Problème N°1 Les savons

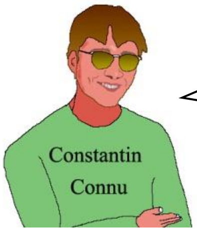
Pour un achat par correspondance, un lot de 10 savons coûte 20 €, et un lot des 30 savons coûte 32 €.

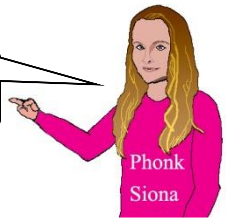
1) Explique pourquoi ces données permettent d'affirmer que le coût n'est pas proportionnel au nombre de savons.

2) En fait, à un prix proportionnel au nombre de savons, on a ajouté les frais de transport. Ceux-ci sont indépendants du nombre de savons.

- **a)** Quel doit être le coût d'un lot de 50 savons (frais de port compris) ?
- **b)** Quel est le prix d'un savon supplémentaire ?
- **c)** Trouve une formule pour le prix de x savons (frais de port compris) ?

Tu peux chercher par toi-même ou t'inspirer des méthodes ci-dessous.





Après avoir cherché par toi-même*, puis avoir échangé avec tes voisins, s'il s'agit d'un travail de groupe, tu peux regarder les pages suivantes où les méthodes sont détaillées.*

Compare ces méthodes et assure-toi qu'elles donnent les mêmes résultats.

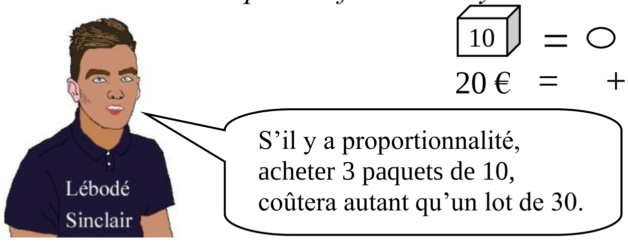
Dans les pages suivantes, tu trouveras une grande quantité de problèmes où tu pourras réutiliser ces méthodes, puis une synthèse sur les notions mathématiques utilisées ici.

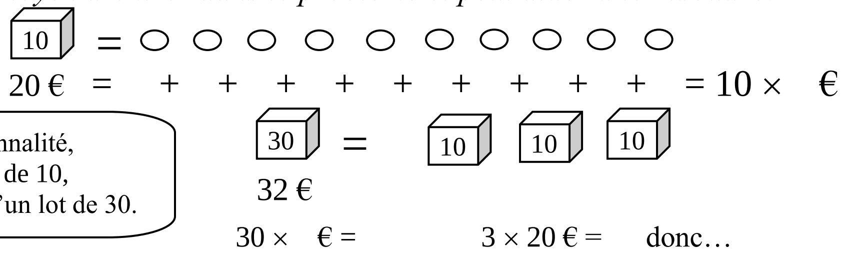
Problème 1 *Détails des méthodes*

1) Proportionnalité ou non ?

Dessiner, représenter

Même un dessin un peu naïf est un moyen d'entrer dans le problème et peut aider à le résoudre.





Utiliser un tableau

	savons	coût
Commande 1	10	20 €
Commande 2	30	32 €

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?
Si oui, 10 × 32 et 30 × 20 *sont égaux.*

Utiliser des fractions

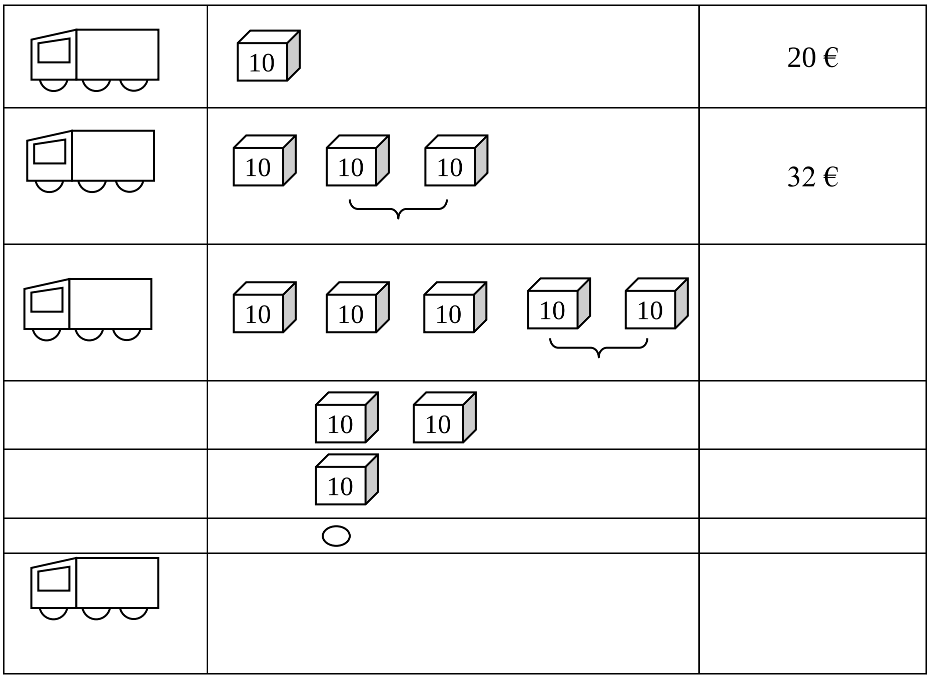
$\frac{20}{10} =$

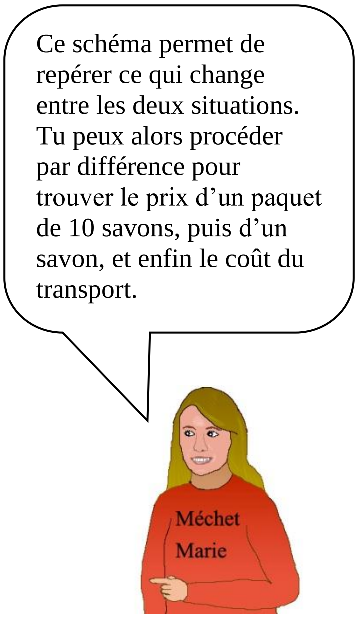
$\frac{32}{30} \approx$

Sont-elles égales ?

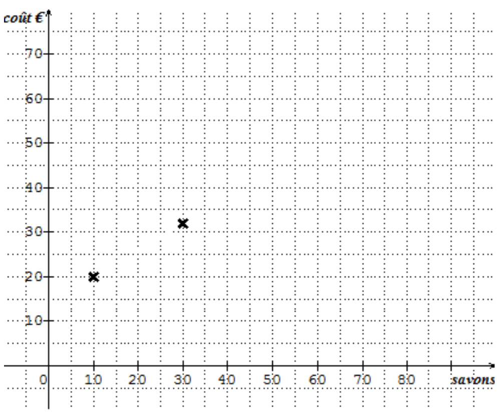
2) Représentons le transport et les boîtes de savons.

Schématiser





Faire un graphique



Nous avons deux informations que nous pouvons traduire par deux points sur le graphique.

Peut-on tracer une droite pour représenter la situation ?

Si oui, à quoi correspond l'intersection de cette droite avec l'axe vertical ? et le coefficient directeur (c'est-à-dire l'augmentation de prix divisé par le nombre de savons supplémentaires) ?

Finalement, qu'est-ce qui justifie de tracer une droite ?
Comment répondre aux questions de façon approximative ?
Et de façon exacte ?

Calculer astucieusement avec un tableau

1) Si le coût est proportionnel au nombre de savons et que la commande de 10 savons coûte 20 €, quel doit être le coût de 30 savons ? Le coût est-il proportionnel au nombre de savons ?

2) Combien de savons y a-t-il en plus dans la deuxième commande ? Et combien cela coûte-t-il en plus ?
Combien faut-il ajouter de savons pour une commande de 50 savons par rapport à 30 ?
Combien cela va-t-il coûter en plus ?
Combien coûterai 10 savons en plus ? Et 1 seul savon supplémentaire ?
Dans la première commande, quel est le coût des 10 savons sans les frais de transport ?
Quel est le montant des frais de transport ? Conclure et vérifier.
On peut aussi utiliser un tableau de valeurs :

Nombre de savons	10	30	50	60	61	10 + ……….. = x
Coût en €	20	32				y = 20 + …

Utiliser des inconnues

Soit T le coût du transport et u le coût d'un savon en euros.
Le coût de x savons est $C = u\,x + T$.
La première commande correspond à $x = 10$ et $C = 20$, et la deuxième à $x = 30$ et $C = 32$.
Ecrire les deux équations. Effectuer la différence membre à membre, cela permet d'éliminer T de l'équation, on peut alors trouver u. Puis en déduire T. Vérifier la cohérence des résultats avec les données. Le coût de 0 savons est-il nul ? À quoi correspond-il ?

Utiliser une fonction

On considère que le coût est une fonction affine f du nombre de savons.
Il s'agit de déterminer a et b tels que la $f(10) = 20$ et $f(30) = 32$ avec $f(x) = a\,x + b$.
Que représente b ? Que représente a ? Quelles sont les valeurs de a et b ?
Vérifiez la cohérence des résultats avec les données initiales.
Qu'est-ce qui justifie que la fonction est affine ?

Répéter la même opération d'étape en étape

savons :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
coût :		20 €		32 €					

Détailler savon par savon :

savons :	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
coût :		20 €										

Compare et utilise plusieurs de ces méthodes
A la page suivante, tu trouveras plusieurs problèmes à traiter avec les mêmes méthodes.
Si ta classe travaille par groupe, tu peux rejoindre des élèves qui ont choisi la même méthode que toi (pas plus de 4 élèves par groupe).
Après avoir résolu plusieurs problèmes, dispersez-vous pour rejoindre des groupes constitués d'élèves ayant travaillé sur des méthodes différentes et comparez vos travaux. Expliquer ta méthode aux autres est toujours un moyen de mieux la comprendre, et entendre celles des autres te permet de progresser sur la notion étudiée.
Pour aller vers une synthèse, le problème 1 est corrigé page 10 et la synthèse est juste après.

Voici 5 autres problèmes à résoudre avec les mêmes méthodes que le problème 1.

<u>Problème N°2</u> Le sac de billes

Pour un achat par correspondance, un lot de 100 billes coûte 8 €, et un lot des 150 billes coûte 9,50 €.

a) Quel doit être le prix d'un lot de 125 billes ?
b) Quel doit être le prix d'un lot de 300 billes ? De 105 billes ? De 121 billes ? De x billes ?

<u>Problème N°3</u> Les clefs USB

Une grande association achète des clefs USB vendus comme cadeaux d'entreprise.
Le prix comporte les frais de port et autres frais fixes, et un coût proportionnel au nombre de clefs USB commandées. Pour une première commande de 124 clefs USB, l'association a payé 814 € et pour une deuxième commande de 224 clefs USB, elle a payé 1464 €.

a) Combien a-t-elle payé en plus lorsque la commande a augmenté de 100 clefs USB ?
b) Combien payera-t-elle pour 324 clefs USB ?
c) Combien payera-t-elle pour 174 clefs USB ?
d) Combien coûte chaque clef USB supplémentaire ?
e) Combien payera-t-elle pour x clefs USB ?

<u>Problème N°4</u> Le gasoil

Pour faire remplir sa cuve de gasoil pour le chauffage, on paye un prix fixe pour le déplacement et un prix proportionnel à la quantité de gasoil.
Le prix total pour 100 litres de gasoil est de 154 € et pour 190 litres, il est de 262 €.

a) Quel est le prix total pour 120 litres de gasoil ?
b) Déterminer le prix total pour x litres de gasoil.

<u>Problème N°5</u> À minuit dans le milieu

A minuit quinze, le suspect était à 150 km de Paris. A 0h50, il était à 220 km de Paris.
Il se déplaçait sur une autoroute (dans un seul sens).

a) Quelle était sa vitesse moyenne en km/min puis en km/h ?
b) En supposant sa vitesse constante, à quelle distance de Paris était-il à 0 h 40 min ?
c) A quelle distance de Paris était-il à minuit et 23 minutes ?
d) A quelle distance de Paris était-il à l'instant t en minutes à partir de minuit ($15 \leq t \leq 50$) ?
Donne la formule de la fonction f qui à t associe la distance en km entre le suspect et Paris.

Si tu trouves le problème 5 difficile, observe que ce sont les mêmes calculs que le problème 6.

<u>Problème N°6</u> Les boîtes

Pour 15 boîtes, le coût total était de 150 €. Pour 50, il était de 220 €.

a) Quel était le coût moyen de chaque boîte supplémentaire entre 15 et 50 boîtes ?
b) En supposant la différence de coût proportionnelle à la différence de nombre de boîtes, quel était le coût total pour 40 boîtes ?
c) Quel était le coût total pour 23 boîtes ?
d) Quel était le coût total pour n boîtes ($15 \leq n \leq 50$) ?
Donne la formule de la fonction f qui à n associe le coût de n boîtes.

Voilà une méthode originale : traduire un problème dans un autre cadre ! Mais il faut noter ici que le problème 5 est posé dans un cadre où la fonction est continue, alors que le problème 6 ne concerne que des nombres entiers et peut être traité avec une suite arithmétique.

Les problèmes suivants font intervenir plusieurs fonctions (ou plusieurs suites arithmétiques).

Problème N°7   Le meilleur tarif

Deux entreprises : « Petit Avion » (PA) et « Grand Train » (GT) proposent leurs tarifs pour fournir des tee-shirts avec le logo d'une association.

PA fournit le tee-shirt à 7,50 € pièce et facture 30 € les frais de transport de l'ensemble des tee-shirts.

GT fournit les tee-shirts à 8 € pièce mais le transport ne coûte que 10 €.

On note $f(x)$ et $g(x)$ le coût de x tee-shirts, transport compris, respectivement par PA et GT.

1.

a) Donnez les expressions de $f(x)$ et $g(x)$

b) Pour quelle quantité de tee-shirts le coût total est-il égal pour PA et GT ?

c) Dans quels cas PA est-il plus intéressant pour l'association ?

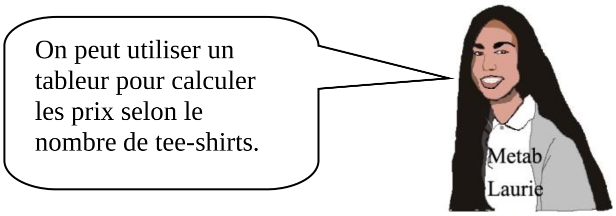
2.

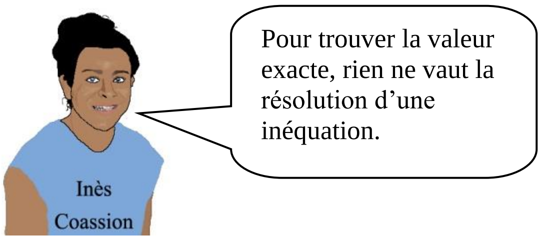
L'entreprise Lou Ja (LJ) propose 20 tee-shirts pour 230 € et 40 pour 350 €.

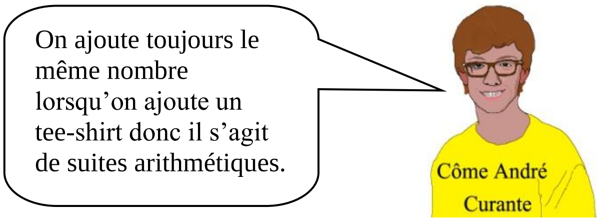
a) Le prix proposé par LJ est-il proportionnel au nombre de tee-shirts ?

b) En considérant que le prix est une fonction affine du nombre x de tee-shirts, déterminez la formule $h(x)$ du prix de x tee-shirts achetés à Lou Ja.

c) La proposition de LJ peut-elle être intéressante par rapport à PA et GT ?
Si oui, précisez pour quels nombres x de tee-shirts.







Problème N°8   Le cinéma Colombus

Le cinéma Colombus vend chaque place 15 €. Cependant on peut prendre une carte d'abonnement pour un mois à 15 € qui donne droit à 20 % de réduction pendant le mois.

On peut aussi prendre une carte privilège à 180 € par an qui permet de payer seulement 10 € la place.

Combien paye-t-on en tout, carte comprise, pour x séances dans le mois avec la carte d'abonnement ?

A partir de combien de séances dans le mois cette carte est-elle plus avantageuse que le prix à 15 € la place ?

A partir de combien de séances dans l'année la carte privilège est-elle plus intéressante que le prix à 15 € ?

Problème N°9   Où et quand se sont-ils croisés ?

Arthur habite à Mauron à 7,2 km de son ami Bastien qui habite à Gaël.

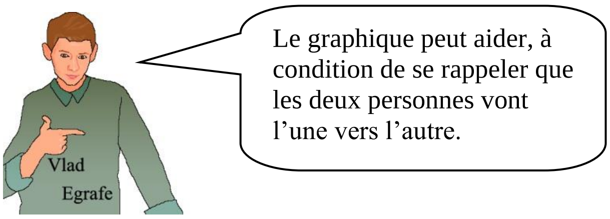
Arthur part en vélo de chez lui à 10 heures pour aller chez Bastien. Il roule à la vitesse de 0,3 km/min.

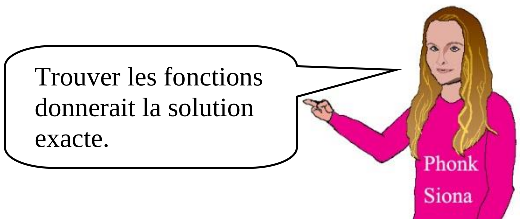
A 10 heures le père de Bastien, Patrice, part en voiture de Gaël vers Mauron à la vitesse de 1,5 km/min.

a) A quelle heure Arthur arrivera-t-il chez Bastien ?

b) Détermine à quelle heure et à quelle distance de sa maison Arthur croisera Patrice.

c) Transforme les vitesses du vélo et de la voiture en km/h.





Les indications pour les problèmes 7, 8 et 9 sont détaillées dans les pages suivantes.

Problème 7 Le meilleur tarif *Détails des méthodes proposées*

Schématiser la situation :

Pour « Petit Avion » :

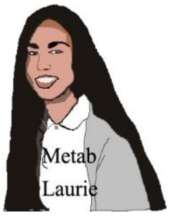
Nombre de tee-shirts $x \xmapsto{\times 7{,}50} \quad \xmapsto{+30} \quad = f(x)$

Pour « Grand Train » :

Nombre de tee-shirts $x \xmapsto{\times 8} \quad \xmapsto{+10} \quad = g(x)$

Utiliser un tableur :

	A	B	C
1		PA	GT
2	0	30	10
3	1	37,5	=C2+8
4	2	45	
5	3	52,5	
6	4	60	



Dans un tableur, on utilise une colonne pour indiquer le nombre de tee-shirts (à partir de 0), puis dans les premières cases, on écrit le prix du transport, et ensuite, pour passer d'une ligne à la suivante, on ajoute toujours 7,50 pour PA et 8 pour GV avec une formule comme dans la case C3 à recopier vers le bas.

Réaliser un graphique :

La difficulté pour réaliser un graphique, c'est de bien choisir les unités sur les axes. Il est souvent pratique de réaliser d'abord le graphique à la calculatrice pour trouver la fenêtre adaptée. Ici, on pourra prendre $0 \leq x \leq 60$ et $0 \leq y \leq 500$, mais pour l'axe horizontal, il vaut mieux éviter 3 unités par cm et prendre 4 unités par cm ; pour l'axe vertical, 20 unités par cm permettra de placer toutes les dizaines et facilitera le tracé et la lecture.

Un graphique précis permet d'avoir une valeur approchée de la réponse, mais seul le calcul garantie la valeur exacte.

Résoudre une équation ou inéquation :

Résoudre $f(x) = g(x)$ équivaut à résoudre $f(x) - g(x) = 0$.

Résoudre $-0{,}5\,x + 20 = 0$, c'est retrouver la valeur de x qui donne 0, on peut « remonter le schéma » :

$x \xmapsto{\times(-0{,}5)} -0{,}5\,x \xmapsto{+20} -0{,}5\,x + 20$

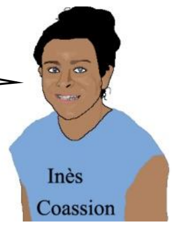
$\ldots\ldots \xleftarrow{:(-0{,}5)} \ldots\ldots \xleftarrow{-20} 0$

$-0{,}5\,x + 20 = 0$

équivaut à : $-0{,}5\,x = \ldots$

$x = \ldots$

PA est plus intéressante que GT lorsque $f(x) < g(x)$.



On peut résoudre les inéquations comme les équations, mais attention, lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre strictement négatif, le sens de l'inéquation change.

Utiliser une fonction :

Pour Lou Ja, déterminer le prix d'un tee-shirt supplémentaire puis le prix du transport.

Il s'agit aussi de déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la fonction affine.

Le graphique donne aussi une réponse approximative rapidement.

Définir une suite numérique :

Si on considère que le prix pour Lou Ja, est une suite arithmétique (p_n) de raison r, alors $u_{20} = 230$ et $u_{40} = 350$.

De plus, $u_{40} = u_{20} + (40 - 20)\,r$. On peut en déduire r et utiliser le tableur.

Problème 8 Le cinéma Colombus *Indications*

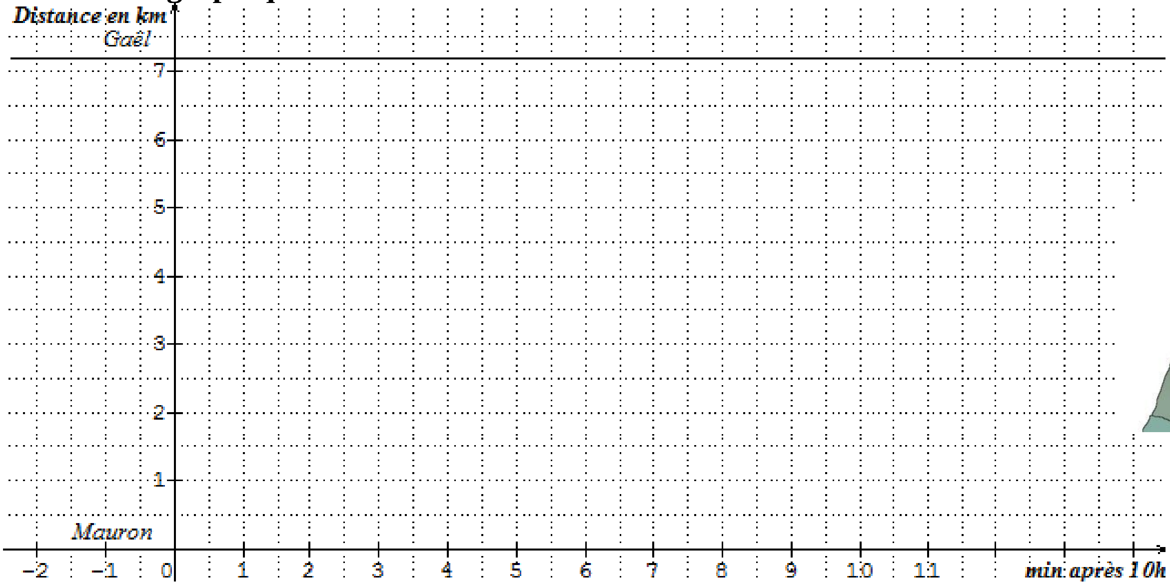
Il y a 3 tarifs, dans le premier, le prix est proportionnel au nombre de places.

Pour le deuxième, il est utile de calculer le prix d'une place à tarif réduit : $15 - \frac{20}{100}15$, il faut le multiplier par le nombre de places et l'ajouter au prix de la carte.

Pour la carte privilège, la fonction est affine. C'est aussi une suite arithmétique de raison 10.

Problème 9 Où et quand se sont-ils croisés ? *Détails des méthodes proposées*

Réaliser un graphique :



L'axe des ordonnées est facilement gradué ici par 1 cm pour 1 km, à partir de Mauron.
Les vitesses des mobiles donnent les coefficients directeurs, celui d'Arthur est positif, mais celui de Patrice est négatif. L'ordonnée à l'origine correspond à la position de chaque mobile par rapport à Mauron à 10 h.
A 10 h, Patrice est à 7,2 km de Mauron, puis chaque minute, cette distance diminue de 1,5 km, donc au bout de *x* minutes, il est à ………………….. km de Mauron.

Définir une fonction :

Trouver les fonctions f et g qui correspondent à chaque mobile est ici assez facile.
Lorsqu'ils se croisent, Arthur et Patrice sont au même instant à la même distance de Mauron donc $f(x) = g(x)$.
La solution donne l'instant en minutes après 10 h où les deux personnes se croisent, et la distance est leur image commune par f et g.

Dans les problèmes suivants, le graphique est assez facile à faire mais les fonctions doivent être déterminées avec les méthodes du problème 1.

Problème N°10 Arnes et Buluc

Les villes Arnes et Buluc sont distantes de 150 km. Le train N°1 part de Arnes à 8 h et arrive à Buluc à 9 h 40 min. Le train N°2 part de Buluc à 8 h 20 min et arrive à Arnes à 9 h 20 min.
A quel instant les deux trains se croiseront-ils ? (La vitesse des trains est constante pendant le trajet).

Problème N°11 Alizée et Biba

Les villes de Digoin et Château sont distantes de 8 km. Alizée est allée à pied de Digoin à Château.
Elle est partie à 9 h et en marchant régulièrement, elle est arrivée à 10 h 20 min à Château.
Elle a croisé son amie Biba qui venait de Château et se rendait à la pharmacie à Digoin en vélo, mais Biba ne s'est pas arrêtée pour ne pas perdre son rythme.
Biba était partie à 9 h 40 min et elle est arrivée à la pharmacie pile à 10 h.
A quelle heure, Alize et Biba se sont-elles croisées (à 2 minutes près) ?
Et à quelle distance de Digoin cela s'est-il produit (à 0,5 km près) ?
Dans le problème suivant, le graphique est assez facile à faire mais les fonctions sont plus difficiles à déterminer.

Problème N°12 Les aiguilles de l'horloge

Sur le cadran d'une horloge, combien de fois la grande aiguille est-elle exactement au-dessus de la petite, de 0 h (inclus) à 12h (exclus) ?
A quels instants à une seconde près ?

Des indications pour réaliser les graphiques des problèmes 10, 11 et 12 sont données à la page suivante.

Problème 10 Arnes et Buluc *indications* **pour réaliser un graphique** :

L'axe des ordonnées (vertical) sera facilement gradué ici par 1 cm pour 10 km, à partir de Arnes.
L'axe des abscisses (horizontal) sera gradué en minutes à partir de 8h ; pour pouvoir graduer jusqu'à 9h40, soit 100 minutes après 8h, sur 20 cm, on peut prendre 5 minutes par cm.
Ici, on commence par placer les deux points connus pour chaque train, et on les relie puisque la vitesse est constante pendant les trajets.
Pour le train N°1, la distance de Arnes est proportionnelle au temps à partir de 8h, et le coefficient de proportionnalité est la vitesse en km/min. Pour le train N°2, il faut calculer la vitesse en km/min, puis observer que chaque minute après 8 h 20 min, sa distance par rapport à Arnes diminue à partir de 150 km.
La formule est donc de la forme : $g(x) = 150 - v\,(x - 20)$.
La solution de l'équation doit correspondre au graphique.

Problème 11 Alizée et Biba *indications* **pour réaliser un graphique** :

L'axe des ordonnées sera facilement gradué ici par 1 cm pour 1 km, à partir de Digoin.
L'axe des abscisses sera gradué en minutes à partir de 9h ; pour pouvoir graduer jusqu'à 10 h 20 min, soit 80 minutes après 9h, sur 20 cm, on peut prendre 4 ou 5 minutes par cm.
On place les points connus pour Alizé et Biba et on les relie.
Le point d'intersection donne la réponse avec la précision demandée.

Problème 12 Les aiguilles de l'horloge *indications* **pour réaliser un graphique** :

Pour résoudre le problème, on va mesurer l'angle de chaque aiguille par rapport à la position à 0h00, de 0° à 360°, en fonction du temps en heures, sur une période de 12 heures.
La petite aiguille progresse régulièrement de 0° à 0 h jusqu'à 360° à 12 h.
Pour l'axe des abscisses, on pourra prendre 1 cm pour 1 h, et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 20 °.
Pour le déplacement de la grande aiguille, on peut définir une nouvelle fonction pour chaque heure :
g_0 est définie sur [0 ; 1], g_1 sur [1 ; 2], g_2 sur [2 ; 3] … , g_{11} sur [11 ; 12].

Voici maintenant un problème de statistique :

<u>Problème N°13</u> La mare aux poissons

On a prélevé des poissons dans une mare et on a noté leur taille en cm.

Taille (cm)	[0 ; 2 [	[2 ; 6 [	[6 ; 10 [	[10 ; 12 [	[12 ; 14 [	[14 ; 18]
Nombre	6	16	20	16	10	12
Effectif cumulé croissant	6	6 + 16 = 22	22 + 20 =			
Pourcentage cumulé croissant						100 %

1)
- **a)** Reproduis et complète le tableau.
- **b)** Réalise le polygone des effectifs cumulés croissants.
  Pour cela, graduer l'axe des abscisses de 0 à 18 et l'axe des ordonnées de 0 à l'effectif total.
  Placer le premier point dont l'abscisse 0 est la première valeur du premier intervalle, et l'ordonnée est 0, et relier ce point à (2 ; 6) puis celui-ci à (6 ; 22)…
- **c)** Calcule 50 %, 25 % et 75 % de l'effectif total. Indique ces valeurs sur l'axe des ordonnées.
- **d)** Détermine graphiquement la médiane, le premier et le troisième quartile.

2)
- **a)** Trouve la formule de la fonction affine f représentée par la droite qui passe par A(6 ; 22) et B(10 ; 42).
- **b)** Trouve l'antécédent de 40 par f.
- **c)** Que représente le nombre trouvé à la question précédente pour les données de cet exercice ?

Les problèmes suivants concernent des suites arithmétiques sauf le problème 19 qui concerne les fonctions affines.

Problème N°14 Petit Jacques

Petit Jacques a 10 € d'argent de poche par mois. Il a déjà 48 € sur son livret de caisse d'épargne.
S'il économise 8 € par mois, au bout de combien de mois pourra-t-il s'acheter un jeu à 85 € ?

Problème N°15 Les verbes irréguliers

Arthur a décidé d'apprendre les 122 verbes irréguliers de son livre d'anglais. Pour cela, il a appris aujourd'hui les 11 premiers. Demain, et chaque jour à l'avenir, il en apprendra 3 nouveaux, tout en révisant ceux qu'il a déjà appris. Dans combien de jours connaîtra-t-il les 122 verbes irréguliers ?
NB : Aujourd'hui = dans 0 jours, Demain = dans 1 jour, Après-demain = dans 2 jours, etc...

Problème N°16 Les contrats d'assurance

Victor vend des contrats d'assurance. Il trouve 20 nouveaux clients chaque mois.
L'agence qui l'emploie avait 230 clients au mois de janvier lorsqu'elle l'a recruté.
Elle avait donc 250 clients au mois de février. Combien avait-elle de clients en décembre ?

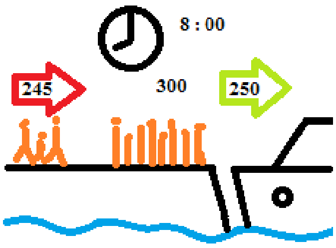
Problème N°17 Le recensement

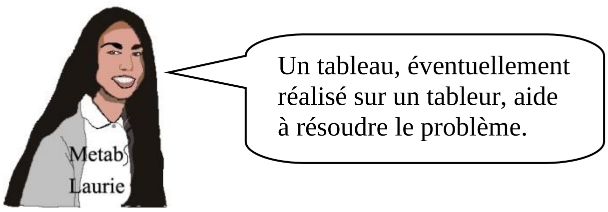
On a effectué, tous les 3 ans, des recensements de la population d'une commune.
Si le 17ème relevé correspond à l'année $u_{17} = 1974$, quel est le numéro du relevé de l'année 1986 ?
A quelle année u_1 correspond le premier relevé ?

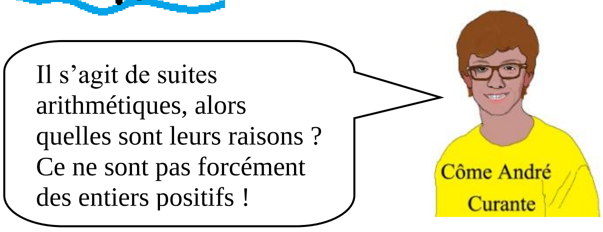
Problème N°18 La vedette de Bréhat

Un jour en plein été, 300 personnes attendent la première vedette pour l'île de Bréhat à 8h du matin.
Il y a une vedette chaque demi-heure.
Chaque vedette emporte 250 passagers.
Mais il arrive 245 nouveaux passagers toutes les demi-heures jusqu'à 12 h.
On note h_n l'heure de passage de la n-ième vedette, avec $h_1 = 8$ et $h_2 = 8{,}5$ (pour 8 h 30 min).
On note p_n le nombre de passagers qui attendent sur le quai au n-ième passage. Ainsi $p_1 = 300$.

a) A quelle heure passe la 5ème vedette (c'est-à-dire h_5) ?
b) Quel est le numéro d'ordre de la vedette qui passe à 12 h ?
c) Montrez que $p_{n+1} = p_n - 5$. Quelle est la nature de la suite (p_n) et quelle est sa raison ?
d) Combien de passagers attendent sur le quai la vedette qui passe à 12 h ?







Problème N°19 Démontrer un théorème

Une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = a\,x + b$.
Démontre que si f est affine alors les écarts sur les images y sont proportionnels aux écarts sur les antécédents x autrement dit, il existe un réel k tel que pour tous les réels x_A et x_B, $f(x_B) - f(x_A) = k\,(x_B - x_A)$.
Démontre la réciproque : Si pour une fonction f, les écarts sur les images y sont proportionnels aux écarts sur les antécédents x, alors la fonction f est affine.

REPONSES

Problème 1 Les savons page 1

1) Le prix n'est pas proportionnel au nombre de savons parce que le prix de 30 savons n'est pas le triple du prix de 10 savons.

2) a) De 10 savons à 30 savons, on a ajouté 20 savons et le prix a augmenté de 20 € à 32 € soit 12 €, tandis que le prix du transport est resté le même. Ainsi le prix de 20 savons supplémentaires est 12 €.

Alors le prix de 50 savons, soit 30 + 20, est 32 + 12 = 44 €.

b) Le prix de 20 savons supplémentaires est 12 € donc le prix d'un savon supplémentaire est 12/20 = 0,6 €

c) Le prix de x savons est le prix 10 savons + le prix des savons ajoutés après 10 soit :

$p(x) = 20 + 0,6\,(x - 10) = 0,6\,x + 14$

On peut aussi retrouver le coût du transport en retranchant le coût des 10 savons dans la première commande :

$20 - 10 \times 0,6 = 20 - 6 = 14$.

Vérification de la formule avec les données initiales : On a bien alors $p(10) = 20$ et $p(30) = 32$.

La notion de **fonction** intervient pour choisir le bon modèle de fonction.

La fonction est affine parce que le coût supplémentaire $y_B - y_A$ de x_A à x_B savons est proportionnel à $x_B - x_A$. C'est la propriété caractéristique des fonctions affines : les écarts sur la variable image sont proportionnels aux écarts sur la variable initiale. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur de la droite qui représente la fonction affine, ici c'est le coût d'un savon supplémentaire (appelé aussi coût marginal).

Cette proportionnalité des écarts justifie le calcul effectué avec **le tableau de valeurs**.

+ $(x - 10)$

+20 +20 +10 +1

Nombre de savons	10	30	50	60	61	$10 + (x - 10) = x$
Coût en €	20	32	44	50	50,60	$y = 20 + 0,6\,(x - 10)$

+12 +12 + 6 + 0,6

$+0,6(x - 10)$

Pour 10 savons supplémentaires, on calcule 12/2 = 6 et pour un seul : 6/10 = 0,6.

Introduire des lettres pour désigner les inconnues conduit à la résolution d'un système d'équations :

Dans cette colonne, écrire des systèmes équivalents avec toujours au moins autant d'équations que d'inconnues.

$$\begin{cases} 30a + b = 32 \\ 10a + b = 20 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times (1) \\ \times (-1) \end{array} \right.$$

On remplace l'une des équations par une équation équivalente à la combinaison des deux autres.

Le système équivaut à :

$$\begin{cases} a = 0,6 \\ 10a + b = 20 \end{cases}$$

On substitue 0,6 à a dans la deuxième équation.

$$\begin{cases} a = 0,6 \\ 10(0,6) + b = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,6 \\ b = 14 \end{cases}$$

Ainsi le coût de x savons est $0,6\,x + 14$ euros.

Cette colonne sert aux calculs intermédiaires.

Opérations

$30\,a + b = 32$

$-10\,a - b = -20$

$20\,a + 0 = 12$ autrement dit $a = 0,6$

Les équations suivantes sont équivalentes :

$10\,(0,6) + b = 20$

$6 + b = 20$

$b = 20 - 6$

$b = 14$

Vérification :

$$\begin{cases} 30(0,6) + 14 = 32 \\ 10(0,6) + 14 = 20 \end{cases}$$

Introduire une suite de nombres

savons :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
coût :	14	20 €	26	32 €	38	44	50	56	62

+ 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6

Si 10 savons supplémentaires augmentent le prix de 6 €, alors chaque savon supplémentaire, augmente le prix de 0,60 €. Le coût de x savons est $0,6\,x + 14$ euros.

Problème 2 Le sac de billes page 4

On voit que 50 billes en coûtent 1,50 € donc 25 billes en plus coûtent 0,75 € en plus et 1 bille en plus coûte 0,03 € en plus. On peut ainsi compléter le tableau :

Billes	100	150	125	300	105	121	$100 + (x - 100) = x$
Coût	8	9,50	8,75	14	8,15	8,63	$8 + 0{,}03\,(x - 100) = 0{,}03\,x + 5$

Problème 3 Les clefs USB page 4

a) 650 € **b)** 1 464 + 650 = 2 114 € **c)** 814 + 650/2 = 1 139 € **d)** 650/100 = 6,50 €

e) Le prix en euros pour x clefs USB sera : $814 + 6{,}5\,(x - 124) = 6{,}5\,x + 8$.

Problème 4 Le gasoil page 4

Entre les commandes de 100 litres et de 190 litres, la quantité de gasoil augmente de 90 litres et le prix de 108 €, soit 1,2 € par litre supplémentaire.

Le prix pour 120 litres (100 + 20) est donc $154 + 20 \times 1{,}2 = 154 + 24 = 178$ €.

Le prix pour x litres sera alors de $154 + (x - 100) \times 1{,}2 = 154 + 1{,}2\,x - 120 = 1{,}2\,x + 34$.

Problème 5 À minuit dans le milieu page 4

a) 2 km/min soit 120 km/h

b) A 200 km de Paris.

c) $150 + (23 - 15) \times 2 = 150 + 16 = 166$ km.

d) $D = 2\,(t - 15) + 150$ soit $f(t) = 2\,t + 120$.

Problème 6 Les boîtes page 4

a) 2 € par boîte.

b) Le coût de 40 boîtes sera de 200 €.

c) $150 + (23 - 15) \times 2 = 150 + 16 = 166$ €.

d) $f(n) = 2\,(n - 15) + 150$ soit $f(n) = 2\,n + 120$.

Problème 7 Le meilleur tarif page 5

1.

a) $f(x) = 7{,}5\,x + 30$ et $g(x) = 8\,x + 10$

b) Le coût total est égal pour PA et GT lorsqu'on commande 40 tee-shirts.

c) PA est plus intéressant lorsqu'on commande plus de 40 tee-shirts.

2.

a) Le prix proposé par LJ n'est pas proportionnel au nombre de tee-shirts car 350 n'est pas le double de 230 ...

b) Le prix pour chaque unité supplémentaire est 120/20 = 6 et $h(x) = 230 + 6\,(x - 20)$
$h(x) = 6\,x + 110$.

c) La proposition de LJ peut être intéressante par rapport à PA et GT puisque le prix à l'unité est plus bas, au bout d'une certaine quantité, le coût total sera moins élevé.
On résout $h(x) < f(x)$ et on aboutit à $x > 80/1{,}5 \approx 53{,}3$ donc LJ est plus intéressante à partir de 54 tee-shirts.

Problème 8 Le cinéma Colombus page 5

Pour x séances dans le mois avec la carte d'abonnement, on paye $15 + 0{,}8 \times 15\,x =$ **$12\,x + 15$**

$12\,x + 15 < 15\,x$ équivaut à $x > 5$.

La carte d'abonnement est intéressante pour plus de 5 séances dans le mois.

$180 + 10\,x < 15\,x$ équivaut à $x > 36$ (soit 3 séances par mois).

La carte Privilège est intéressante pour plus de 36 séances dans l'année.

(Elle est plus intéressante que l'abonnement si on prend l'abonnement 8 mois dans l'année et au moins 36 séances dans l'année).

Problème 9 Où et quand se sont-ils croisés ? page 5

a) Pour faire 7,2 km à la vitesse de 0,3 km/min, Arthur mettra 7,2/0,3 = 24 minutes, il arrivera à 10 h 24 min.

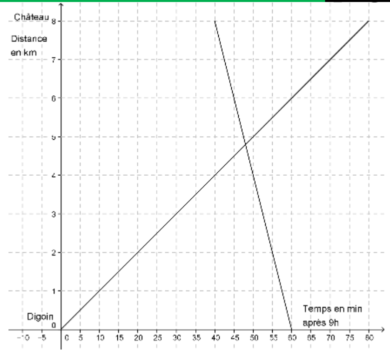
b) Au bout de t minutes, Arthur est à $0{,}3\,t$ km de chez lui et Patrice à $7{,}2 - 1{,}5\,t$ km.
Il se croiseront lorsque $0{,}3\,t = 7{,}2 - 1{,}5\,t$ donc $1{,}8\,t = 7{,}2$ soit $t = 4$, donc à 10 h 04 min.

c) 0,3 km/min = 18 km/h. 1,5 km/min = 90 km/h

Problème 10 Arnes et Buluc page 7

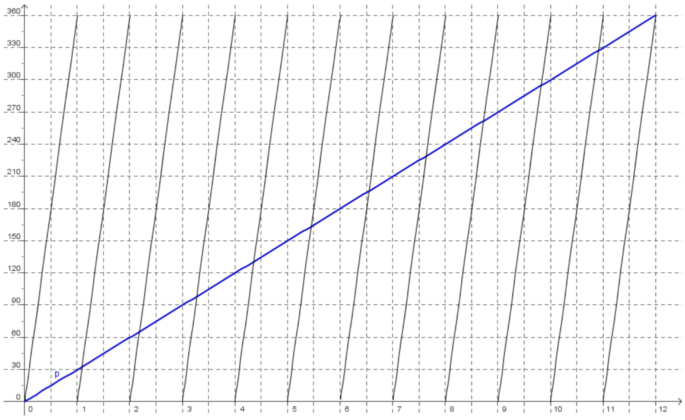
On lit les coordonnées du point d'intersection I (50 ; 75) et on en déduit que les deux trains se croisent à 9h50 (et à 75 km de Arnes). On peut aussi résoudre : $1{,}5\,t = 150 - 2{,}5\,(t - 20)$.

Problème 11 Alizée et Biba page 7



Alizée et Biba se sont croisées à 9h48 à 4,8 km de Digoin.

Problème 12 Les aiguilles de l'horloge page 7



Réponses pour le problème 12 : Les aiguilles ont été superposées 11 fois de 0h inclus à 12h exclus

h	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h
min	0min	5min	10min	16min	21min	27min	32min	38min	43min	49min	54min
s	0s	27s	55s	22s	49s	16s	44s	11s	38s	5s	33s

Problème 13 La mare aux poissons page 8

Taille (cm)	[0 ; 2 [	[2 ; 6 [	[6 ; 10 [	[10 ; 12 [	[12 ; 14 [	[14 ; 18]
Eff. cumulés	0 6	22	42	58	68	80

Le polygone des effectifs cumulés croissants relie les points dont les coordonnées sont :
(0 ;0), (2 ; 6) ; (6 ; 22), (10 ; 42), (12 ; 58), (14 ; 68) et (18 ; 80).
On calcule 50 % de 80 : 40, 25 % : 20 et 75 % : 60. Les antécédents de 40, de 20 et de 60 sur le graphique sont respectivement la médiane 9,6, le premier quartile 5,5 et le troisième quartile 12,4.
La droite qui passe par les points de coordonnées (6 ; 22) et (10 ; 42) a pour équation $y = 5\,x - 8$.
L'antécédent de 40 par f définie par $f\,(x) = 5\,x - 8$ est 9,6, c'est la médiane de la partie **1)**.

Problème 14 Petit Jacques page 9

Au bout de n mois, Petit Jacques aura $8\,n + 48$. Il aura atteint ou dépassé 85 € lorsque :

$8\,n + 48 \geq 85$, ce qui conduit à $n \geq \dfrac{37}{8} = 4{,}625$ donc ce sera au bout de 5 mois.

Problème 15 Les verbes irréguliers page 9

Au bout de n jours, Arthur connaîtra $11 + 3\,n$ verbes irréguliers. Il aura atteint ou dépassé 122 lorsque $11 + 3\,n \geq 122$, ce qui conduit à $n \geq 37$; donc ce sera au bout de 37 jours.

Problème 16 Les contrats d'assurance page 9

Le 1er mois de l'année, l'agence avait $u_1 = 230$ clients, en décembre, 11 mois après, elle en aura $u_{12} = 230 + 11 \times 20 = 450$.

Problème 17 Le recensement page 9

L'année (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$, avec $u_{17} = 1974$ donc : $u_n = 1974 + 3\,(n - 17)$.
De $1986 = 1974 + 3\,(n - 17)$, on déduit $n = 21$ donc 1986 est le 21ème recensement.
On calcule $u_1 = 1974 + 3\,(1 - 17) = 1926$ donc le premier recensement a eu lieu en 1926.

Problème 18 La vedette de Bréhat page 9

Les suites (h_n) et (p_n) sont des suites arithmétiques de raison respectivement 0,5 et – 5.
a) 10h **b)** $n = 9$ **c)** $p_{n+1} = p_n - 250 + 245$ donc $p_{n+1} = p_n - 5$ **d)** $p_9 = 260$. Voir page 15.

Problème 19 Démontrer un théorème page 9

a) Pour tous les réels x_A et x_B, $f\,(x_B) - f\,(x_A) = a\,x_B + b - (a\,x_A + b) = a\,(x_B - x_A)$ ainsi $k = a$.
b) S'il existe un nombre réel k tel que pour tous les réels x_A et x_B, $f\,(x_B) - f\,(x_A) = k\,(x_B - x_A)$, alors en particulier pour $x_A = 0$ et pour tout réel $x = x_B$, $f\,(x) - f\,(0) = k\,(x - 0)$ donc $f\,(x) = k\,x + f\,(0)$ ainsi f est une fonction affine avec $a = k$ et $b = f\,(0)$.

SYNTHESE : FONCTION AFFINE

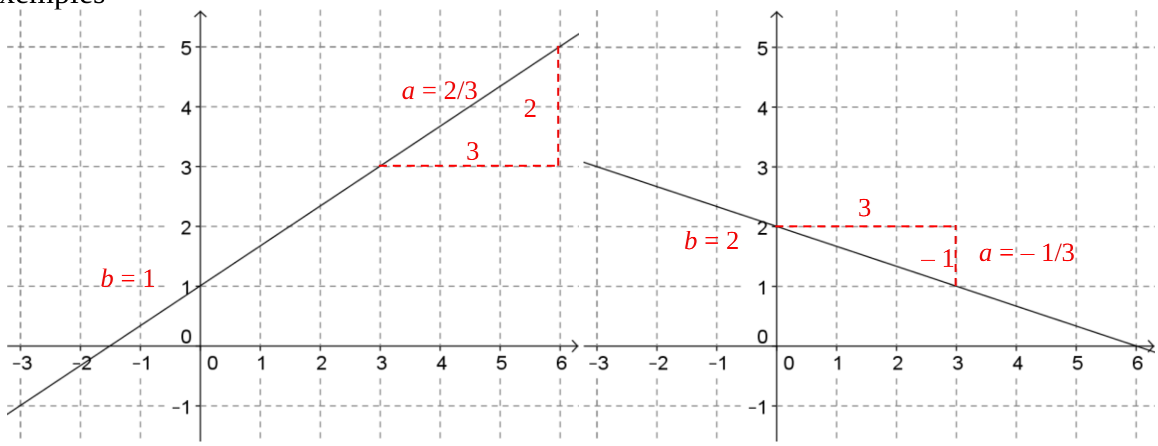
La fonction f qui à tout réel x associe $y = f(x)$ est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = a\,x + b$.

Remarque : le modèle de fonction le plus simple est la fonction linéaire définie par $f(x) = a\,x$ qui correspond à y est proportionnel à x ; c'est une fonction affine avec $b = 0$.

Une propriété caractéristique des fonctions affines est :
Les écarts sur la variable image y sont proportionnels aux écarts sur la variable initiale x.
Plus précisément :
La fonction f est une fonction affine si et seulement si :
il existe un réel a tel que pour tous les réels x_A et x_B avec $x_A \neq x_B$, $\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} = a$.
Si f est affine et si $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$ alors $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = a$ est le coefficient directeur de f.

Si la fonction f est le coût total de x objets alors a est le coût marginal c'est-à-dire le coût d'un objet supplémentaire lorsqu'on en produit déjà x.
Si la fonction f représente la position d'un objet mobile sur un axe (en mètres) au bout de x minutes, alors a représente la vitesse en mètres par minutes et cette vitesse est constante.

Graphiquement, le coefficient directeur est le rapport de l'augmentation verticale par rapport à l'augmentation horizontale. Par ailleurs, $b = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine.
Exemples



$f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ $\qquad$ $g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

Pour déterminer la fonction affine f telle que $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$, on calcule d'abord le coefficient directeur a, puis on remarque que si $y = f(x)$ alors :
$\frac{y-y_A}{x-x_A} = a$ donc $y - y_A = a\,(x - x_A)$ ainsi $y = a\,(x - x_A) + y_A$ d'où $f(x) = a\,(x - x_A) + y_A$

Exemple :
Si f est une fonction affine telle que $f(12) = 17$ et $f(16) = 25$ alors le coefficient directeur est :
$a = \frac{25-17}{16-12} = \frac{8}{4} = 2$ et $f(x) = 2\,(x - 12) + 17 = 2\,x - 24 + 17 = 2\,x - 7$

On peut ainsi définir une fonction affine à partir des images de deux valeurs distinctes ou déterminer une équation de droite à partir des coordonnées de deux points distincts.

C'est ainsi le moyen le plus simple pour **estimer une quantité à partir de deux informations**, en supposant que les écarts sur la deuxième variable sont proportionnels aux écarts sur la première.

SYNTHESE : SUITES ARITHMETIQUES

Une suite numérique est un ensemble ordonné de nombres. On note souvent u_0 le terme initial, puis u_1, u_2, u_3, … les termes suivants. La notion de suites numériques concerne souvent des phénomènes qui sont décrits d'étape en étape.
On peut aussi considérer qu'une suite est une fonction définie sur une partie de l'ensemble des entiers naturels qui à chaque entier n de son ensemble définition associe u_n.

Définition
Si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, on dit que la suite est **arithmétique**, et le nombre ajouté à chaque étape est appelé la **raison**.

Exemple : On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de terme initial $u_0 = 5$.
On peut calculer les termes de proche en proche :

$$u_0 = 5 \xrightarrow{+\,3} u_1 = 8 \xrightarrow{+\,3} u_2 = 11 \xrightarrow{+\,3} u_3 = 14 \xrightarrow{+\,3} u_4 = 17$$

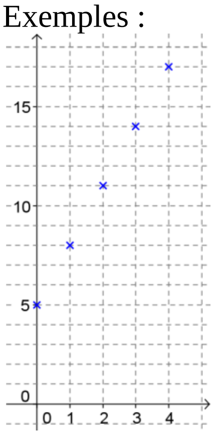
$$u_1 = u_0 + 3, \quad u_2 = u_1 + 3, \quad u_3 = u_2 + 3, \quad u_4 = u_3 + 3$$

La formule $u_{n+1} = u_n + 3$ est la **formule de récurrence** de la suite (u_n).
Pour obtenir u_4 on aura ajouté 4 fois 3 à u_0 donc $u_4 = u_0 + 4 \times 3 = 5 + 12 = 17$
Pour obtenir u_n on aura ajouté n fois 3 à u_0 donc $u_n = u_0 + n \times 3$ ainsi $u_n = 5 + 3\,n$
La formule $u_n = 5 + 3n$ est la formule explicite (ou formule générale) de la suite (u_n).
Pour obtenir u_{10} on aura ajouté 6 fois 3 à u_4 et donc $u_{10} = u_4 + (10 - 4) \times 3 = 17 + 6 \times 3 = 35$.

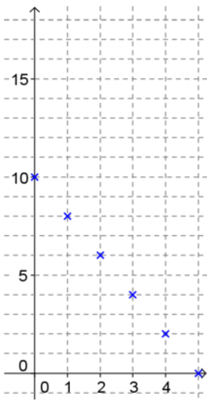
Théorème
Si la suite (u_n) est **arithmétique** de raison r alors la suite (u_n)
a pour formule explicite : $\boldsymbol{u_n = u_0 + r\,n}$ et pour formule de récurrence : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
Si n et p sont deux entiers positifs,
$u_n = u_p + (n - p)\,r$ en particulier $u_n = u_1 + (n - 1)\,r$.

Théorème
Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r.
* si la raison r est positive alors la suite (u_n) est croissante.
* si la raison r est négative alors la suite (u_n) est décroissante.

On représente les suites par des points dans un repère cartésien.
Pour une suite arithmétique de raison r, les points sont sur la droite de coefficient directeur r et d'ordonnée à l'origine u_0, d'équation $y = r\,n + u_0$.
Exemples :



(u_n) de raison 3 et de terme initial $u_0 = 5$



$v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n - 2$

SYNTHÈSE SUR LES MÉTHODES

Les explications renvoient à des problèmes traités : le premier numéro indique le problème et le second la page des indications adaptées. Ainsi (Pb18/P9) signifie renvoie au problème 18 page 9.

1. Dessiner, représenter

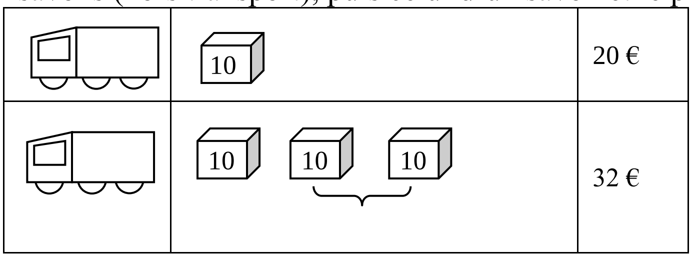
Face à un problème difficile à comprendre ou à résoudre, un dessin qui représente la situation peut aider à comprendre de quoi il s'agit (Pb18/P9). Parfois ce dessin peut guider vers une solution.

Par exemple dans (Pb1/P2), représenter les savons par des paquets de 10 permet de mieux voir qu'il n'y a pas proportionnalité entre le nombre de savons et le prix. Même si réaliser le dessin n'aide pas à résoudre le problème, c'est déjà une abstraction et une façon de se motiver pour résoudre le problème.

2. Schématiser

Schématiser, c'est relier les objets par des relations (inclusions, opérateurs, fonctions). Cette représentation est davantage standardisée que la méthode précédente. Le schéma peut être critiqué s'il ne correspond pas à la situation étudiée. Mais s'il est correct, il fournit souvent un moyen efficace pour avancer vers la solution.

Dans le problème des savons (Pb1/P2), représenter en plus des paquets de savons, le transport par un camion, et organiser ces dessins en tableau, aide à voir que l'on peut trouver le prix de 10 savons (hors transport), puis celui d'un savon et le prix du transport.



On pourrait aussi utiliser un schéma de fonction :

$$\begin{array}{ccc} & 10 \mapsto 20 & \\ +\,20 & & +\,12 \\ & 30 \mapsto 32 & \end{array}$$

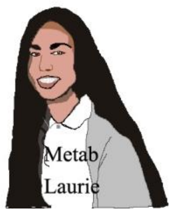
Et raisonner sur les écarts entre les images et les antécédents en supposant qu'ils sont proportionnels entre eux, ce qui revient à considérer que la fonction est affine. Ou bien chercher la fonction affine qui correspond à ces deux nombres et leurs images, ce qui est précisément la méthode d'utilisation d'une fonction.

3. Utiliser un tableau ou un tableur

Au lieu d'utiliser les flèches du schéma précédent, on peut regrouper les informations dans un tableau en deux lignes (ou deux colonnes) l'une pour le nombre de savons, l'autre pour le prix. Ce n'est pas un tableau de proportionnalité car « le produit des extrêmes n'est pas égal au produit des moyens » ou le produit en croix n'est pas vérifié :

a	c
b	d

$a\,d \neq b\,c$



Par contre, considérant que le supplément de prix est proportionnel au supplément de savons, on peut utiliser le tableau pour calculer les nouveaux prix (Pb1/P3).

Dans le problème 7, on peut automatiser les calculs avec un tableur (Pb7/P6).

Pour le problème 18 (Pb18/P9), on peut faire un tableau du type :

N° n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Heure h	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
Passagers p	300	295	290	285	280	275	270	265	260

4. Réaliser un graphique

Si on pense qu'une fonction simple intervient dans le problème et notamment si on cherche une valeur approchée du résultat, un graphique peut s'avérer très efficace. Avec seulement deux informations, le modèle le plus simple et accessible est la fonction affine, ce qui revient à tracer une droite à partir de deux points. En choisissant de relier les points par une droite, on décide que les écarts sur les images sont proportionnels aux écarts sur les antécédents. Parfois, on sait que ce n'est pas le cas, mais que l'erreur ainsi commise restera très faible pour l'approximation que l'on souhaite faire.

Dans les problèmes 1 à 6, le graphique ne comporte qu'une fonction et il faudra déterminer plus précisément cette fonction (voire la méthode plus bas).

Dans les problèmes avec plusieurs fonctions, le graphique peut fournir rapidement une solution approchée (Pb9/P7).

Souvent, la difficulté pour réaliser un graphique, c'est de bien choisir les unités. On peut utiliser sa calculatrice pour trouver la fenêtre adaptée (Pb7/P6).

5. Utiliser des lettres pour remplacer des nombres inconnus

Il est toujours possible de définir une lettre qui va représenter une quantité à condition de bien préciser la quantité concernée avec son unité. En fait dans le problème 1, il y a deux inconnues : le prix d'un savon supplémentaire (hors transport) et le prix du transport en euros. Le nombre de savons et le prix total sont plutôt des variables et le but est de trouver le lien entre ces variables, ce qui fait qu'il s'agit plutôt d'un problème de fonction.

Cependant cette méthode peut conduire à la résolution d'un système avec deux inconnues dont une présentation rigoureuse est proposée page 10.

6. Définir une ou des fonctions

Prévoir à partir de deux informations, revient ici à déterminer une fonction affine f. Celle-ci est définie par une formule du type $f(x) = a\,x + b$, il s'agit donc de déterminer a et b ce qui revient à résoudre un système de deux équations.

On peut soit traduire le problème en deux équations et résoudre le système, soit déterminer le coefficient directeur a par la formule $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ puis en déduire la formule de f grâce à la formule $\boldsymbol{y = a\,(x - x_A) + y_A}$ ou déterminer l'ordonnée à l'origine b à l'aide d'une équation.

7. Définir une suite arithmétique

Si le phénomène étudié procède d'étape en étape et que l'on considère qu'une même quantité est ajoutée à chaque étape, le modèle d'une suite arithmétique peut être plus adapté. La quantité ajoutée à chaque étape est la raison et la formule $u_n = u_p + (n - p)\,r$ permet de trouver la formule générale à partir d'une valeur particulière, une fois la raison r déterminée.

8. Résoudre une équation ou une inéquation

Il s'agit de trouver la ou les valeurs qui correspondent à une condition. Si elle est de la forme $f(x) = k$ où k est connu, il s'agit de retrouver les antécédents de k, autrement dit, la ou les valeurs qui ont conduit à k après certaines opérations. Il s'agit donc de défaire ces opérations en utilisant les opérations réciproques : division pour la multiplication, soustraction pour l'addition (Pb7/P6). La même méthode est utilisée pour une inéquation mais multiplier ou diviser par un nombre strictement négatif change le sens de l'inéquation.

Si la forme est $f(x) = g(x)$, on peut la ramener au cas précédent en écrivant l'équation équivalente $f(x) - g(x) = 0$. Mais de façon générale, résoudre une équation ou une inéquation du premier degré consiste à appliquer la même opération aux deux membres jusqu'à isoler l'inconnue et conclure.