

Session 2010

MAT-10-PG1

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mercredi 28 avril 2010 - de 8h 30 à 11h 30
Deuxième épreuve d'admissibilité

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures
Coefficient : 3
Note éliminatoire 5/20

Rappel de la notation :

Il est tenu compte, à hauteur de **trois points** maximum, de la qualité orthographique de la production des candidats.

Ce sujet contient 10 pages (dont 1 page de garde et 5 pages d'annexes), numérotées de 1/10 à 10/10. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage d'une calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

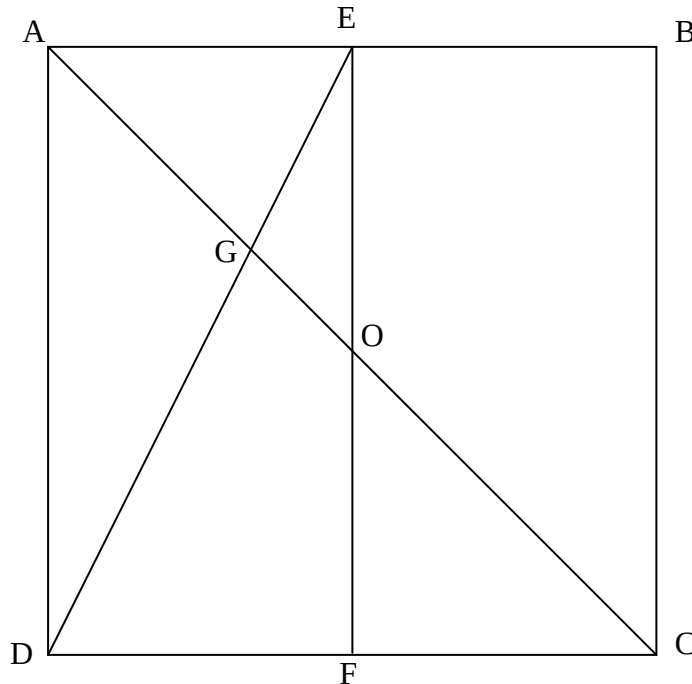
N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez devra, conformément au principe d'anonymat, ne comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.

Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Exercice 1 (5 points)

On considère la figure ci-dessous dans laquelle ABCD est un carré, E est le milieu du segment [AB], F le milieu du segment [CD], G le point d'intersection des droites (AC) et (ED) et O le point d'intersection des droites (AC) et (EF).



Partie A. Etude de la configuration

1. Justifier que le quadrilatère AEFD est un rectangle.
2. Justifier que le point O est le milieu des segments [AC] et [EF].
3. Montrer que $\frac{AG}{GO} = 2$.
4. Que représente le point G pour le triangle AEF ? Justifier.

Partie B. Calcul d'aires

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats de la partie A.
En outre, on considère que l'unité d'aire u est l'aire du carré ABCD.

1. Quelle est l'aire du triangle AEO ? Justifier succinctement.
2. Déterminer l'aire des triangles EGO et EGA.
3. En déduire l'aire du triangle DAG ainsi que l'aire du quadrilatère OFDG.

Question complémentaire 1 (3 points)

L'exercice présenté en **annexe 1** est proposé à des élèves de CM2.

1. a. Quelle est la notion mathématique en jeu dans cet exercice ?
b. À quel moment peut-on placer cet exercice dans l'étude de cette notion au CM2 ?
Argumenter.
2. Pour chacune des quatre productions d'élèves reproduites en **annexe 2**, décrire la procédure utilisée et indiquer si cette procédure est correcte ou non.
3. Citer deux aides que l'enseignant peut proposer à l'élève Stessy pour l'aider dans la mise en œuvre de sa procédure.

Exercice 2 (4 points)

L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à tout nombre entier naturel n le nombre $K(n)$ généré de la façon suivante :

- On considère les chiffres de l'écriture en base 10 du nombre n . On forme le nombre n_1 en rangeant ces chiffres dans l'ordre croissant et le nombre n_2 en les rangeant dans l'ordre décroissant.
- On pose $K(n) = n_2 - n_1$.

On itère ensuite le processus en repartant du nombre $K(n)$.

Par exemple, si on choisit $n = 634$, on obtient :

$$n_1 = 346 \text{ et } n_2 = 643 \text{ d'où } K(634) = 643 - 346 = 297.$$

En itérant le processus, on obtient successivement :

$$K(297) = 693 ; K(693) = 594 ; K(594) = 495 ; K(495) = 495.$$

Ensuite, tous les résultats sont égaux à 495.

- Montrer que l'algorithme appliqué au nombre 5 294 conduit aussi à un nombre entier p tel que $K(p) = p$.
- On considère maintenant un nombre m qui s'écrit en base 10 avec les trois chiffres a , b et c , tels que : $m = \overline{abc}$ et $0 < a < b < c$.
 - Montrer que le nombre $K(m)$ est un multiple de 99.
 - Montrer alors que l'algorithme appliqué au nombre m conduit au nombre 495 en cinq itérations au plus.

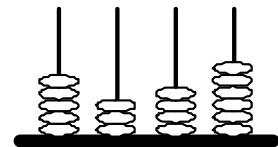
Question complémentaire 2 (5 points)

Pour renforcer les connaissances de ses élèves de CE2 sur la numération, un enseignant propose l'activité suivante.

Chaque élève dispose d'un abaque et d'un jeu de jetons tous identiques.

Sur un abaque, chaque tige ne peut recevoir que neuf jetons.

Le dessin ci-contre est celui d'un abaque sur lequel est représenté le nombre 5346.



Les élèves ont déjà manipulé ce type de matériel ; ils savent en particulier passer de l'écriture chiffrée d'un nombre à sa représentation sur l'abaque et réciproquement.

L'enseignant propose un *premier exercice* :

Il écrit le nombre 5 346 au tableau et donne les consignes orales suivantes :

- Représentez ce nombre sur votre matériel et écrivez-le sur votre ardoise.
- Utilisez votre matériel pour modifier ce nombre en exécutant les instructions suivantes : ajoutez 2 centaines ... enlevez 3 dizaines ... ajoutez 2 milliers.

Les élèves doivent faire les manipulations correspondantes et transcrire sur leur ardoise les nombres successivement représentés sur leur matériel.

Après une première mise en commun des résultats obtenus, l'enseignant propose d'autres exercices :

Deuxième exercice : à partir du nombre 3 586, enlever 5 dizaines puis ajouter 6 centaines.

Troisième exercice : à partir du nombre 5 953, enlever 3 milliers puis ajouter 5 dizaines.

Quatrième exercice : à partir du nombre 4 567, ajouter 2 dizaines puis enlever 9 unités.

1. Analyser l'enchaînement des exercices proposés du point de vue des connaissances à mobiliser en décrivant les procédures correctes à mettre en œuvre avec le matériel mis à disposition.
2. Un élève utilisant l'abaque a réussi tous les exercices sauf le dernier : il a obtenu 4 560.
 - a. Décrire la procédure qui a pu conduire l'élève à produire ce résultat.
 - b. Au vu des valeurs choisies par l'enseignant pour cet exercice, sur quoi peut-il s'appuyer pour faire prendre conscience à l'élève de l'incohérence de son action ?
3. L'enseignant a choisi de fournir du matériel aux élèves : en quoi l'utilisation de l'abaque peut-elle servir son objectif de renforcer les connaissances de ses élèves sur la numération ?
4. L'enseignant poursuit ce travail avec une activité issue de ERMEL CE2 (Hatier 1995) :

• **Description rapide**
Il s'agit de changer un ou deux chiffres d'un nombre sans effacer et sans taper le nombre à obtenir.

• **Matériel**
Une calculette pour chaque élève.

DÉROULEMENT

Plusieurs exercices sont proposés.

- « Change un chiffre dans un nombre sans effacer :
 - passe de 4 675 à 4 875 ;
 - passe de 5 724 à 3 724 ;
 - passe de 10 534 à 19 534. »
- « Change deux chiffres dans un nombre sans effacer :
 - passe de 2 348 à 2 468 ;
 - passe de 3 591 à 3 621 ;
 - passe de 6 778 à 7 378 ;
 - passe de 7 832 à 6 932.

Puis écris ce que tu as fait. »

- a. Le choix de placer cette activité à la suite de la précédente peut privilégier une procédure pour obtenir l'affichage de 4 875 à partir de 4 675. Décrire cette procédure.
- b. Décrire une autre procédure valide que des élèves sont susceptibles de mettre en œuvre pour obtenir l'affichage de 4 875 à partir de 4 675.
- c. Qu'apporte l'utilisation de la calculette pour ce travail sur la numération ?

Exercice 3 (3 points)

Un magasin propose une carte de fidélité gratuite à ses clients.

Le jour de l'anniversaire de l'ouverture de ce magasin, les clients porteurs de la carte de fidélité bénéficient de 25% de réduction sur tous leurs achats.

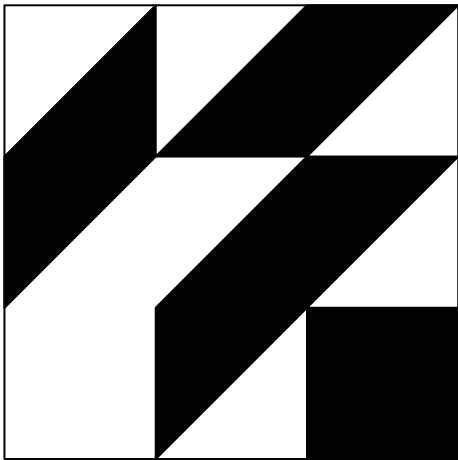
Par ailleurs, ce même jour, le magasin offre à tous ses clients, détenteurs ou non de la carte de fidélité, une promotion sur les pantalons : « *Pour trois pantalons achetés, le moins cher des trois est offert !* ».

Les deux offres ne sont pas cumulables.

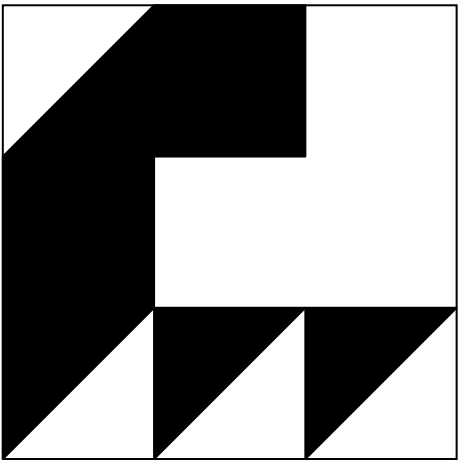
1. Un client possédant la carte de fidélité arrive en caisse avec trois pantalons de même prix. Il souhaite utiliser sa carte de fidélité. La caissière lui propose de saisir plutôt l'offre promotionnelle et de ne payer que deux pantalons. Le client préfère utiliser sa carte de fidélité. A-t-il raison ou tort ? Justifier.

2. Un second client possédant aussi la carte de fidélité se présente à la caisse avec trois pantalons de prix différents.
- a. Donner un exemple de prix pour lesquels le client a intérêt à utiliser sa carte de fidélité.
 - b. Donner un exemple de prix pour lesquels le client a intérêt à choisir la promotion.
 - c. On désigne par p_1 , p_2 et p_3 les prix de ces trois pantalons avec $p_1 \leq p_2 \leq p_3$. À quelle condition sur ces prix le client a-t-il intérêt à utiliser sa carte de fidélité ?

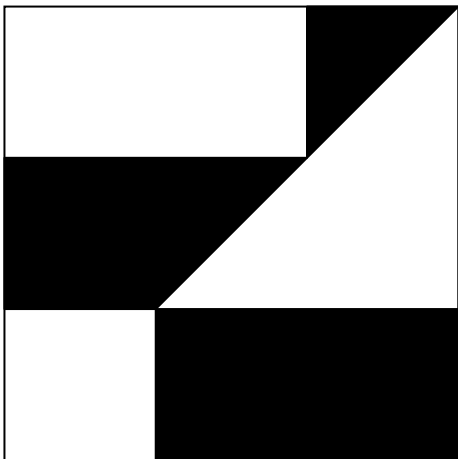
Quel carré a la plus grande étendue de noir ?



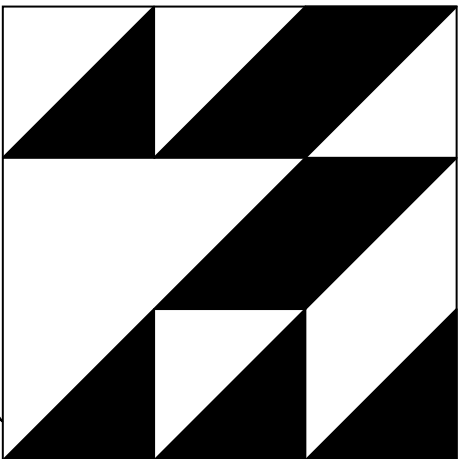
A



B



C



D

Réponse :
Explique comment tu as fait :

.....

.....

.....

.....

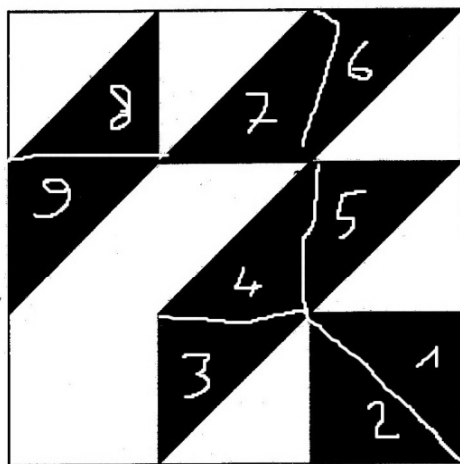
¹ D'après Fromentin J., Toussaint N. (2006), Fichier *Evariste Ecole*, APMEP, brochure n°175

Annexe 2 : Travaux d'élèves

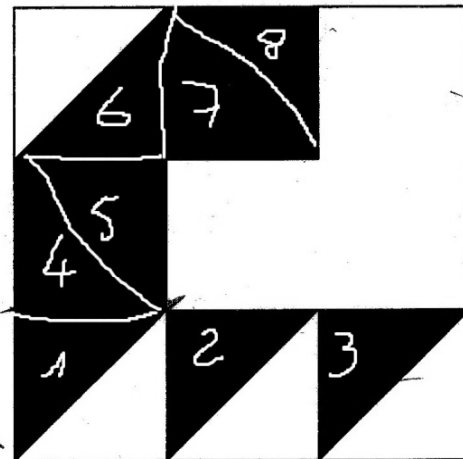
Remarque : sur les dessins les traits au crayon à papier de l'élève ont été repassés en blanc.

Lucie

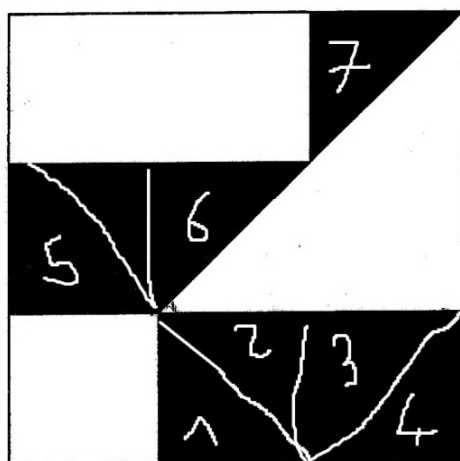
Quel carré a la plus grande étendue de noir ?



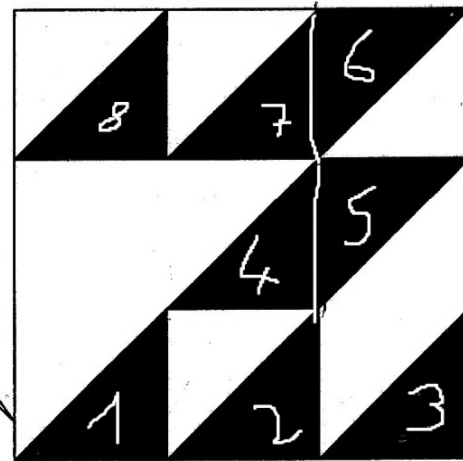
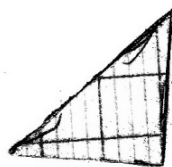
A 9



B 8



C 8



D 8

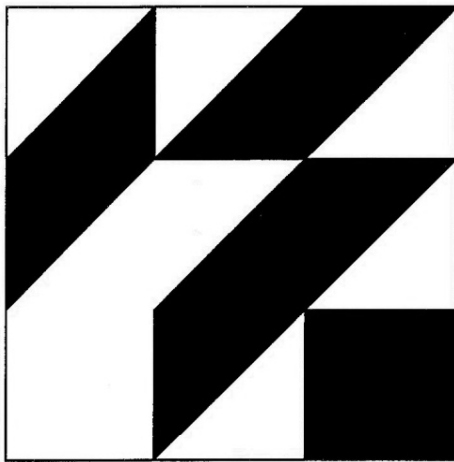
Réponse :

A

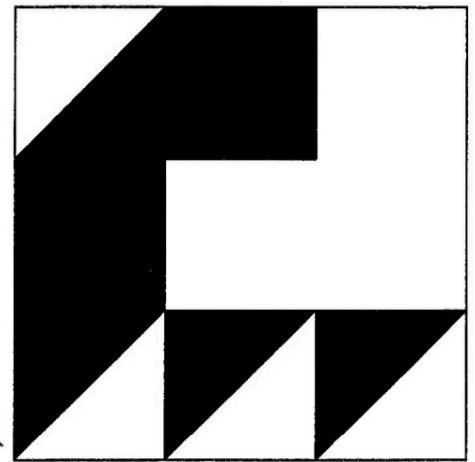
Explique comment tu as fait :

J'ai découpé un triangle de la même forme que les autres et j'ai mis mon triangle sur les parties grises et j'ai compté combien il y avait de triangles.

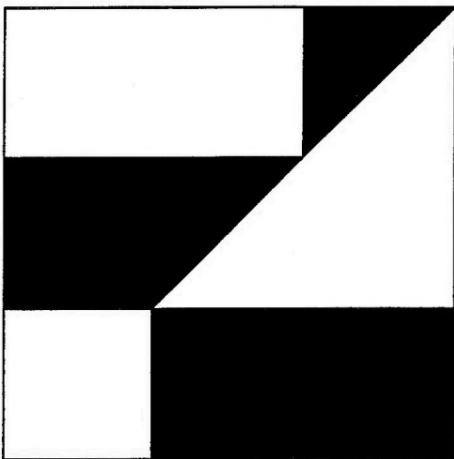
Quel carré a la plus grande étendue de noir ?



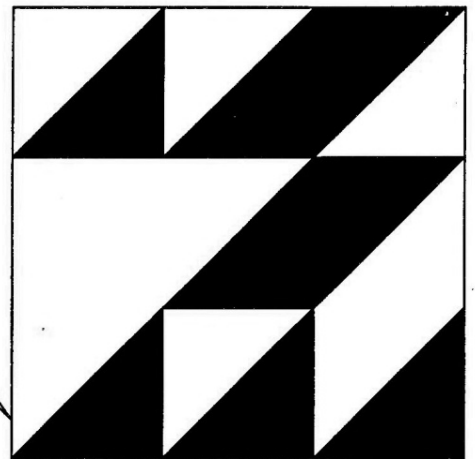
A



B



C



D

Réponse :

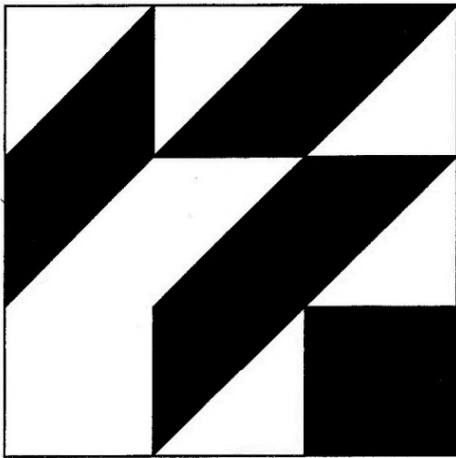
A

Explique comment tu as fait :

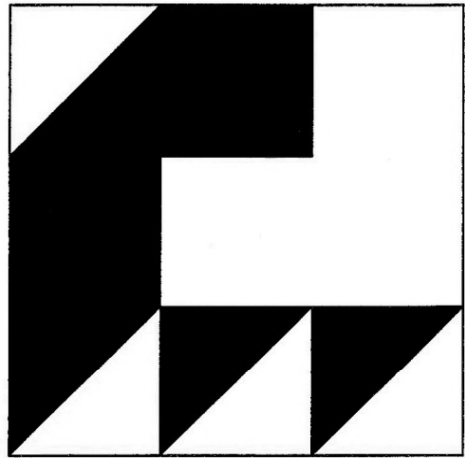
Un carré de 2 cm de côté, ça a 4 cm² d'aire. Un demi-carré de 2 cm de côté, ça a donc 2 cm² d'aire et puis, j'additionne tous les demi-carrés en cm² puis je les range du plus petit au plus grand. Et c'est le A qui a la plus grande surface noire.

Stessy.

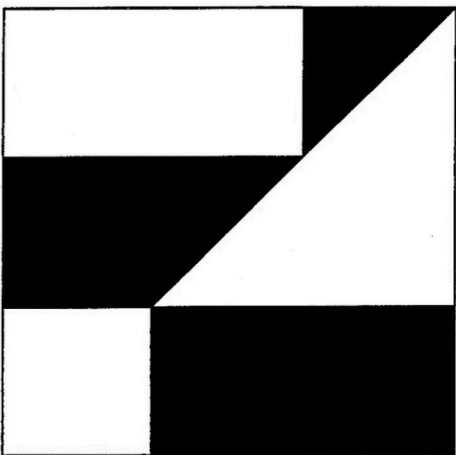
Quel carré a la plus grande étendue de noir ?



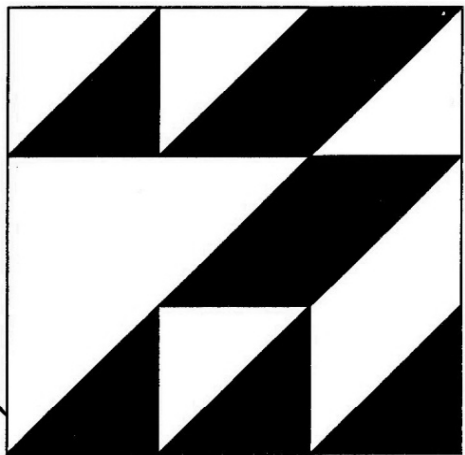
A



B



C



D

Réponse :

D

Explique comment tu as fait :

J'ai bien regardé le noir et j'ai regroupé.....
tout le noir dans un coin alors j'ai trouvé la.....
réponse.....

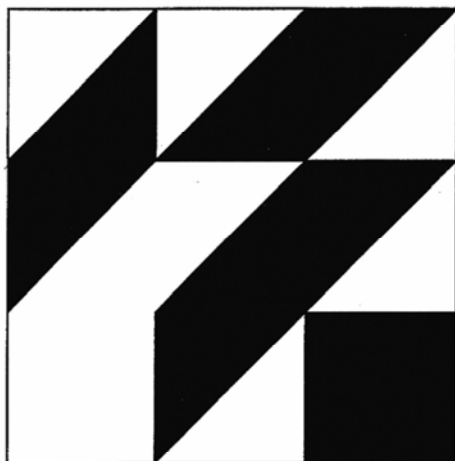
P'ins de de?

2,7 + 2 + 2,7 + 2 + 2,7 + 2 + 2,7 + 2 + 2,9 + 2 + 5,6 + 2 + 2 + 2 + 2 = 21,5

Cindy

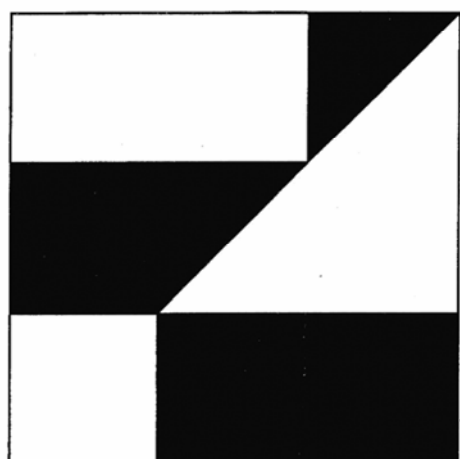
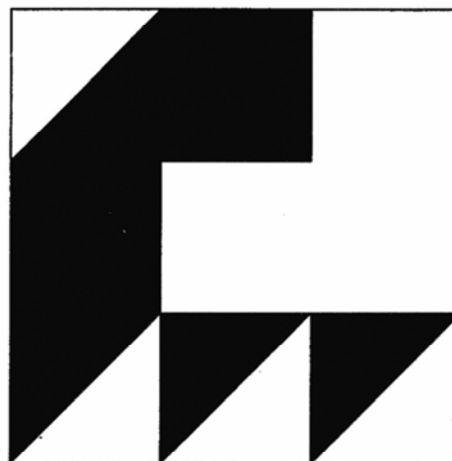
①

Quel carré a la plus grande étendue de noir ?



A

B



C

D

2 + 2 + 2 + 2 + 2,7 + 4 + 2,8 + 4 + 2 + 2,7 + 2 + 2,7 = 12,9

③

Réponse :

A

Explique comment tu as fait :

J'ai mesuré avec ma règle et...
J'ai additionné tout ça et ça a fait 21,5...
et j'ai trouvé que c'était le plus grand.