∽ BTS Polynésie mai 2021 – mathématiques approfondies ∾
Services informatiques aux organisations

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes
Dans cet exercice, sauf mention contraire, les résultats sont à arrondir à 10^{-3}.

Dans un groupe d'assurances, on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de livraison de colis.

Partie A - Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs

On choisit au hasard 15 conducteurs de l'entreprise. Le nombre de conducteurs est suffisamment important pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.
On note E l'évènement : « un conducteur choisi au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est égale à $0,6$.
On considère la variable aléatoire X qui, parmi les 15 conducteurs choisis, comptabilise le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, parmi les 15 conducteurs choisis, 10 conducteurs exactement n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.
3. Calculer la probabilité que, parmi les 15 conducteurs choisis, 13 conducteurs au moins n'aient pas de sinistre.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Partie B - Étude du coût des sinistres

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres survenus, associe son coût en euros.
On suppose que la variable aléatoire C suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart type 200.

1. Déterminer $P(800 \leqslant C \leqslant 1\,600)$ à 10^{-2} près, puis interpréter cette valeur.
2. Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres survenus coûte plus de 1 500 euros.

Partie C - Nombre de sinistres pendant la première année de mise en service

Pour les véhicules de la flotte de cette entreprise, on a relevé le nombre de sinistres par véhicule pendant la première année de mise en service.

Pour les véhicules ayant eu au plus quatre sinistres, on a obtenu :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
Nombre de véhicules : n_i	1 345	508	228	78	35

Le nuage de points $(x_i\ ;\ n_i)$ suggère de procéder à un ajustement exponentiel.
On pose donc $y = \ln n_i$.

1. Compléter après l'avoir reproduit, le tableau suivant en arrondissant les valeurs à 10^{-3}.

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
$y = \ln n_i$					

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-2}.
3. Justifier que le nombre n de véhicules ayant subi x sinistres peut être modélisé par une égalité de la forme $n = A \times B^x$ où $A = 1326$ à 1 près et $B = 0,4$ à $0,1$ près.
4. À l'aide de l'équation précédente, estimer le nombre de véhicules ayant eu six sinistres pendant leur première année de mise en circulation.

Exercice 2 **10 points**

Pour un promoteur immobilier, le coût de production, en millions d'euros, pour n villas construites, $0 \leqslant n \leqslant 10$, est modélisé par :

$$C(n) = 0,2n + 0,45\ln(8n+1).$$

Ce promoteur vend chaque villa 600 000 €.

Partie A

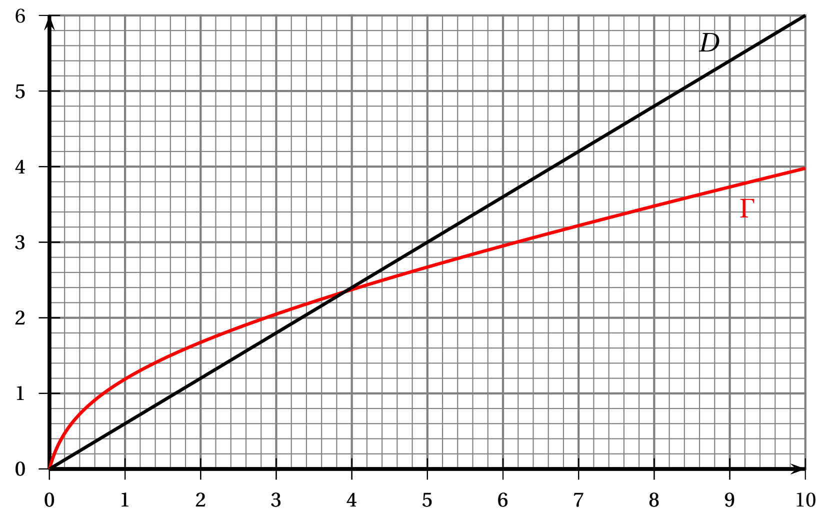
1. Calculer $C(4)$ puis $C(8)$, on arrondira les résultats à $0,01$ près.
2. Le coût de production est-il proportionnel au nombre de villas construites ? Pourquoi ?
3. On appelle $R(n)$, la recette, en millions d'euros, générée par la vente de n villas. Expliquer pourquoi $R(n) = 0,6n$.

Partie B

On modélise le coût de production des villas et la recette générée par leur vente (en millions d'euros) par les fonctions f et g de la variable réelle x définies sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 0,2x + 0,45\ln(8x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = 0,6x.$$

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe Γ représentative de la fonction f, ainsi que la droite (D)) représentative de la fonction g.



1. **a.** Par lecture graphique, déterminer le coût de production pour la construction de 2 villas ainsi que la recette générée par la vente de 2 villas.

   b. Déterminer si le bénéfice obtenu pour la construction et la vente de 2 villas est positif. Expliquer.

2. Déterminer graphiquement le nombre minimum de villas qu'il faut construire et vendre pour avoir un bénéfice positif.

Partie C

Dans cette partie on suppose que le promoteur a construit et vendu au moins une villa.

1. Montrer que le bénéfice réalisé pour la construction et la vente de n villas est, en millions d'euros :

$$B(n) = 0,4n - 0,45\ln(8n+1).$$

2. On considère la fonction h, définie sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ par :

$$h(x) = 0,4x - 0,45\ln(8x+1).$$

   a. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$,

$$h'(x) = \frac{3,2(x-1)}{8x+1}.$$

   b. Étudier le signe de $h'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$.

   c. Établir le tableau de variation de h sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

3. **a.** Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1\,;\,10[$.

   b. Donner une valeur approchée à 1 près de α.

   c. À partir de combien de villas vendues, le promoteur sera t-il bénéficiaire ?