiliser le résultat du problème 4 :
$f(x^{-n}) = f\left(\frac{1}{x^n}\right) = f(1) - f(x^n)$…
e) Si r est un nombre rationnel alors il existe deux entiers n et p tels que $r = n/p$.

on a : $p\,f(x^{n/p}) = f([x^{n/p}]^p) = f(x^{pn/p}) = f(x^n) = n\,f(x)$ donc $f(x^{n/p}) = …$

Par ailleurs $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ ce qui permet de montrer que $f(\sqrt[n]{x}) = f(x)/n$.

PROBLEME 6 La voiture de Barnabé *Indications*

Soit t le temps en années que devra attendre Barnabé pour que son capital atteigne 10 000 €.
Puisque le capital augmente de 4 % par année et que les intérêts sont ajoutés au capital, chaque année le capital est multiplié par 1,04. Le capital est alors à l'instant t : $8\,000 \times 1{,}04^t$.
Et le problème est de résoudre $8\,000 \times 1{,}04^t \geq 10\,000$, ce qui équivaut à $1{,}04^t \geq 1{,}25$.
Les deux membres sont strictement positifs et la fonction logarithme décimal est définie et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc la condition équivaut à $\log(1{,}04^t) \geq \log(1{,}25)$ et à $t\log(1{,}04) \geq \log(1{,}25)$…
On trouve ainsi la valeur minimale de t en années qu'il faut convertir en années et en mois.

On peut aussi calculer le taux mensuel moyen pour calculer directement le nombre de mois, mais dans ce cas, il faut garder la valeur exacte du coefficient multiplicateur qui est $1{,}04^{1/12}$.

Attention dans ce type de problème, il faut arrondir **par excès** car les intérêts ne sont versés qu'en fin de période.

Problème N°7 Le capital de Archibald

Archibald a placé son premier salaire de 1 000 € sur un compte à 5 % d'intérêts composés par an.
Au bout de combien d'années et de mois son capital aura-t-il doublé ?

Problème N°8 La ville de Champigny

Le 1er janvier 2000, la population de Champigny était de 4 000 habitants. On admet que la population diminue tous les ans de 4,5 % par rapport à l'année précédente.
Au bout de combien d'années, la population sera-t-elle inférieure ou égale à 2 000 habitants ?

a) Traduire le problème en une inéquation
b) Résoudre cette inéquation.
c) Conclure.

Problème N°9 Diane et Dimitri

Dimitri a placé 10 000 € à 4 % d'intérêts composés par an et Diane a placé 8 000 € à 5 %.
Diane dit à Dimitri : "Un jour, je serai plus riche que toi !"
Dimitri répond "Ce n'est pas demain, la veille !"
Alors dans combien d'années, le capital de Diane sera-t-il plus élevé que celui de Dimitri (en années et mois) ?

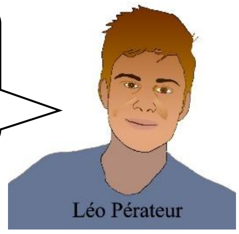
Après avoir traduit le problème en une inéquation, il est souhaitable de regrouper les termes avec l'inconnue dans le même membre pour obtenir une inéquation du type $a^x \geq k$ avant d'appliquer la fonction log aux deux membres de l'inéquation.

Problème N°10 Datation au Carbone 14

Un échantillon comporte 2 % de Carbone 14. La demi-vie du Carbone 14 est de 5 734 ans, c'est-à-dire que la masse de Carbone 14 diminue de moitié à chaque période de 5 734 ans et que le pourcentage de diminution par an est fixé.
On a pu déterminer qu'il y avait à l'origine 11 % de Carbone 14 dans l'échantillon.
La question est de dater cette origine.

Diminuer de moitié revient à considérer une suite géométrique de raison 0,5 et le nombre de demi-vies au bout de *t* années est *t*/5734.
Ici on peut considérer que le phénomène est continu et que le rapport de la masse de Carbone 14 à l'instant *t* par rapport à l'origine est $0{,}5^{t/5734}$.

Tu peux calculer le taux annuel moyen sans l'arrondir.



Problème N°11 Isolant en continue

On a remarqué que 3 cm d'un isolant permet d'atténuer le son de 10 %, et on considère que le pourcentage est constant pour chaque centimètre.
Quelle épaisseur permettra d'atténuer le son de 50 % ?

Problème N°12 Décibels

La valeur relative en décibels d'une puissance P_1 par rapport à la puissance de référence P_0 est :
$10 \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$. Calculer cette valeur relative lorsque :

a) $P_1 = 10\ P_0$
b) $P_1 = 100\ P_0$
c) $P_1 = 2\ P_0$

RÉPONSES

Problème 1 Le message du Baron de Merchiston dit Neper page 85

a) L(32) = 5 et L(4) + L(8) = 2 + 3 = 5 donc L(4 × 8) = L(4) + L(8).
b) L(512) – L(32) = 9 – 5 = 4 et L(512/32) = L(16) = 4 donc L(512/32) = L(512) – L(32).
c) L(64) : 2 = 6 : 2 = 3 et $\mathrm{L}\left(\sqrt{64}\right)$ = L(8) = 3 donc $\mathrm{L}\left(\sqrt{64}\right)$ = L(64) : 2 .
d) Supposons que a et b soient deux nombres réels strictement positifs de la graduation géométrique, il existe deux nombres entiers n et p tels que $a = 2^n$ et $b = 2^p$.
Alors $\mathrm{L}(ab) = \mathrm{L}(2^n\,2^p) = \mathrm{L}(2^{n+p}) = n + p = \mathrm{L}(a) + \mathrm{L}(b)$.

Problème 2 Les sous-graduations logarithmiques page 85

On sait que $a = q^n$ et que $q = 2^r$ donc $a = (2^r)^n = 2^{rn}$ et $\mathrm{L}(a) = \mathrm{L}(2^{rn}) = r\,n$.
De même $b = q^p$ donc $b = (2^r)^p = 2^{rp}$ et $\mathrm{L}(b) = \mathrm{L}(2^{rp}) = r\,p$ ainsi $\mathrm{L}(a) + \mathrm{L}(b) = r\,n + r\,p$
Or $\mathrm{L}(ab) = \mathrm{L}(2^{rn}\,2^{rp}) = \mathrm{L}(2^{rn+rp}) = r\,n + r\,p$ et ainsi $\mathrm{L}(ab) = \mathrm{L}(a) + \mathrm{L}(b)$.
La propriété observée au problème 1 est aussi vraie pour toutes les sous-graduations.
On l'a aussi démontrée pour toute graduation à partir d'une suite géométrique q^n de raison strictement positive q en plaçant le 0 de la suite arithmétique en face du terme 1. Ce qui permet de définir la fonction qui à tout nombre réel x associe q^x dans]0 ; + ∞[et sa fonction réciproque de]0 ; + ∞[dans] – ∞ ; + ∞[appelée logarithme de base q et notée $\log_q$.

Problème 3 La règle à calcul page 86

1) a) 2,5 × 2 = 5 **b)** 2,5 × 4 = 10 **c)** 2,5 × 3 = 7,5 **d)** 2,5 × 7 = 17,5 **e)** 2,5 × 8 = 20.
2) a) 4 : 2,5 = 1,6 **b)** 6 : 2,5 = 2,4 **c)** 9,5 : 2,5 = 3,8 **d)** 15 : 2,5 = 6 **e)** 35 : 2,5 = 14.
3) a) 10^3 **b)** 0,4 × 100 = 4 × 10^1 **c)** 48 × $10^5 \approx 5 \times 10^6$ **d)** 2 × 10^{15} **e)** 3,2 : 8 = 4 × 10^{-1}.

Problème 4 Transformer les divisions en soustractions page 87

Les réels c/d, c et d sont strictement positifs $f(c/d) + f(d) = f(c)$ donc $f(c/d) = f(c) - f(d)$.

Problème 5 Transformer les exposants en coefficients multiplicateurs page 87

1) a) $f(x^2) = f(x\,x) = f(x) + f(x) = 2\,f(x)$
b) $f(x^3) = f(x^2\,x) = f(x^2) + f(x) = 2\,f(x) + f(x) = 3\,f(x)$ **c)** Voir la démonstration page 88.
d) $f(x^{-n}) = f\left(\frac{1}{x^n}\right) = f(1) - f(x^n) = 0 - nf(x) = -nf(x)$
e) Si r est un nombre rationnel alors il existe deux entiers n et p tels que $r = n/p$ avec $p \neq 0$,
$p\,f(x^{n/p}) = f([x^{n/p}]^p) = f(x^{pn/p}) = f(x^n) = n\,f(x)$ donc $f(x^{n/p}) = \frac{n}{p} f(x)$ ainsi $f(x^r) = r\,f(x)$.
En particulier, $f(x^{1/n}) = (1/n)\,f(x) = f(x)/n$.
2) $\log_q(x^t) = \log_q([q^s]^t) = \log_q(q^{st}) = s\,t = t\log_q(q^s) = t\log_q(x)$.

Problème 6 La voiture de Barnabé page 87

Le problème revient à déterminer t tel que $8\,000 \times 1{,}04^t \geq 10\,000$ ce qui conduit à $1{,}04^t \geq 1{,}25$ puis à $t \geq \frac{\log(1{,}25)}{\log(1{,}04)} \approx 5{,}689$. Or 0,689 × 12 = 8,268 ainsi 0,689 an = 8,268 mois, donc Barnabé devra attendre 5 ans et 9 mois pour que son capital atteigne 10 000 €.

On peut chercher le nombre de mois avec $8\,000 \times (1{,}04^{1/12})^n \geq 10\,000$ sans arrondir le coefficient $(1{,}04^{1/12})$. On obtient $n \geq 12\log(1{,}25)/\log(1{,}04) \approx 68{,}273$ à arrondir à 69.

Problème 7 Le capital de Archibald page 89

L'inéquation $1{,}05^x \geq 2$ équivaut à $x \geq \frac{\log(2)}{\log(1{,}05)} \approx 14{,}207$. Ce qui donne 14 ans et 3 mois.

Problème 8 La ville de Champigny page 89

$4000 \times 0{,}955^x \leq 2000$ équivaut à $x\log(0{,}955) \leq \log(0{,}5)$ et à $x \geq \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}955)}$ car $\log(0{,}955) < 0$.
$\frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}955)} \approx 15{,}054$ soit 15 ans et 1 mois ou 16 ans si on compte par année entière.

Problème 9 Diane et Dimitri page 89

Le problème revient à résoudre $8\,000 \times 1{,}05^{\,n} > 10\,000 \times 1{,}04^{\,n}$

qui conduit à $\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}04}\right)^{n} > \dfrac{10\,000}{8\,000}$ et à $n \log\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}04}\right) > \log(1{,}25)$ $n > \dfrac{\log(1{,}25)}{\log\left(\frac{1{,}05}{1{,}04}\right)} \approx 23{,}32$

Le capital de Diane dépassera celui de Dimitri au bout de 23 ans et 4 mois.

Problème 10 Datation au Carbone 14 page 89

Si A est la masse de l'échantillon ($A \neq 0$), le problème revient à résoudre :

$\frac{11}{100} A \times 0{,}5^{\frac{t}{5734}} = \frac{2}{100} A$ ce qui équivaut à $0{,}5^{\frac{t}{5734}} = \frac{2}{11}$ et à $\frac{t}{5734}\log(0{,}5) = \log\left(\frac{2}{11}\right)$

Finalement $t = 5734\,\dfrac{\log(\frac{2}{11})}{\log 0{,}5} \approx 14102$ soit environ 14 000 ans.

Problème 11 Isolant en continue page 89

$0{,}9^{\,x/3} = 0{,}5$ équivaut à $\frac{x}{3}\log(0{,}9) = \log(0{,}5)$et à $x = 3\,\dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}9)}$ $\approx 19{,}74$ soit environ 20 cm.

Problème 12 Décibels page 89

a) 10 **b)** 20 **c)** Environ 3,01.

SYNTHESE : FONCTIONS LOGARITHMES

I Définition et propriété caractéristique

Pour chaque nombre réel q strictement positif et distinct de 1, la fonction exponentielle de base q qui à tout nombre réel x associe le nombre réel strictement positif q^{x} est continue et est une bijection de $]-\infty\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque appelée **logarithme de base q** et notée $\log_q$ définie et continue de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

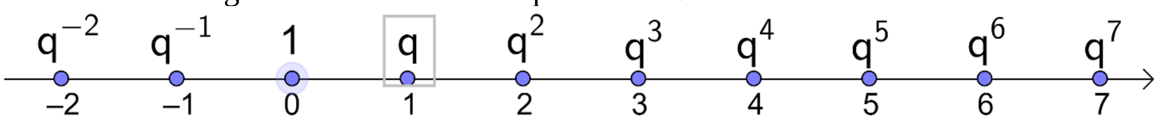
Pour tous les nombres réels a et b strictement positifs, $\log_q(a\,b) = \log_q(a) + \log_q(b)$.

La propriété ci-dessus est une propriété caractéristique des fonctions logarithmes.

De plus $\log_q(1) = 0$, $\log_q(q) = 1$ et pour tout nombre réel x, $\log_q(q^{x}) = x$ par définition.

	$]-\infty\,;+\infty[$	$\to$	$]0\,;+\infty[$
exponentiel de base q	x	$\mapsto$	$y = q^{x}$
logarithme de base q	$x = \log_q(y)$	$\leftarrow$	y

L'existence des fonctions logarithmes de base q et exponentielles de base q est suggérée par la correspondance entre les nombres associés à tous les points de la droite dont une graduation est en progression arithmétique d'un côté et en progression géométrique de l'autre, avec la possibilité de réaliser des sous-graduations aussi fines que voulues.



Si $q = 10$, la fonction $\log_{10}$ est appelée logarithme décimal et notée simplement log.

Remarque : Soient t et q deux réels strictement positifs, si $k = \log_q(t)$ alors $t = q^{k}$ donc pour tout nombre réel x, $t^{x} = q^{kx} = q^{x \log_q(t)} = y$ et $\log_q(y) = x \log_q(t) = \log_t(y) \log_q(t)$.

Toute puissance de t est une puissance de q et $\log_t(y) = \log_q(y)/\log_q(t)$ donc $\log_2(y) = \log(y)/\log(2)$.

II Conséquences de la propriété caractéristique

Théorème

Si q, a et b sont des réels de$]\,0\,;+\infty\,[$, si n est un entier et d est un entier non nul alors :

$$\log_q(1) = 0\,;\ \log_q\left(\frac{a}{b}\right) = \log_q(a) - \log_q b\ ;\ \log_q\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_q(a)\ ;\ \log_q(a^n) = n\log_q(a)$$

$$\log_q\left(a^{1/d}\right) = \frac{1}{d}\log_q(a)\quad ;\quad \log_q\left(a^{n/d}\right) = \frac{n}{d}\log_q(a)$$

Pour tout x de$]\,0\,;+\infty\,[$ et tout réel t : $\log_q(x^t) = t\log_q(x)$

EXPLICATIONS SUR LES METHODES

Les explications renvoient à des problèmes traités : le premier numéro indique le problème et le second la page des indications adaptées. (Pb3/P86) signifie voir le problème 3 page 86.

1. Utiliser une graduation logarithmique

Lorsque le phénomène étudié semble varier avec un pourcentage constant il est intéressant de réaliser un graphique dont l'axe vertical possède une graduation logarithme, c'est-à-dire construite en mettant en correspondance les termes d'une suite géométrique avec une suite arithmétique et les sous-divisions, mais le plus lisible est d'utiliser une graduation comme celle de la règle à calcul (Pb3P86) et placer les nombres y à l'ordonnée log(y) (Pb1P79 chap.6).

Certains phénomènes comme l'intensité du son, le PH (l'acidité) en chimie, l'intensité d'un temblement de Terre, sont mesurés en utilisant la fonction logarithme décimal parce que les quantités en jeu varient de façon trop importantes pour être bien perçues sans réduire l'échelle.

2. Transformer les équations ou inéquations par équivalence

En ajoutant la même quantité à chaque membre, on obtient une équation ou inéquation équivalente. De même, en multipliant ou divisant par un nombre strictement positif ; par contre si on multiplie ou divise par un nombre strictement négatif, le sens de l'inéquation change. Il faudra être particulièrement attentif à un coefficient du type log(a) qui est négatif si $a < 1$. Ces transformations sont utiles pour résoudre une équation ou inéquation à condition de s'approcher de la résolution, notamment en regroupant dans le même membre les termes qui comportent l'inconnue comme pour le problème (Pb9P91). Grâce à ce chapitre, les équations du type $a^x = k$ peuvent être résolues en utilisant les fonctions logarithmes de base q et en particulier la fonction logarithme décimal log.

3. Utiliser une fonction logarithme, notamment log

Pour résoudre une équation ou une inéquation dans laquelle l'inconnue apparaît en exposant, les fonctions logarithmes, et en particulier la fonction logarithme décimal, sont très utiles. Après avoir traduit le problème en équation et s'être ramené à une forme du type $a^x = k$, $a^x < k$, $a^x > k$, $a^x \leq k$ ou $a^x \geq k$ avec $a > 0$, il faut s'assurer que $k > 0$.

Si $k \leq 0$, l'équation $a^x = k$ et les inéquations $a^x < k$ et $a^x \leq k$ n'ont pas de solutions réelles car $a^x > 0$; et les inéquations $a^x > k$ et $a^x \geq k$ sont vraies pout tous les nombres réels.

Si $\boldsymbol{k > 0}$ **et** $\boldsymbol{a > 0}$, la fonction log est définie et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc :

$a^x > k$ équivaut à : $\log(a^x) > \log(k)$ donc à : $x\log(a) > \log(k)$
$a^x = k$ équivaut à : $\log(a^x) = \log(k)$ donc à : $x\log(a) = \log(k)$
$a^x \leq k$ équivaut à : $\log(a^x) \leq \log(k)$ donc à : $x\log(a) \leq \log(k)$…

Ce qui permet de résoudre l'équation ou l'inéquation. On peut procéder de la même façon avec toute autre fonction logarithme de base q à condition que $q > 1$ (sinon $\log_q$ est décroisante).

4. Démontrer par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété dépendante d'un paramètre n est vraie pour tous les entiers naturels, ou pour tous les entiers naturels à partir de m, il faut savoir que l'ensemble des entiers naturels est défini comme l'ensemble qui contient 0 et qui contient le successeur de chacun de ses éléments, c'est-à-dire par $0 \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$.

Ainsi pour démontrer que la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n, on peut démontrer que la propriété est vraie pour $n = 0$, c'est-à-dire que P_0 est vraie, et que si elle est vraie pour un nombre entier k alors elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$. Schématiquement :

$$\text{Si } \begin{Bmatrix} P_0 \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout entier naturel } k, P_k \Longrightarrow P_{k+1} \end{Bmatrix} \text{alors } \{\text{Pour tout entier naturel } n, P_n \text{ est vraie}\}$$

Pour démontrer que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels à partir de m :

$$\text{Si } \begin{Bmatrix} P_m \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout entier naturel } k, P_k \Longrightarrow P_{k+1} \end{Bmatrix} \text{ alors } \{\text{Pour tout entier naturel } n \geq m, P_n \text{ est vraie}\}$$

5. Utiliser un taux moyen

Si on veut résoudre un problème en passant d'un taux annuel à un taux mesuel moyen ou à un taux journalier moyen, tout arrondi risque d'introduire une erreur finale importante. Il faut dans ce cas, conserver la valeur exacte du coefficient multiplicateur.

Par exemple pour le problème (Pb10P89), une diminution de moitié en 5734 ans correspond à un coefficient multiplicateur de 0,5. Le coefficient correspondant au taux annuel moyen est $0{,}5^{1/5734}$ et la masse passera de 11 % à 2 % au bout de t années avec $(0{,}5^{1/5734})^t = 2/11$ soit $0{,}5^{t/5734} = 2/11$. Il ne faut pas arrondir $0{,}5^{1/5734}$ dans les calculs intermédiaires.