Brevet de technicien supérieur Métropole
mai 2021 - Groupement C1

Exercice 1 **10 points**

L'entreprise Boisneuf fabrique des charpentes en bois. Elle souhaite étudier la déformation des pièces de bois qu'elle utilise pour ses charpentes lorsque celles-ci sont soumises à une charge constante. Le jour de l'installation la poutre ne subit aucune déformation.

On considère alors la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, représentant la déformation en millimètres (mm) de la poutre en fonction du temps t exprimé en jours à partir de l'installation.

Partie A

1. Expliquer pourquoi $f(0) = 0$.
2. L'étude physique du phénomène de déformation (dans l'hypothèse où la pièce de bois étudiée ne présente pas de défaut de structure) montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad 400y' + 5y = 20.$$

   a. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $400y' + 5y = 0$.

   b. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E).

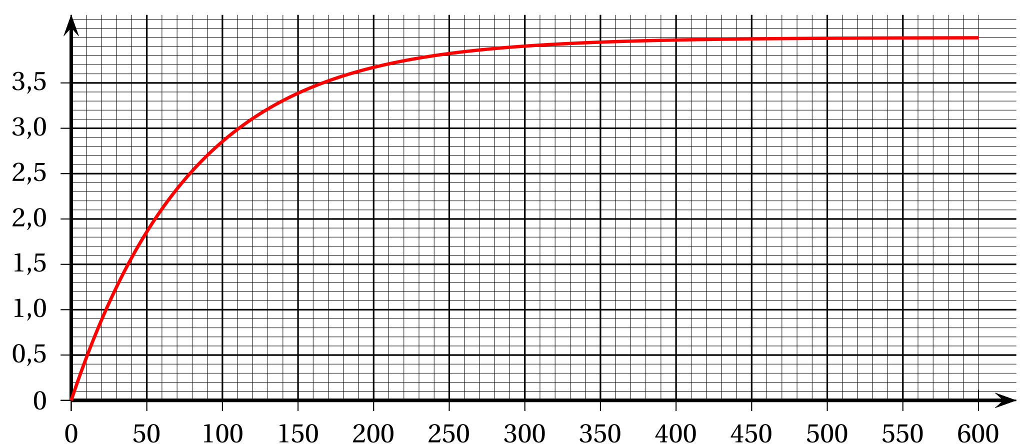
   c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

   d. Déterminer l'expression de la fonction f solution de (E), et vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Partie B

On admet que pour tout t positif, $f(t) = 4\left(1 - \mathrm{e}^{-0,0125t}\right)$.

La courbe représentative de la fonction est donnée ci-dessous.



1. Avec la précision permise par le graphique, déterminer la déformation au bout de 150 jours.
2. Avec la précision permise par le graphique, déterminer le nombre de jours nécessaire pour que la déformation atteigne 2 mm.
3. Déterminer, par le calcul, la déformation limite de la poutre à long terme. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?
4. Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[,\ \ f'(t) = 0,05\mathrm{e}^{-0,0125t}$.
5. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
6. Déterminer par le calcul le nombre de jours à partir duquel la déformation atteint 90 % de sa valeur limite.

Exercice 2 (sur 10 points)

Partie A

La scierie Bonbois réalise une étude sur sa production de planches. En sortie de production, elle constate deux types de défaut : des défauts de structure (nœuds, ...) et des défauts de rugosité de surface.

Aucun de ces défauts n'altère la résistance des planches. En revanche, pour des raisons esthétiques, l'utilisation des planches présentant au moins un défaut est proscrite par l'entreprise.

On prélève au hasard une planche dans la production de l'entreprise. On note les évènements suivants :

- S : « La planche présente un défaut de structure. », de probabilité $0,03$;
- R : « La planche présente un défaut de rugosité. », de probabilité $0,05$.

On admet que les évènements S et R sont indépendants.

1. Exprimer l'évènement « La planche présente les deux défauts » en fonction des évènements S et R, puis déterminer sa probabilité.
2. Décrire par une phrase l'évènement $\overline{S} \cap \overline{R}$ puis calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité de l'évènement D : « La planche présente au moins un défaut ».
4. On choisit une planche présentant au moins un défaut ; déterminer la probabilité p qu'elle présente les deux défauts. Le résultat sera arrondi au centième.

Partie B

Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième.

On admet pour la suite que la probabilité qu'une planche présente au moins un défaut est de 0,078 5.

On prélève au hasard 15 planches dans le stock de l'entreprise. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 15 planches, associe le nombre de planches qui présentent au moins un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, exactement deux planches présentent au moins un défaut.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 12 planches au moins ne présentent aucun des deux défauts.

Partie C

Une entreprise de meubles commande des planches de longueur 2 mètres à la scierie Bonbois.

La scierie affirme que 94 % des planches de sa production sont conformes en longueur. L'entreprise doute de cette affirmation et réalise un test d'hypothèse bilatéral au seuil de risque de 5 % pour vérifier.

On note l'hypothèse H_0 : « $p = 0,94$ ».

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 planches prélevées au hasard dans la production de la scierie, associe la fréquence des planches conformes.

On admet que, sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire F suit la loi normale de moyenne $0,94$ et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{0,94(1-0,94)}{100}}$.

1. Déterminer, sous l'hypothèse H_0, l'intervalle $[m\ ;\ M]$ centré en 0,94 tel que
$p(m \leqslant F \leqslant M) = 0,95$.
On arrondira les valeurs à 10^{-2}.

2. Préciser l'hypothèse H_1 du test.

3. Énoncer la règle de décision du test.

4. Sur un échantillon de 100 poutres, on a compté 92 planches conformes en longueur.
L'entreprise a-t-elle raison de douter de l'affirmation de la scierie ?