BTS Groupement B2 – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2014

Exercice 1 :

A.

1. (a) On a $r^2+2r+1=(r+1)^2$, donc $\boxed{\text{l'équation } r^2+2r+1=0 \text{ admet une seule solution } r=-1}$

   (b) $\boxed{\text{Les solutions de } (E_0) \text{ sont données par } y(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x},\ a \text{ et } b \text{ deux réels}}$

2. La bonne réponse est $\boxed{h(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}}$
3. La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation (E) à la solution générale de l'équation homogène (E_0), c'est-à-dire $\boxed{y(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^{-x} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux réels}}$
4. D'après la question précédente, on a déjà $f(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^{-x}$. Or on veut $f(0)=-1$ d'où $b=-1$.
   Avec $f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{-x}$, on obtient $f'(x)=(-x^2+(2-a)x+a+1)\mathrm{e}^{-x}$.
   Or $f'(0)=1$ d'où $a+1=1$ c'est-à-dire $a=0$.
   $\boxed{\text{La fonction cherchée est } f(x)=(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}}$

B.

1. (a) On a $f(x)=(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}$. En dérivant comme un produit, on a $f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x}-(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}$ d'où $\boxed{f'(x)=-(x^2-2x-1)\mathrm{e}^{-x}}$

   (b) On a immédiatement $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$, d'où
   $\boxed{\text{une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est } y=x-1.}$

2. (a) On a $\mathrm{e}^t=1+t+\dfrac{1}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$, alors en remplaçant t par $-x$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0}$$

   (b) Pour obtenir le développement limité de f, on multiplie le développement limité de e^{-x} par (x^2-1) en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-1)\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)\right) \\ &= -1+x-\frac{1}{2}x^2+x^2+x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

   c'est-à-dire $\boxed{f(x)=-1+x+\dfrac{1}{2}x^2+x^2+x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0}$

   (c) La justification exacte est : $\boxed{\dfrac{x^2}{2} \text{ est positif au voisinage de 0}}$

C.

1. (a) En dérivant comme un produit, on obtient

$$\begin{aligned} \left((x+1)^2\mathrm{e}^{-x}\right)' &= 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-x^2)\mathrm{e}^{-x} \\ &= -(x^2-1)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

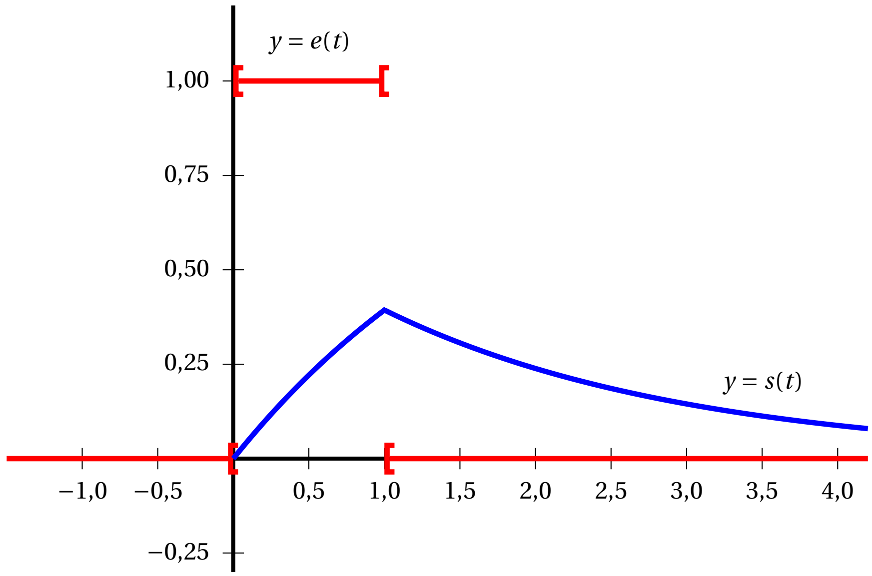
   c'est-à-dire $\left(-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}\right)'=f(x)$: $\boxed{\text{une primitive de } f \text{ est la fonction } F(x)=-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}}$

(b) On a donc $\boxed{I = [F(x)]_1^3 = -16\mathrm{e}^{-3} + 4\mathrm{e}^{-1}}$

2. La réponse exacte est $\boxed{\text{$I$ est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$}}$

Exercice 2 : Spécialité CIM **A.**

1. (a) Courbes représentatives des fonctions e et s :



   (b) Pour $t < 0$, $\mathscr{U}(t) = 0$ et $\mathscr{U}(t-1) = 0$, d'où $\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1) = 0 = e(t)$.
   Pour $t \in [0\,;1[$, $\mathscr{U}(t) = 1$ et $\mathscr{U}(t-1) = 0$ d'où sur $[0\,;1[$, $\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1) = 1 = e(t)$.
   Pour $t \geqslant 1$, $\mathscr{U}(t) = 1$ et $\mathscr{U}(t-1) = 1$, d'où pour $t \geqslant 1$, $\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1) = 0 = e(t)$.
   Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout réel } t, \quad e(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)}$.

2. (a) On a par lecture du formulaire $\boxed{\mathscr{L}(\mathscr{U}(u)) = \dfrac{1}{p}}$

   De même, on obtient $\boxed{\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-1)) = \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}}$

   (b) En utilisant la linéarité de la transformée de Laplace, on en déduit

$$\boxed{E(p) = \mathscr{L}(e(t)) = \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right)}$$

B.

1. (a) À l'aide de la table, on obtient $\mathscr{L}\left(s'(t)\right) = pS(p) - s(0^+)$ sachant que, ici, $s(0^+) = 0$.
   On en déduit $\boxed{\mathscr{L}\left(s'(t)\right) = pS(p)}$

   (b) Toujours par linéarité de la transformée de Laplace, on en déduit que

$$\boxed{\mathscr{L}\left(2s'(t) + s(t)\right) = (2p+1)S(p)}$$

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, on obtient $(2p+1)S(p) = E(p)$, d'où

$$\boxed{S(p) = \frac{1}{p(2p+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right)}$$

3. On a, par réduction au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{p}-\frac{2}{2p+1}\\ &= \frac{(2p+1)-2p}{p(2p+1)}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{1}{p(2p+1)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+\frac{1}{2}}}$

4. En utilisant les questions 2 et 3 et en développant, on a immédiatement

$$\boxed{S(p)=\frac{1}{p}-\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p}-\frac{1}{p+\frac{1}{2}}+\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}}}$$

C.

1. $\boxed{\begin{array}{l}\text{L'original de } \dfrac{1}{p} \text{ est } \mathscr{U}(t), \quad \text{l'original de } \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p} \text{ est } \mathscr{U}(t-1)\\ \text{L'original de } \dfrac{1}{p+\frac{1}{2}} \text{ est } \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathscr{U}(t), \quad \text{l'original de } \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}} \text{ est } \mathrm{e}^{-\frac{t-1}{2}}\mathscr{U}(t-1)\end{array}}$

   On en déduit alors :

$$\boxed{s(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\mathscr{U}(t)-\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\mathscr{U}(t-1)}$$

2. (a) $\boxed{\text{Pour } t \leqslant 0, \quad s(t)=0}$

   (b) Pour $t \in [0;1[$, $\mathscr{U}(t)=1$ et $\mathscr{U}(t-1)=0$ d'où $\boxed{\text{pour } t \in [0;1[, \quad s(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$

   (c) Pour $\in [1;+\infty[$, $\mathscr{U}(t)=1$ et $\mathscr{U}(t-1)=1$ d'où $s(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)-\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)$, c'est-à-dire , après simplification

$$\boxed{\text{pour } t \in [1;+\infty[, \quad s(t)=\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$$

3. Tableau de valeurs de $s(t)$ complété, où $s(t)$ est arrondi au centième.

t	-1	$-0,5$	0	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$s(t)$	0	0	0	0,21	0,32	0,39	0,31	0,24	0,19	0,15	0,11	0,09

4. Voir question 1a

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr