CHAPITRE 5 DES RACINES ET DES *N*

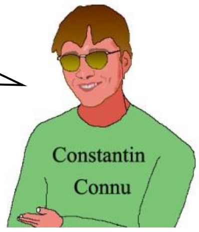
<u>Problème N°1</u> **<u>La duplication du cube</u>** *<u>Énoncé typique avec indications de méthodes</u>*

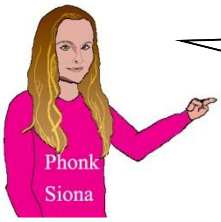
Ératosthène raconte que les habitants de l'île de Délos qui subissaient une épidémie de peste, ont interrogé l'oracle. Celui-ci leur a dit de doubler l'autel dédié à Apollon. Cet autel avait la forme d'un cube. Les habitants réalisèrent un autel dont chaque arête mesurait le double de celle de l'autel initial. Mais la peste s'amplifia et ils prirent conscience que le volume de l'autel avait été multiplié par 8 et non par 2.
Si l'arête de l'autel initial avait pour longueur une unité, quelle devait être la longueur de l'arête du nouvel autel pour que son volume soit le double de celui de l'autel initial ?

Tu peux chercher par toi-même ou t'inspirer des méthodes ci-dessous.

Je propose de dessiner deux cubes pour comprendre le problème.

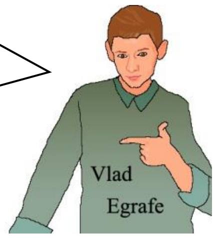
On pourrait utiliser une lettre pour désigner l'inconnue.

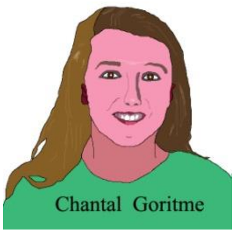




Il y a un lien avec la fonction $x \mapsto x^3$ et peut-être avec une autre fonction.

Un graphique adapté peut donner rapidement une réponse approximative, surtout en s'aidant de la table de la calculatrice.





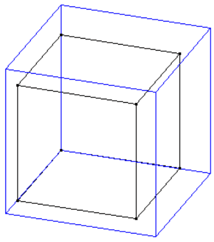
J'imagine un algorithme pour estimer ce nombre avec une bonne précision.

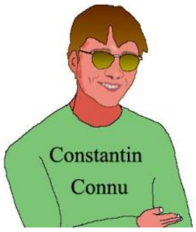
Après avoir cherché par toi-même, *puis avoir échangé avec tes voisins, s'il s'agit d'un travail de groupe, tu peux regarder les pages suivantes où les méthodes sont détaillées.*
Compare ces méthodes et assure-toi qu'elles donnent les mêmes résultats.

Dans les pages suivantes, tu trouveras une grande quantité de problèmes où tu pourras réutiliser ces méthodes, puis une synthèse sur les notions mathématiques utilisées ici.

Problème 1 La duplication du cube *Détails des méthodes*

Faire un dessin





Utiliser une inconnue

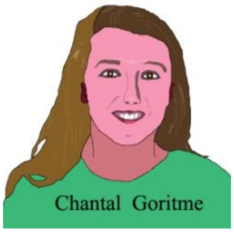
Si on appelle x la nouvelle arête, alors le volume du cube d'arête x doit être 2 fois celui du cube d'arête 1.
Quelle équation vérifie le nombre x ?

Utiliser une fonction

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $x \mapsto x^3$.
Combien le nombre 2 a-t-il d'antécédents ?
Comment nommer et noter la fonction qui associe à chaque nombre réel positif, son antécédent par la fonction cube ?
Tracer la courbe de la fonction f et éventuellement de sa fonction réciproque.
En déduire une valeur approchée du nombre recherché au problème 1.

Utiliser la courbe de la fonction et la table de la calculatrice

Rentrer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ dans la calculatrice, puis avec le tableau de valeurs de la calculatrice, encadrer l'antécédent de 2 avec un pas de plus en plus petit.



Réaliser un algorithme

Le nombre recherché au problème 1, est compris entre $a = 1$ et $b = 2$.
Réaliser un programme qui calcule la moyenne x de a et b, puis calcule x^3 pour déterminer si le nombre cherché est entre a et x ou entre x et b, puis remplace a ou b par x pour donner un meilleur encadrement du nombre cherché.
Réaliser une boucle pour répéter l'opération jusqu'à obtenir la précision cherchée, c'est-à-dire jusqu'à ce que la différence $b - a$ soit suffisamment petite.
Il existe d'autres algorithmes plus performants pour les spécialistes.

Compare et utilise plusieurs de ces méthodes

A la page suivante, tu trouveras plusieurs problèmes à traiter avec les mêmes méthodes.
Si ta classe travaille par groupe, tu peux rejoindre des élèves qui ont choisi la même méthode que toi (pas plus de 4 élèves par groupe).
Après avoir résolu plusieurs problèmes, dispersez-vous pour rejoindre des groupes constitués d'élèves ayant travaillé sur des méthodes différentes et comparez vos travaux. Expliquer sa méthode aux autres est toujours un moyen de mieux la comprendre, et entendre celles des autres permet de progresser sur la notion étudiée.
Pour aller vers une synthèse, le problème N°1 est corrigé page 70 et la synthèse est juste après.

<u>Problème N°2</u> **<u>Les glaces</u>**

Le Glacier des Alpes fabrique des glaces en forme de cône. La glace simple tient dans un cône dont la hauteur est 10 cm et le diamètre de l'ouverture est 8 cm.


En conservant les mêmes proportions, quels doivent être la hauteur et le diamètre de l'ouverture pour obtenir un volume double de glace ?

Et pour la maxi glace dont le volume est triple de la glace simple ?

Les réponses sont-elles les mêmes si le cône est surmonté d'une demi-boule dont la base est le disque de l'ouverture ?

<u>Problème N°3</u> **<u>Le placement d'Adrien</u>**

Adrien a placé 2 000 € sur un compte à intérêts composés à 7,4 % par an. Cela signifie qu'au bout d'un an, il touchera 7,4 % d'intérêts qui seront ajoutés à son capital, et l'année suivante, il touchera 7,4 % d'intérêts non seulement sur les 2 000 €, mais aussi sur les intérêts obtenus la première année.

Supposons que les intérêts soient calculés et ajoutés chaque trimestre.

Quel taux d'intérêts composés par trimestre conduirait au taux de 7,4 % par an ?

<u>Problème N°4</u> **<u>La musique</u>** *Énoncé typique avec indications de méthodes*

La gamme tempérée est constituée de 12 notes en montant de 1/2 ton en 1/2 ton :

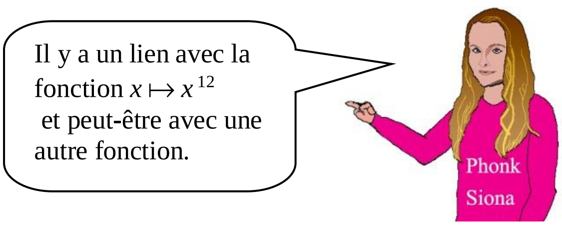
DO, DO# , RÉ, RÉ#,MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI.

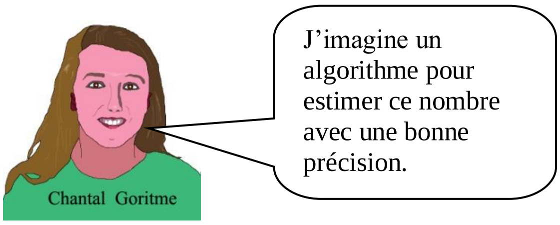
Après la note SI, on recommence une nouvelle octave à DO. Pour distinguer les notes des octaves distinctes, on écrit DO_1 puis DO_2, DO_3, DO_4… Ainsi LA_3 est compris entre DO_3 et DO_4. On sait que la fréquence double chaque fois qu'on monte d'une octave.

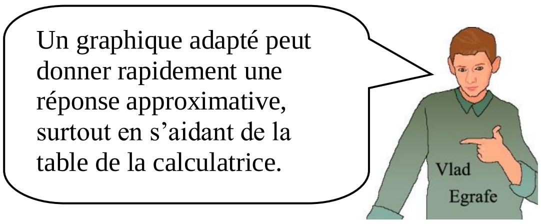
Par exemple, le LA_3 de la 3$^{\text{ème}}$ octave a pour fréquence 440Hz et le LA_4 de la 4$^{\text{ème}}$ octave a pour fréquence 880Hz. Pour passer d'une note à la suivante, un demi-ton plus haut, on multiplie la fréquence toujours par le même nombre.

1. Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer d'une note à la suivante, un demi-ton plus haut ?
2. Calcule les fréquences des notes de LA_3 à LA_4 (à une unité près).
3. Calcule les fréquences des notes DO_3 et RE_3 puis de DO_3 à LA_3.
4. Donne la valeur exacte du coefficient multiplicateur pour monter de 6 demi-tons, par exemple de LA à RÉ#, puis de 3 demi-tons de LA à DO.

Cherche par toi-même, mais tu peux t'inspirer des idées ci-dessous.







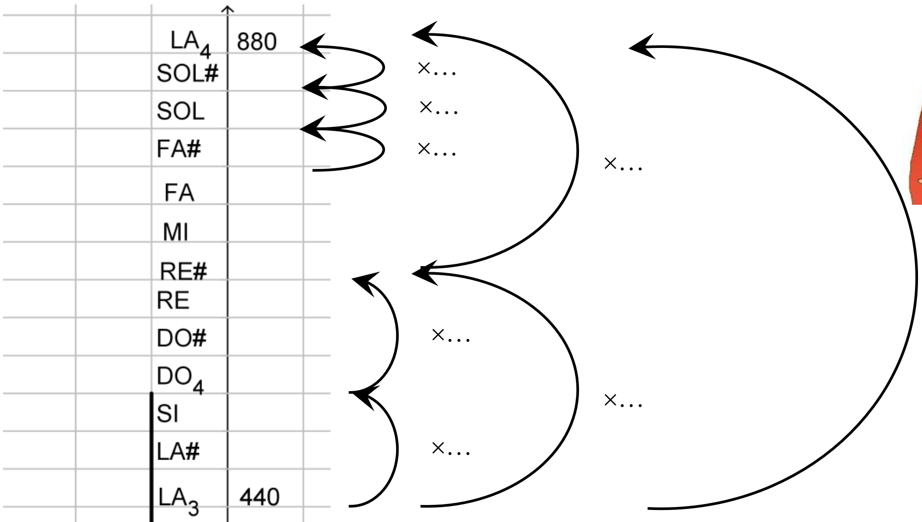
Les méthodes indiquées ici pour le problème 4 sont détaillées à la page suivante.

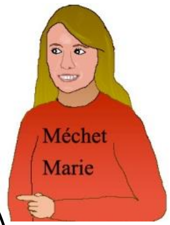
Les problèmes 2 et 3 sont corrigés à la page 70.

Problème 4 La musique *Détails des méthodes*

Faire un schéma

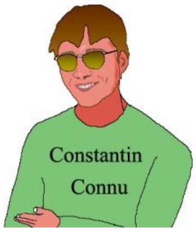
On peut présenter les notes sur un axe vertical et on cherche le coefficient multiplicateur pour passer de la fréquence d'une note à la suivante.





Utiliser une lettre pour désigner une inconnue

On peut appeler r le nombre par lequel est multipliée la fréquence lorsqu'on monte d'un demi-ton.
Quelle équation vérifie r ?



Etudier des cas particuliers

De la note LA_3 à LA_4, la fréquence est multipliée par 2, et de LA_3 à RE#, puis de RE# à LA_4, la fréquence est multipliée deux fois par un même nombre x.
Quelle équation vérifie x ? Quelle est sa valeur exacte et quelle est sa valeur approchée obtenue à la calculatrice ?
Pour passer de LA_3 à DO_4 on augmente de 3 demi-tons, autant que pour passer de DO_4 à RE#. Cela signifie que l'on multiplie par le même nombre k la fréquence de LA_3 pour obtenir celle de DO_4, ou celle de DO_4 pour obtenir celle de RE#. Quelle équation vérifie k ? Quelle est sa valeur exacte ?
Pour monter d'un demi-ton, on multiplie la fréquence par r. Pour passer de LA_3 à DO_4, on recommence trois fois, donc on a multiplié la fréquence 3 fois par r, ce qui revient à multiplier la fréquence par k. Quelle relation y-a-t-il entre r et k ? entre r et x ? entre r et 2 ?
Proposer plusieurs écritures mathématiques du nombre r.

Utiliser une fonction

Pour résoudre l'équation qui définit r, on peut utiliser la fonction $x \mapsto x^{12}$.
On cherche le nombre positif dont l'image est 2.

Utiliser un graphique

On peut représenter la fonction $x \mapsto x^{12}$ et chercher graphiquement l'antécédent de 2.
Ou directement essayer de s'approcher de ce nombre en regardant le tableur de valeurs de cette fonction avec un pas de plus en plus petit.

Utiliser un algorithme

On peut réaliser un programme. Le nombre cherché est compris entre 1 et 2.
A chaque fois, qu'on a trouvé un encadrement par deux nombres a et b, on peut calculer l'image de $x = \frac{a+b}{2}$, si cette image est plus grande que 2, on remplace b par x, sinon on remplace a par x, on obtient un nouvel encadrement et on continue jusqu'à ce que la différence $b - a$ soit assez petite.

Le problème 4 est corrigé page 71.

Problème N°5 Le taux mensuel moyen de Bastien

Bastien a placé 4 000 € sur un compte à intérêts composés à 6,8 % par an. Cela signifie qu'au bout d'un an, il touchera 6,8 % d'intérêts qui seront ajoutés à son capital, et l'année suivante, il touchera 6,8 % d'intérêts non seulement sur les 4 000 €, mais aussi sur les intérêts obtenus la première année.
Supposons que les intérêts soient calculés et ajoutés chaque **mois**.
Quel taux d'intérêts composés par mois conduirait au taux de 6,8 % par an ?

Problème N°6 Le taux annuel moyen

a) En 5 ans, la valeur d'une action est passée de 15 € à 42,23 €.
Quel a été le pourcentage d'augmentation annuel moyen ?
b) En 5 ans, la valeur d'une voiture a diminué de 12 000 € à 7 000 €.
Quel a été le pourcentage de diminution annuel moyen ?

Problème N°7 Des exposants rationnels : Exemples

Dans le cas du problème 1, on cherche un nombre x tel que $x^3 = 2$.
Ce nombre est noté $\sqrt[3]{2}$. Mais supposons qu'on le note comme une puissance de 2, soit 2^r.
Alors, en appliquant les règles des puissances, on doit avoir : $(2^r)^3 = 2^{3r} = 2 = 2^1$.
Ainsi $3r = 1$ donc $r = 1/3$. Autrement dit : $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$.
Calcule 2^(1/3) à la calculatrice et vérifie que tu trouves le même résultat que $\sqrt[3]{2}$.
Mais peut-on vraiment utiliser les règles des puissances avec des exposants fractionnaires ?

a) Démontre que $a = \left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ et $b = \sqrt[3]{2^4}$ sont égaux puis donne leur écriture sous la forme 2^r.
(Indication si a et b sont deux nombres réels positifs et si $a^3 = b^3$ alors $a = b$.)
b) Les fractions $\frac{4}{12}$ et $\frac{1}{3}$ sont égales. Démontre que $\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}$ autrement dit que $2^{4/12} = 2^{1/3}$.
c) Démontre que $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^5}$ autrement dit que $2^{1/2} \times 2^{1/3} = 2^{5/6}$.
d) Revois les nombres cherchés dans le problème 4 en utilisant la notation des exposants rationnels.

Problème N°8 Exposants rationnels : Démonstrations générales

Dans le cas général, soit a un nombre réel strictement positif, et p un entier strictement positif, il existe un unique nombre réel x positif tel que $x^p = a$. Ce nombre est noté $\sqrt[p]{a}$ mais on le note aussi $a^{1/p}$.
On a ainsi : $\left(a^{1/p}\right)^p = a = a^1 = a^{p/p}$ ce qui est cohérent avec les règles habituelles des puissances.

a) Etant donnés deux nombres entiers n et d strictement positifs, démontre que les nombres
$u = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n$ et $v = \sqrt[d]{a^n}$ sont égaux ainsi que $\frac{1}{\sqrt[d]{a^n}}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt[d]{a}}\right)^n$ et donne leur écriture sous la forme a^r.
(Indication si u et v sont deux nombres réels positifs et si $u^d = v^d$ alors $u = v$.)
b) Etant donnés trois nombres entiers k, n et d strictement positifs, démontre que les nombres
$u = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n$ et $w = \left(\sqrt[kd]{a}\right)^{kn}$ sont égaux.
c) Etant donnés 4 nombres entiers n, d, m et p strictement positifs, démontre que $a^{n/d} \times a^{m/p} = a^{n/d + m/p}$.
d) Etant donnés 2 nombres entiers n, d strictement positifs et 2 réels a et b strictement positifs,
démontre que $\sqrt[d]{a^n} \times \sqrt[d]{b^n} = \sqrt[d]{(ab)^n}$.

Problème N°9 Entraînement au calcul avec des exposants rationnels

Simplifier les expressions :
a) $5^{2/3} \times 49^{1/3}$ **b)** $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3}$ **c)** $0{,}125^{-1/3}$

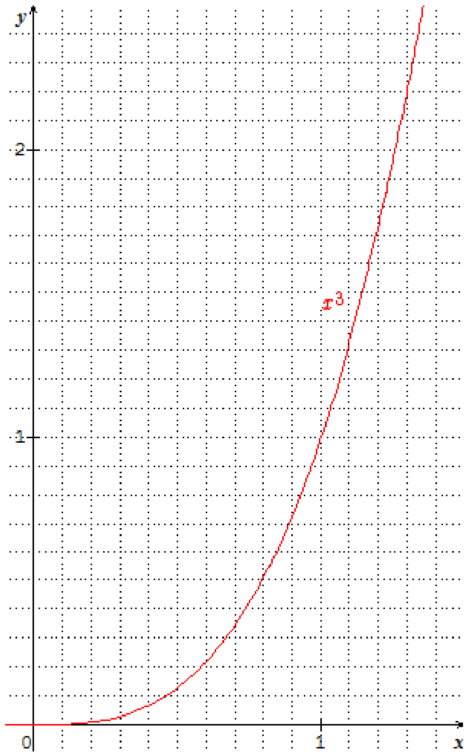
Problème N°10 Exposants décimaux

Ecrire à l'aide du symbole radical $\sqrt{\ }$ les nombres suivants :
$A = -3^{0,1}$; $B = 7^{0,3}$; $C = 2^{3,5}$; $D = 8^{-0,1}$; $E = 4^{-2,5}$; $F = 100^{0,01}$.
Lequel est un nombre décimal ?

Problème N°11 Exposants irrationnels

a) Peut-on définir 2^{π} ? Comment l'encadrer par des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 2 ?
b) Peut-on définir $3^{\sqrt{5}}$? Comment l'encadrer par des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 3 ?
c) Peut-on définir $10^{\pi - 4}$? Comment l'encadrer par des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 10 ?

RÉPONSES



Problème 1 La duplication du cube page 65

Le nombre x cherché est solution de l'équation $x^3 = 2$.

Comme la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante et que l'ensemble des images est $[\,0\,;+\infty\,[$, le nombre 2 a exactement un antécédent qui est noté $\sqrt[3]{2}$.

La fonction g qui associe à chaque nombre réel positif son antécédent par la fonction cube est la fonction racine cubique et $g(x) = \sqrt[3]{x}$. C'est la fonction réciproque de f.

Graphiquement, le nombre x est proche de 1,25.

Une recherche avec la calculatrice montre qu'il est compris entre 1,25 et 1,26 et plutôt proche de 1,26.

L'application de l'algorithme de recherche par dichotomie avec une précision de 0,001 donne : $1{,}259375 < x < 1{,}26$.

Et le calcul de $\sqrt[3]{2}$ donne environ 1,25992105.

Algorithme

Donner les valeurs de A, B, C et P *ici A = 1, B = 2, C=2, P = 0,001.*

Tant que B – A > P faire : *P est la précision.*

X←(A+B)/2

Y←X^3 *changer la fonction pour un autre problème.*

Si Y > C alors B←X sinon A←X *C est la valeur cible.*

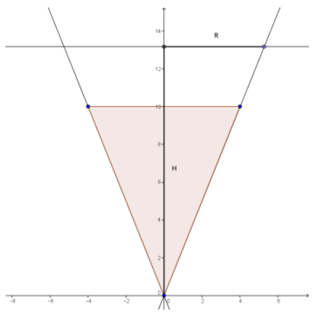
Fin Tant que

Afficher A, Afficher B

Problème 2. Les glaces page 67

Le volume du cône initial est :

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi \times 4^2 \times 10}{3} = \frac{160\pi}{3}$$



Le cône de volume double a pour hauteur H et rayon R et :

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H = 2v = \frac{320\pi}{3}$$

donc $R^2 H = 320$

Or les dimensions sont proportionnelles donc :

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{h} = \frac{4}{10}$$

donc $R = 0{,}4\,H$ et ainsi $0{,}16H^3 = 320$ d'où $H^3 = 2\,000$.

ainsi $H = \sqrt[3]{2000} = 10 \times \sqrt[3]{2} \approx 12{,}6$.

Pour doubler le volume, en gardant les mêmes proportions, il faut multiplier la hauteur par $\sqrt[3]{2}$.

Pour le tripler, il faut multiplier la hauteur par $\sqrt[3]{3}$.

Les réponses sont les mêmes si le cône est surmonté d'une demi-sphère en gardant toujours les mêmes proportions, car le produit des longueurs par k multiplie le volume par k^3.

Problème 3 Le placement d'Adrien page 67

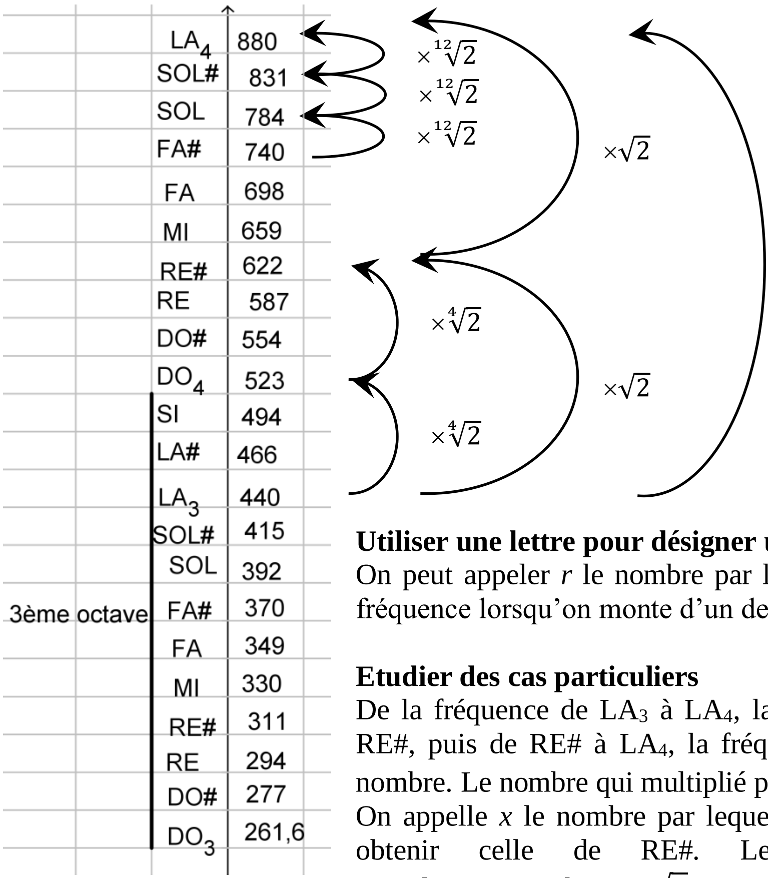
Chaque trimestre, le capital est multiplié par k, donc au bout de 4 trimestres, il est multiplié par k^4 mais au bout d'un an, il est multiplié par 1,074 puisqu'il a augmenté de 7,4 %, donc $k^4 = 1{,}074$ et $k = \sqrt[4]{1{,}074} \approx 1{,}018$. Ceci correspond à une augmentation moyenne de 1,8 % par trimestre.

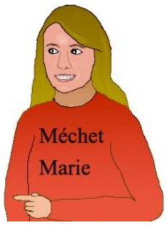
Remarquer que ce n'est pas 7,4 % /4 = 1,85 %.

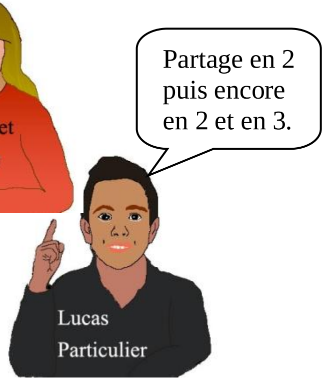
Problème 4 La musique page 67

Faire un schéma

On peut présenter les notes sur un axe vertical et on cherche le coefficient multiplicateur pour passer de la fréquence d'une note à la suivante.







Utiliser une lettre pour désigner une inconnue

On peut appeler r le nombre par lequel est multipliée la fréquence lorsqu'on monte d'un demi-ton. Alors $r^{12} = 2$

Etudier des cas particuliers

De la fréquence de LA_3 à LA_4, la fréquence est multipliée par 2, et de LA_3 à RE#, puis de RE# à LA_4, la fréquence est multipliée deux fois par un même nombre. Le nombre qui multiplié par lui-même donne 2 est $\sqrt{2}$.

On appelle x le nombre par lequel il faut multiplier la fréquence de LA_3 pour obtenir celle de RE#. Le nombre x vérifie l'équation $x^2 = 2$. La valeur exacte de x est $\sqrt{2}$.

Le nombre k vérifie l'équation $k^2 = \sqrt{2}$ ou encore $k^4 = 2$.Sa valeur exacte est $\sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$

Pour monter d'un demi-ton, on multiplie la fréquence par r. Pour passer de LA_3 à DO_4, on recommence trois fois, donc on a multiplié la fréquence 3 fois par r, ce qui revient à multiplier la fréquence par k. Donc $r^3 = k$ et $r^6 = x$, et finalement $r^{12} = 2$.

Voici plusieurs écritures mathématiques du nombre r :

$$r = \sqrt[12]{2} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}.$$

Utiliser une fonction

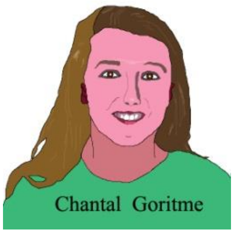
Pour résoudre l'équation qui définit r, on peut utiliser la fonction $x \mapsto x^{12}$.

On cherche le nombre positif dont l'image est 2, c'est $\sqrt[12]{2}$.

Utiliser un graphique

On peut représenter la fonction $x \mapsto x^{12}$ et chercher graphiquement l'antécédent de 2.

Ou directement essayer de s'approcher de ce nombre en regardant le tableau de valeurs de cette fonction avec un pas de plus en plus petit. On trouve $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}059463$



Utiliser un algorithme

On peut réaliser un programme. C'est l'algorithme de dichotomie qui a déjà été utilisé avec la fonction cube, mais en changeant la fonction. Ici : Y←X^12 .

Problème 5 Le taux mensuel moyen de Bastien page 69

Le taux mensuel moyen correspondant à un taux d'intérêts composés de 6,8 % par an est obtenu en cherchant le coefficient multiplicateur k tel que $k^{12} = 1{,}068$.

Ce qui conduit à $k = \sqrt[12]{1{,}068} \approx 1{,}0055$ soit un taux mensuel moyen de 0,55 %.

Problème 6 Le taux annuel moyen page 69

a) Pour trouver le pourcentage d'augmentation annuelle d'une action dont la valeur est passée de 15 € à 42,23 € en 5 ans, on calcule $\sqrt[5]{42{,}23/15} \approx 1{,}23$ soit 23 % d'augmentation annuelle.

b) Pour trouver le pourcentage de diminution annuelle d'une voiture dont la valeur est passée de 12 000 € à 7 000 € en 5 ans, on calcule $\sqrt[5]{7/12} \approx 0{,}898$ soit 10,2 % de diminution annuelle.

Problème 7 Des exposants rationnels : Exemples page 69

a) $a^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{12} = 2^4 = \left(\sqrt[3]{2^4}\right)^3 = b^3$ donc $a = \left(\sqrt[3]{2}\right)^4 = b = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

b) $\left(\sqrt[12]{2^4}\right)^{12} = 2^4$ et $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{12} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2^4$ donc $2^{4/12} = 2^{1/3}$.

c) $\left(\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 \times \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 2^3 \times 2^2 = 2^5 = \left(\sqrt[6]{2^5}\right)^6$ donc $2^{1/2} \times 2^{1/3} = 2^{5/6}$.

Problème 8 Exposants rationnels : Démonstrations générales page 69

a) Etant donnés deux nombres entiers n et d strictement positifs, $u = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n$ et $v = \sqrt[d]{a^n}$ sont égaux car $u^d = \left(\sqrt[d]{a}\right)^{nd} = \left[\left(\sqrt[d]{a}\right)^d\right]^n = a^n$ et $v^d = \left(\sqrt[d]{a^n}\right)^d = a^n$ ainsi $u^d = v^d$ avec $u > 0$ et $v > 0$.
Leurs inverses sont aussi égaux.

b) Etant donnés trois nombres entiers k, n et d strictement positifs, les nombres $u = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n$ et $w = \left(\sqrt[kd]{a}\right)^{kn}$ sont égaux car $u^{kd} = \left[\left(\sqrt[d]{a}\right)^n\right]^{kd} = \left[\left(\sqrt[d]{a}\right)^d\right]^{kn} = a^{kn} = w^{kd}$ avec $u > 0$ et $w > 0$.

c) Etant donnés 4 nombres entiers n, d, m et p strictement positifs, soit $u = a^{n/d} \times a^{m/p}$ et $v = a^{n/d + m/p}$
alors $u^{dp} = (a^{n/d} \times a^{m/p})^{dp} = (a^{n/d})^{dp} \times (a^{m/p})^{dp} = a^{np} \times a^{md} = a^{np+md}$ et $v^{dp} = a^{dp \times (np+md)/dp}$
$u^{dp} = v^{dp}$ avec $u > 0$ et $v > 0$ donc $u = v$ autrement dit : $a^{n/d} \times a^{m/p} = a^{n/d + m/p}$.

d) $\left(\sqrt[d]{a^n} \times \sqrt[d]{b^n}\right)^d = \sqrt[d]{a^n}^d \times \sqrt[d]{b^n}^d = a^n \times b^n = (ab)^n = \left(\sqrt[d]{(ab)^n}\right)^d$ donc $\sqrt[d]{a^n} \times \sqrt[d]{b^n} = \sqrt[d]{(ab)^n}$

Problème 9 Entraînement au calcul avec des exposants rationnels page 69

$5^{2/3} \times 49^{1/3} = 5^{2/3} \times 7^{2/3} = 35^{2/3}$ $\quad$ $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} = 3^{1/2} \times 3^{1/6} = 3^{2/3}$ $\quad$ $0{,}125^{-1/3} = 8^{1/3} = 2$

Problème 10 Exposants décimaux page 69

Parfois plusieurs écritures sont possibles

$A = -3^{0,1} = -\sqrt[10]{3}$; $\quad B = 7^{0,3} = \sqrt[10]{7^3} = \sqrt[10]{343}$; $\quad C = 2^{3,5} = \sqrt[10]{2^{35}} = 2^{7/2} = \sqrt{2^7}$

$D = 8^{-0,1} = \frac{1}{8^{0,1}} = \frac{1}{\sqrt[10]{8}} = \sqrt[10]{\frac{1}{8}} = \sqrt[10]{0{,}125}$; $F = 100^{0,01} = \sqrt[100]{100} = 10^{0,02} = 10^{1/50} = \sqrt[50]{10}$

$E = 4^{-2,5} = \frac{1}{4^{2,5}} = \frac{1}{\sqrt[10]{4^{25}}} = \frac{1}{4^{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{4^5}} = \frac{1}{\left(\sqrt{4}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = 0{,}03125$. E est un nombre décimal.

Problème 11 Exposants irrationnels page 69

a) Pour définir 2^{π}, on peut considérer des encadrements de π de plus en plus précis.
$3{,}1 < \pi < 3{,}2$ et la suite géométrique $2^{0,1n} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^n$ est strictement croissante donc $2^{3,1} < 2^{3,2}$.
$3{,}1 < 3{,}14 < \pi < 3{,}15 < 3{,}2$ et la suite géométrique $2^{0,01n} = \left(\sqrt[100]{2}\right)^n$ est strictement croissante donc $2^{3,10} < 2^{3,14} < 2^{3,15} < 2^{3,20}$ et ainsi de suite. On peut encadrer 2^{π} par des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 2 de plus en plus rapprochées, et 2^{π} est la valeur réelle limite vers laquelle tendent les deux bornes :

$$2^{3,1} < 2^{3,14} < \ldots < 2^{\pi} < \ldots < 2^{3,15} < 2^{3,2}$$

b) De la même façon, $\sqrt{5}$ peut être encadré par des décimaux de plus en plus rapprochés.
$2{,}23 < 2{,}236 < \ldots < \sqrt{5} < \ldots < 2{,}237 < 2{,}24$ donc $3^{2,23} < 3^{2,236} < \cdots < 3^{\sqrt{5}} < \cdots < 3^{2,237} < 3^{2,24}$

c) Pour $10^{\pi - 4}$, le nombre $\pi - 4$ est négatif mais il peut aussi être encadré par des décimaux.

$$-0{,}9 < -0{,}86 < \ldots < \pi - 4 < \ldots < -0{,}85 < -0{,}8$$

donc : $10^{-0,9} < 10^{-0,86} < \cdots < 10^{\pi-4} < \cdots < 10^{-0,85} < 10^{-0,8}$.

SYNTHÈSE : LES PUISSANCES RATIONNELLES OU RÉELLES

I PUISSANCES ENTIÈRES

Rappel :
Si p et n sont des entiers relatifs et si a et b sont des nombres réels non nuls alors :
$a^n a^p = a^{n+p}$, $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$, $a^0 = 1$, $(a^n)^p = a^{np}$ et $a^n b^n = (ab)^n$

Exemples :
$2^{-3}5^{-3} = 10^{-3} = 0{,}001$ $\left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3 = 2^3 = 8$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{\pi^2}{9}$ $\pi^0 = 1$

II PUISSANCES RATIONNELLES

Soit n un entier strictement positif alors la fonction qui à tout réel positif ou nul x associe x^n est définie, continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et l'ensemble des images est $[0\,;+\infty[$.
Conséquences :
Si $a \geq 0$, l'équation $x^n = a$ admet une solution et une seule dans $[0\,;+\infty[$ qui est appelée racine $n^{\text{ième}}$ de a.
De plus : Si a et b sont des réels positifs et si $a^n = b^n$ alors $a = b$.

Définition :
Si $a \in [0\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\sqrt[n]{a}$ l'unique solution réelle positive ou nulle de l'équation $x^n = a$.

Ceci permet de calculer le taux annuel moyen ou le taux mensuel moyen (Problème 5 et 6).

Si $a > 0$ alors $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^{100} = (a^3)^{25} = a^{75} = \left(\sqrt[100]{a^{75}}\right)^{100}$ donc $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[100]{a^{75}}$ or $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$
D'où l'idée de noter la racine $n^{\text{ième}}$ par une puissance rationnelle.

Définition :
Si $a \in [0\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
on note $a^{1/n}$ l'unique solution réelle positive ou nulle de l'équation $x^n = a$.

Ainsi $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ par définition, mais 0^0 n'est pas défini.

Le problème 8 démontre la cohérence de cette notation et que les règles sur les puissances entières s'appliquent aussi aux puissances rationnelles de nombres réels strictement positifs.
On définit ainsi $a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$ et $a^{-p/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$ pour $a > 0$.

III PUISSANCES RÉELLES

Le paragraphe précédent montre que si $a > 0$, on peut définir une fonction qui à tout nombre rationnel r associe le nombre réel a^r (qui sera strictement positif).
Si $a > 1$, cette fonction est strictement croissante et si $a < 1$, elle est strictement décroissante.

Tout nombre réel non rationnel x peut être encadré par des nombres décimaux de plus en plus rapprochés et dont la différence est aussi petite que l'on veut, l'écart entre les images par cette fonction pourra aussi être rendu aussi petit que l'on veut, ce qui permet de définir a^x comme la limite des images des bornes inférieures et supérieures lorsque les écarts tendent vers 0.

Par exemple, pour avoir un encadrement suffisamment précis de 2^π, il suffit d'avoir un encadrement assez précis de π : $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ donc $2^{3{,}14} < 2^\pi < 2^{3{,}15}$.

La fonction $x \mapsto 2^x$ est ainsi définie de $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$ dans $]0\,;+\infty[$ et elle est strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$. Il en est de même pour $x \mapsto \pi^x$.

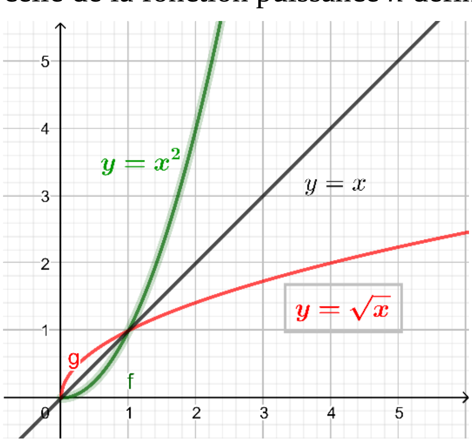
Tandis que la fonction $x \mapsto 0{,}5^x$ est définie et strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.

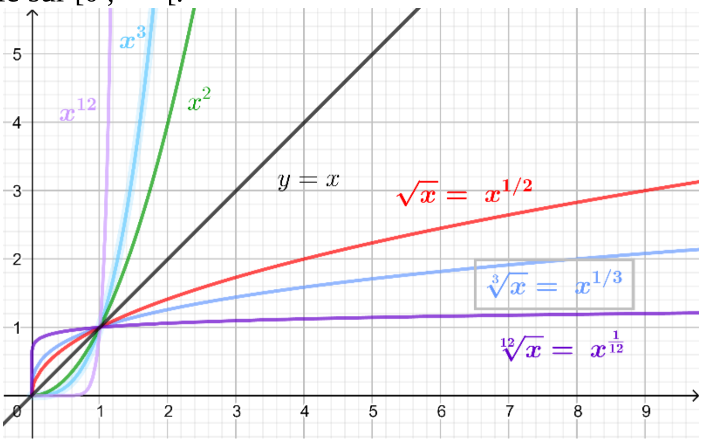
COMPLÉMENT : LA FONCTION RÉCIPROQUE

Considérons une fonction f définie sur l'ensemble de définition D_f et dont l'ensemble des images est I_f.
Le mot « fonction » impose que chaque élément de D_f ait une image et une seule.
Si chaque élément de I_f est l'image par f d'un seul élément de D_f , autrement dit s'il a un seul antécédent par f dans D_f , alors on peut définir une fonction g de I_f dans D_f qui à chaque élément de I_f associe son antécédent par f. On dit alors que g est la fonction réciproque de f. Schématiquement :

$D_f \xrightarrow{f} I_f$	$I_f = D_g \xrightarrow{g} D_f = I_g$	Remarque
$x \longmapsto f(x) = y$	$y \longmapsto g(y) = x$	$g(f(x)) = x$
$x \xleftarrow{g} y$		$f(g(y)) = y$

En passant de f à g, on a en quelque sorte inversé les variables de départ et d'arrivée.
Par conséquent, le graphique de g est obtenu à partir de celui de f en inversant les axes. Et si le repère est orthonormé, la courbe de g est obtenue par symétrie orthogonale de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
C'est ainsi que l'on peut définir et tracer la courbe de la fonction racine carrée à partir de celle de la fonction carré définie sur $[0 ; +\infty[$, et plus généralement celle de la fonction racine $n^{\text{ième}}$ à partir de celle de la fonction puissance n définie sur $[0 ; +\infty[$.





La démonstration de l'existence d'une fonction réciproque page 73 repose sur le théorème :

Si une fonction f est définie, continue et strictement croissante sur un intervalle I et si l'ensemble des images est un intervalle J, alors f admet une fonction réciproque g de J dans I.

L'expression « strictement croissante » peut être remplacée par « strictement décroissante ».
Une fonction est strictement croissante si les images sont dans le même ordre que les antécédents donc sa réciproque est aussi croissante. Elle est strictement décroissante si les images sont dans l'ordre inverse des antécédents donc sa réciproque est aussi strictement décroissante.

Le mot « continue » signifie précisément que l'image de tout intervalle est un intervalle, autrement dit, il n'y a pas de « trous » dans l'ensemble des images. Toutes les fonctions linéaires, affines, trinômes et plus généralement les polynômes sont des fonctions continues sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$
Il en est de même de la fonction racine $n^{\text{ième}}$.

La fonction inverse est définie, continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et l'ensemble des images est $]0 ; +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque définie de $]0 ; +\infty[$ dans $]0 ; +\infty[$; c'est la fonction inverse elle-même ! Or pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x} = x^{-1}$; on voit ainsi que l'on peut enrichir l'ensemble des puissances rationnelles avec des exposants négatifs à condition de réduire l'ensemble de définition à $]0 ; +\infty[$.

Remarquons aussi que la fonction réciproque de $x \mapsto x^{3/2}$ est $y \mapsto y^{2/3}$ car $(x^{3/2})^{2/3} = x$ et de façon plus générale, pour deux entiers n et d non nuls, la fonction réciproque de $x \mapsto x^{n/d}$ est $y \mapsto y^{d/n}$.

SYNTHÈSE SUR LES MÉTHODES

1. Utiliser un cas particulier

Dans la construction de l'autel, les habitants de l'île de Délos ont d'abord doublé la longueur de l'arête pour constater que cela ne donnait pas le résultat attendu. Il n'est pas rare d'utiliser une méthode d'essais-erreurs pour comprendre un problème. Et bien sûr, il n'est pas nécessaire de construire l'autel à chaque fois ! Il suffit de mener les calculs. Dans le premier problème (Pb1P66), rationaliser la démarche va conduire à introduire une fonction et préciser les conditions de la réussite.

Dans le quatrième problème (Pb4P68), pour trouver le coefficient correspondant à 1/12ème d'octave, il est proposé de chercher d'abord pour un 1/2, puis pour 1/2 de ce 1/2 donc pour 1/4, et enfin pour 1/3 de 1/4 donc pour 1/12ème. L'idée générale est de décomposer le problème en parties déjà maîtrisées. Traiter un cas plus simple peut s'avérer une bonne étape pour résoudre le problème en entier.

2. Choisir une lettre pour désigner une inconnue

Dans un texte, il est utile de repérer les différentes valeurs qui interviennent et de distinguer celles qui sont connues de celles qui sont inconnues. Cela conduit à mettre le problème en équation et peut permettre de le résoudre. Le calcul du taux moyen conduit à une équation du type $x^n = k$ dont la solution positive est $x = \sqrt[n]{k} = k^{1/n}$.

Dans d'autres cas, une méthode consiste à faire varier les constantes pour voir comment obtenir le résultat voulu. Ce qui amène à définir une fonction.

3. Définir et utiliser une fonction

Lorsque l'on s'intéresse à la correspondance entre deux variables, on cherche à définir une fonction. Si à chaque valeur de l'ensemble de départ correspond une seule valeur de l'ensemble d'arrivée, cette fonction existe ; et si, réciproquement, à chaque valeur de l'ensemble d'arrivée correspond une seule valeur de l'ensemble de départ, alors cette fonction est une bijection, et elle admet une fonction réciproque. C'est le cas de la fonction cube définie de $[\,0\,;+\infty\,[$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et la fonction réciproque est la racine cubique définie de $[\,0\,;+\infty\,[$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Voir le cours pages 73 et 74. Ainsi $\sqrt[3]{2}$ est défini, mais cette notation ne fait que d'assurer l'existence d'un nombre positif dont le cube est 2.

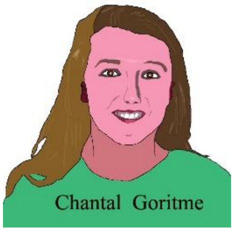
Dans la pratique, il sera indispensable d'en donner une valeur approchée, ce qui est un vrai problème mathématique… que la calculatrice résoud en une fraction de seconde !

Dans ce chapitre, nous terminons par définir les fonctions puissances $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$, mais il est important de comprendre la signification de $a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$ et $a^{-p/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$.
Ce qui permet certaines simplifications. La calculatrice fournira des valeurs approchées très précises des expressions du type a^x.

4. Réaliser et utiliser un graphique

Lorsque la fonction et sa fonction réciproque ne font pas partie des fonctions de référence connues ni implantées dans la calculatrice, après avoir déterminé le nombre de solutions, il reste à en trouver des valeurs approchées ou encadrements suffisamment précis. Un graphique peut donner rapidement une réponse approximative. Rappelons qu'on peut faire ce graphique sur sa calculatrice ou avec un logiciel en choisissant la fenêtre adaptée pour, ensuite, le réaliser ou l'imprimer sur papier. Le graphique peut ainsi guider les calculs.

5. Réaliser et utiliser un algorithme



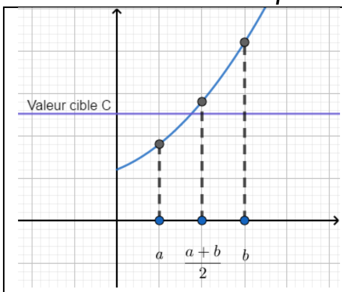
À partir d'un encadrement de la solution, il est possible de diviser par 2 la taille de l'intervalle, en observant où se trouve la solution par rapport au milieu de l'encadrement. Trouver les algorithmes les plus efficaces est encore aujourd'hui un objet de recherche. L'algorithme de recherche d'une solution par dichotomie est un algorithme classique qu'il est bon de connaître et de savoir programmer sur sa calculatrice ou son ordinateur.

Pour réaliser un algorithme, on peut commencer par le pratiquer soi-même plusieurs fois et noter ses étapes de calcul. Pour le vérifier, on peut noter dans un tableau les valeurs successives des variables. Il faut aussi se méfier des propriétés implicites qui sont vraies dans l'élaboration et qui pourraient ne pas l'être lors de l'utilisation.

Ainsi, l'algorithme présenté page 70 est prévu pour la fonction cube qui est une fonction strictement croissante. Pour une autre fonction, il faut changer l'instruction Y←X^3 pour y mettre la formule de la fonction, mais cet algorithme ne fonctionnera pas correctement si la fonction n'est pas croissante. Observons la situation où on connaît un intervalle $[a\,;b]$ contenant la solution cherchée de l'équation $f(x) = \mathrm{C}$, et on cherche à réduire de moitié la longueur de cet intervalle.

On calcule $x = \frac{a+b}{2}$ puis l'image de x par f.

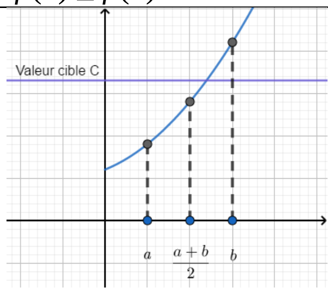
Si la fonction f est croissante sur $[a\,;b]$: $f(a) \leq f(b)$



$f(b) - f(a) \geq 0$
et
$f(x) - \mathrm{C} \geq 0$

Le produit est positif

Si $f(x) \geq \mathrm{C}$, la solution est dans $[a\,;x]$.

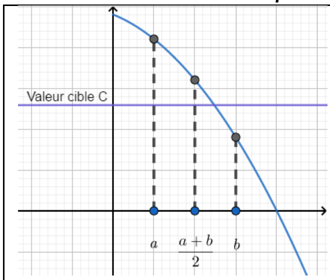


$f(b) - f(a) \geq 0$
et
$f(x) - \mathrm{C} \leq 0$

Le produit est négatif

Si $f(x) \leq \mathrm{C}$, la solution est dans $[x\,;b]$.

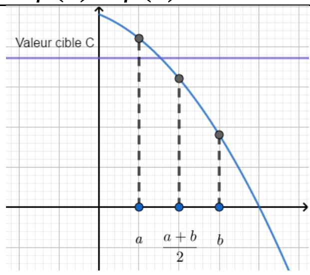
Si la fonction f est décroissante sur $[a\,;b]$: $f(a) \geq f(b)$



$f(b) - f(a) \leq 0$
et
$f(x) - \mathrm{C} \geq 0$

Le produit est négatif

Si $f(x) \geq \mathrm{C}$, la solution est dans $[x\,;b]$.



$f(b) - f(a) \leq 0$
et
$f(x) - \mathrm{C} \leq 0$

Le produit est positif

Si $f(x) \leq \mathrm{C}$, la solution est dans $[a\,;x]$.

Le signe de $[f(b) - f(a)]$ indique les variations de f si elle est monotone sur $[a\,;b]$, et celui de $[f(x) - \mathrm{C}]$ indique la position de $f(x)$ par rapport à la valeur cible donc l'intervalle $[a\,;x]$ ou $[x\,;b]$ à retenir.

Si $[f(x) - \mathrm{C}]\,[f(b) - f(a)] \geq 0$, il faut retenir l'intervalle $[a\,;x]$, on affecte x à b.

Si $[f(x) - \mathrm{C}]\,[f(b) - f(a)] \leq 0$, il faut retenir l'intervalle $[x\,;b]$, on affecte x à a.

Dans le cas où il y a égalité, $f(x) = \mathrm{C}$, on a trouvé la solution de l'équation (en fait avec la précision de la calculatrice ou de l'ordinateur), et en affectant à la fois x à b et x à a, l'intervalle devient $[a\,;b]$ avec $a = b = x$. S'il y a un test d'arrêt dès que la différence $(b - a)$ est assez petite alors la boucle s'arrête parce que $b - a = 0$.

Ainsi dans l'algorithme on remplacera l'instruction **Si Y > C alors B←X sinon A←X** par les deux instructions :

Si [Y – C]*[V – U] ≥ 0 alors B←X
Si [Y – C]*[V – U] ≤ 0 alors A←X
et avant le début de la boucle il faudra affecter $f(a)$ à U et $f(b)$ à V.