CAPES INTERNE 2008 ; Corrigé.

Problème 1 Pour les figures voir l'énoncé du problème.

1 Partie I

1. En prolongeant le segment $[AO]$ au delà de O on obtient $A"$ diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$.
On trace ensuite le cercle de centre $A"$ de rayon R qui coupe $\mathcal{C}$ en les points B et C cherchés.

2. Les relations $AB = AC$ et $OB = OC$ impliquent que (AO) est la médiatrice du segment $[BC]$ et passe donc par A'. (AO) est la médiane issue de A et de même (BO) (resp. (CO)) est la médiane issue de B (resp. de C). Sachant que O est alors le centre de gravité du triangle ABC on a : $\dfrac{AO}{AA'} = \dfrac{2}{3}$, puis $AA' = \dfrac{3AO}{2}$, enfin par Pythagore $L^2 = \dfrac{L^2}{4} + \dfrac{9R^2}{4}$. D'où $L = R\sqrt{3}$.

3. Les côtés de ces triangles ont tous une longueur de $R\sqrt{3}$. Selon que ces triangles sont ou non de même orientation on passe de l'un à l'autre par la rotation de centre O amenant A en U ou par la symétrie d'axe la médiatrice de $[AU]$.

4. On a déjà vu que (AA') est la médiatrice du côté $[BC]$ et aussi la médiane issue de A ; étant perpendiculaire à (BC) c'est la hauteur issue de A. Enfin les points B et C sont ainsi symétriques par rapport à (AA'), les droites (AB) et (AC) le sont aussi et $\widehat{BAA'} = \widehat{CAA'}$; (AA') est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

5. Selon que l'arc choisi contient ou non le point A sa longueur vaut respectivement $\dfrac{4\pi R}{3}$ ou $\dfrac{2\pi R}{3}$.

2 Partie II

1. Dans le 1er cas on a $\widehat{OAJ} = \widehat{OAC} = \widehat{OAP} + \widehat{PAC} \geq \widehat{OAI}$, d'où $AI = R\cos\widehat{OAI} \geq R\cos\widehat{OAJ} = AJ$.
On en déduit $AP = 2AI \geq 2AJ = AB = L$.
En intervertissant les rôles de P et de C on obtient de manière analogue dans le 2ème cas : $AP \leq AC$.

2. Sachant $OJ \geq OA' \geq OI$ on en déduit par Pythagore $JN' \leq A'C \leq IN$, d'où les inégalités demandées en doublant.

3. D'après le théorème de l'angle inscrit on a $\widehat{AOK} = \theta$ ou $\pi - \theta$ selon que θ est aigu ou obtus, d'où $AK = R\sin\widehat{AOK} = R\sin\theta$ et AS vaut le double.
Si $\theta < \dfrac{\pi}{3}$ alors $AS < 2R\sin\dfrac{\pi}{3} = 2R\dfrac{\sqrt{3}}{2} = L$ et de même si $\theta > \dfrac{2\pi}{3}$.

4. La droite (OD) est l'axe de symétrie de $\Gamma \cap \mathcal{C}$ et ne contient pas le point A donc cette intersection est formée de A et de son symétrique F par rapport à (OD).
L'aire de ADD' vaut $\dfrac{\rho}{2}\sqrt{4R^2 - \rho^2} = AG \times R$.
Donc $AF = 2AG = \dfrac{\rho}{R}\sqrt{4R^2 - \rho^2}$.
On résout l'inéquation en élevant au carré et en prenant x^2 comme inconnue ce qui donne $x^2 \in [R^2, 3R^2]$.
Appliquant ce qui précède à $x = \rho$ on obtient : $AF \geq R\sqrt{3}$ si et seulement si $\rho \in [R, R\sqrt{3}]$.

5. On a $AE' \geq L$ ssi E' appartient à celui des arcs $\overset{\frown}{BC}$ qui ne contient pas A ou encore ssi $\widehat{OAE} \leq \widehat{OAC}$.

L'aire grise vaut $\dfrac{1}{3}\left(\pi R^2 - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right) + \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3 Partie III

1. $\dfrac{1}{3}$ (voir I-5).

2. $\dfrac{1}{2}$ (voir II-2).

3. $\dfrac{1}{3}$ (voir II-3).

4. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ (voir II-4).

5. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$ (voir II-5).

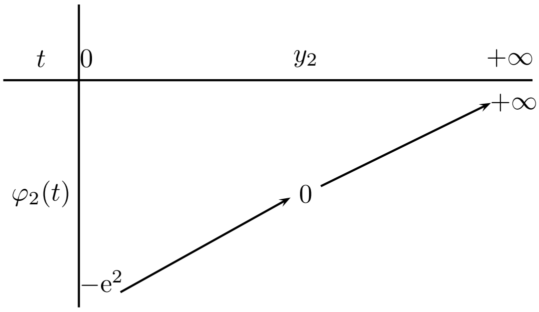
Problème 2

4 Partie I

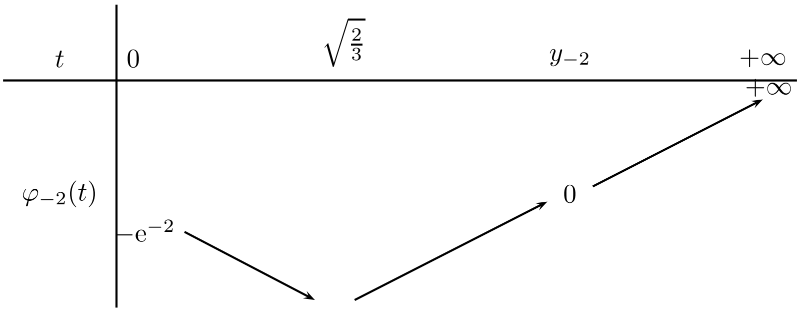
1. Dans $\mathbf{R}$ l'équation $y^3 = 1$ admet 1 pour unique solution.

2. L'existence d'un tel point M reviendrait à celle de x réel tel que $-e^x = 0$, ce qui est impossible.

3. Ce point M appartient à Γ. $\varphi_2'(t) = 3t^2 + 2$.



La fonction φ_2 étant strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[-e^2, +\infty[$, il existe y_2 nécessairement unique et > 0 tel que $\varphi(y_2) = 0$.
On a : $\varphi_2\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 + 3 - e^2 < 6,375 - 7,29 < 0$, et $\varphi_2\left(\dfrac{7}{4}\right) = \left(\dfrac{7}{4}\right)^3 + \dfrac{7}{2} - e^2 = \dfrac{567}{64} - e^2 > 8 - 7,84 > 0$.

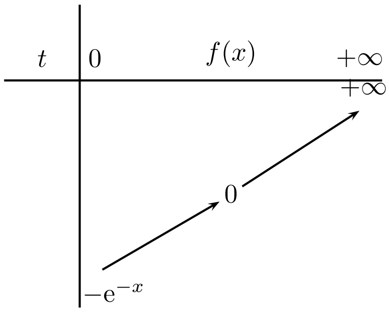


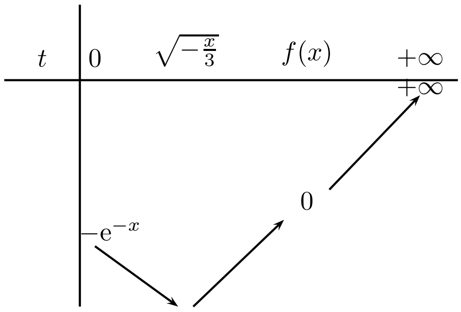
4.

Sachant $\varphi_{-2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < \varphi_{-2}(0) = -e^{-2} < 0$, la stricte croissance et le changement de signe de $\varphi_{-2}(t)$ sur l'intervalle $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$ impliquent l'existence et l'unicité de y_{-2}.

On a : $\varphi_{-2}(1,445) < -0,008$, $\quad \varphi_{-2}(1,45) > 0,032$. Donc $1,445 < y_{-2} < 1,45$.

5. $\varphi'_x(t) = 3t^2 + x$.





Soit $x \geq 0$ (resp. < 0) ; sur l'intervalle $[0, +\infty[\left(\text{ resp. } \left[\sqrt{\frac{-x}{3}}, +\infty\right[\right)$ la fonction $\varphi_x(t)$ est strictement croissante et change de signe d'où l'existence et l'unicité de $f(x)$.

6. L'inégalité est évidente si $x > 0$ et sinon on sait que $f(x)$ est $> \sqrt{\frac{-x}{3}}$.
Compte tenu des tableaux de variation des fonctions φ_x les 2 expressions écrites sont de même signe et s'annulent pour $t = f(x)$.

7. $f(0) = 1$.

On connaît déjà $1,45$ comme valeur approchée de $f(-2)$ à 5.10−3 près.
Par ailleurs $\varphi_2(1,60) < -0,481$ et $\varphi_2(1,61) > 0,00032$. Donc $1,61$ est une valeur approchée de $f(2)$ à 10^{-2} près.

5 Partie II

1. En dérivant la condition (1) par rapport à x on obtient $f'(x)$. D'après I.6 $e^x - f(x)$ et $e^{3x} + xe^x - e^x$ sont du même signe qui est aussi celui de $e^{2x} + x - 1$. Cette fonction $u(x)$ est strictement croissante et nulle en 0, donc $f'(x)$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. De $f(x) > \sqrt{\dfrac{-x}{3}}$ il vient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
L'existence du nombre A tient aux croissances comparées de e^x et de $x^3 + x^2$.
Soit $x \geq A$; de $x^3 + x^2 - e^x \leq 0$ on déduit par 1.6 : $x - f(x) \leq 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6 Partie III

1. C'est encore la condition (1) qui donne la relation cherchée pour $f(x)$. Il en découle :

$$f(x) - \sqrt{-x} = \frac{e^x}{f(x)} \times \frac{1}{f(x) + \sqrt{-x}},$$

cette expression positive tend donc vers 0 quand x tend vers $-\infty$ et la courbe Γ_1 est située au dessus de la courbe asymptote d'équation $y = \sqrt{-x}$.