BTS Groupement B1 – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2014

Exercice 1 :

A.

1. (a) On a $r^2+2r+1=(r+1)^2$, donc $\boxed{\text{l'équation } r^2+2r+1=0 \text{ admet une seule solution } r=-1}$

   (b) $\boxed{\text{Les solutions de } (E_0) \text{ sont données par } y(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x},\ a \text{ et } b \text{ deux réels}}$

2. La bonne réponse est $\boxed{h(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}}$

3. La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation (E) à la solution générale de l'équation homogène (E_0), c'est-à-dire $\boxed{y(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^{-x} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux réels}}$

4. D'après la question précédente, on a déjà $f(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^{-x}$. Or on veut $f(0)=-1$ d'où $b=-1$.
   Avec $f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{-x}$, on obtient $f'(x)=(-x^2+(2-a)x+a+1)\mathrm{e}^{-x}$.
   Or $f'(0)=1$ d'où $a+1=1$ c'est-à-dire $a=0$.
   $\boxed{\text{La fonction cherchée est } f(x)=(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}}$

B.

1. (a) On a $f(x)=(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}$. En dérivant comme un produit, on a $f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x}-(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}$ d'où $\boxed{f'(x)=-(x^2-2x-1)\mathrm{e}^{-x}}$

   (b) On a immédiatement $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$, d'où
   $\boxed{\text{une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est } y=x-1.}$

2. (a) On a $\mathrm{e}^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$, alors en remplaçant t par $-x$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0}$$

   (b) Pour obtenir le développement limité de f, on multiplie le développement limité de e^{-x} par (x^2-1) en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-1)\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)\right) \\ &= -1+x-\frac{1}{2}x^2+x^2+x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

   c'est-à-dire $\boxed{f(x)=-1+x+\frac{1}{2}x^2+x^2+x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0}$

   (c) La justification exacte est : $\boxed{\frac{x^2}{2} \text{ est positif au voisinage de 0}}$

C.

1. (a) En dérivant comme un produit, on obtient

$$\begin{aligned} \left((x+1)^2\mathrm{e}^{-x}\right)' &= 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-x^2)\mathrm{e}^{-x} \\ &= -(x^2-1)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

   c'est-à-dire $\left(-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}\right)'=f(x)$: $\boxed{\text{une primitive de } f \text{ est la fonction } F(x)=-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}}$

(b) On a donc $\boxed{I = [F(x)]_1^3 = -16\mathrm{e}^{-3} + 4\mathrm{e}^{-1}}$

2. La réponse exacte est $\boxed{\begin{array}{l} I \text{ est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise} \\ \text{entre l'axe des abscisses, la courbe } C \text{ et les droites d'équation } x = 1 \text{ et } x = 3 \end{array}}$

Exercice 2 :

A.

1. Les événements A et B étant indépendants, on a $p(E_1) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, c'est-à-dire

$$\boxed{p(E_1) = 0,0017}$$

2. On a

$$\begin{aligned} p(E_2) &= p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{p(E_2) = 0,1033}$$

B.

1. — Chaque prélèvement est constitué de 53 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise ;
   — Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
     — soit le succès : un octet a une erreur de probabilité $p = 0,03$
     — soit l'échec : un octet n'a pas d'erreur de probabilité $q = 1 - p = 0,97$
   — La variable aléatoire X mesure le nombre de succès,

   alors $\boxed{\text{la variable aléatoire } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 53 \text{ et } p = 0,03}$
2. On demande $p(X = 0) = 0,97^{53}$ d'où $\boxed{p(X) = 0 \approx 0,199}$
3. On demande $p(X \leqslant 3)$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p(X \leqslant 3) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) \\ &= 0,97^{53} + \binom{53}{1} 0,03 \times 0,97^{52} + \binom{53}{2} 0,03^2 \times 0,97^{51} + \binom{53}{3} 0,03^3 \times 0,97^{50} \end{aligned}$$

   c'est-à-dire $\boxed{p(X \leqslant 3) \approx 0,926}$
4. Par approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, on conserve l'espérance, c'est-à-dire $\lambda = np$ d'où $\boxed{\lambda = 1,59}$
5. (a) On a $p(Y = 0) = \dfrac{e^{-1,59}}{0!}$ d'où $\boxed{p(Y = 0) \approx 0,204}$

   (b) On demande $p(Y \leqslant 3)$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p(Y \leqslant 3) &= p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) + p(Y = 3) \\ &= e^{-1,59} \left(1 + 1,59 + \frac{1,59^2}{2} + \frac{1,59^3}{6}\right) \end{aligned}$$

   c'est-à-dire $\boxed{p(Y \leqslant 3) \approx 0,923}$

C.

1. $\boxed{f = \dfrac{4}{100} = 0,04}$
2. (a) L'intervalle de confiance cherché est $I = \left[f - 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n-1}} \,;\, f + 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n-1}}\right]$ avec $n = 100$, $f = 0,04$.

   On obtient $\boxed{I \approx [0,001 \,;\, 0,079]}$

   (b) Non, l'affirmation proposée est fausse. On a une probabilité de 5% que p se situe en dehors de l'intervalle de confiance.

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr