Fractions et calendriers

à partir de l'***Introduction aux Phénomènes*** de **Géminos**

François PUEL (Observatoire de Besançon)

Résumé : Après avoir présenté le principal problème arithmétique des calendriers et *l'Introduction aux phénomènes* de Géminos, on examine les différentes formulations des fractions figurant dans ce livre. On cherche à comprendre comment les anciens ont pu arriver à des périodes et des règles d'intercalation précises. Puis on présente un outil arithmétique assez élaboré, les "fractions continues". On se demande enfin si les savants de l'antiquité ont pu arriver à cette notion, et comment.

Introduction

Pourquoi cette association entre ces deux termes, les calendriers qui nous font penser au jour de l'an, aux fêtes, à l'organisation de notre temps, et les fractions, notion abstraite considérée au mieux comme un outil utile mais ingrat ?

Le calendrier est un système social de mesure du temps prenant le jour comme unité. Certains, comme le calendrier maya de 260 jours, semblent servir uniquement à fonder une chronologie, mais la plupart ont essayé d'ajuster le plus exactement possible les trois grands cycles astronomiques jour, lunaison et année des saisons qui rythment et conditionnent la vie des hommes.

Malheureusement l'année tropique, (année des saisons, valant actuellement 365,2422... j, 365,2424... j dans l'antiquité) et la lunaison moyenne ou mois lunaire (29,5306... j) ne comptent pas un nombre entier de jours. De même, l'année ne contient pas un nombre entier de mois lunaires.

Les calendriers solaires, bien adaptés aux besoins de beaucoup de peuples, prennent en général une année normale de 365 jours. Mais de temps en temps, pour corriger une dérive des saisons, ils rajoutent à cette année un jour supplémentaire (que l'on dit chez nous bissextile.).

Les calendriers lunaires prennent une année de 12 mois alternativement de 29 et de 30 jours, soit 354 j. Mais de temps en temps, pour éviter une dérive des phases de la lune, ils prennent une année "abondante" de 355 j.

Les calendriers luni-solaires, sont les plus compliqués et les plus intéressants. Il s'agit maintenant de concilier trois unités de temps différentes : le jour, le mois lunaire, facile à repérer et d'utilisation générale certainement très ancienne, et l'année solaire, indispensable pour les peuples agriculteurs ou marins. Pour éviter un trop grand décalage entre une année formée de 12 mois lunaires et le retour des saisons, la solution est de rajouter un mois intercalaire de temps en temps.

Pour les Chaldéens et les Hébreux ces intercalations se faisaient empiriquement à partir de l'observation du ciel et de la végétation. Ensuite elles se sont faites plus régulièrement.

C'est pour l'établissement des valeurs moyennes des cycles astronomiques et pour régler les intercalations que l'on a besoin, plus ou moins explicitement, des fractions.

Pour ne pas tomber dans un exposé encyclopédique, nous nous limiterons en général aux calendriers décrits dans l'*Introduction aux phénomènes* de Géminos.

I L'*Introduction aux Phénomènes* de Géminos

1) L'auteur est très mal connu.

Il a vécu entre 100 avant et 100 après J.-C., sans pouvoir préciser.

Sans doute grec, peut-être originaire de Rhodes, il a séjourné à Rome.
Il serait l'auteur de 2 autres ouvrages actuellement disparus :
l'*Abrégé des Météorologiques de Posidonius* et *La Science Mathématique*.

2) L'ouvrage qui nous intéresse, a été écrit en grec. C'est un manuel d'initiation aux questions d'astronomie, de géographie mathématique, de calendrier.
(Le plus ancien manuscrit que nous ayons, vers 1170, est une traduction latine de l'arabe, il existe également une traduction hébraïque de l'arabe datant de 1246, les trois manuscrits grecs les plus anciens datent des années 1300-1330.)

Mentionnons les principaux sujets traités :
Le zodiaque, les constellations, l'axe et les pôles, les cercles de la sphère, le jour et la nuit, les mois, les phases de la lune, l'éclipse de soleil, l'éclipse de lune, les planètes et "leur mouvement inverse de celui de l'univers", les levers et couchers des étoiles, les zones terrestres, les lieux géographiques, les pronostics par les étoiles (l'auteur ne cache pas son scepticisme à leur sujet), l'exéligme (voir plus loin), et enfin, en annexe, un parapegme (calendrier météorologique en liaison avec le parcours du soleil dans les constellations et les levers et couchers d'étoiles d'après différents auteurs).

Cet ouvrage contient probablement le plus important exposé sur les calendriers de l'Antiquité.

3) Problèmes de calendriers et de fractions contenus dans l'*Introduction aux Phénomènes*

Dans le livre **I** qui traite **du zodiaque**, Géminos définit l'année solaire et donne sa valeur en jours (365 j 1/4), il définit les saisons et donne leurs valeurs. Puis il explique leur inégalité par l'excentricité (décentrement) du cercle du soleil.

Dans le livre **VIII** traitant **des mois**, l'auteur définit le mois lunaire et donne sa valeur en jours (29 j 1/2 1/33), ensuite il explique l'élaboration de certains calendriers célèbres.
Pour le calendrier grec, *on a cherché, chez les astronomes, une durée qui contiendrait un nombre entier de jours, de mois lunaires et d'années solaires* pour pouvoir, pour des motifs religieux, *faire aller les années avec le soleil, les jours et les mois avec la lune.*
Il passe ensuite au calendrier égyptien basé d'après lui sur un principe tout différent. Pour que leurs fêtes balayent toute l'année solaire, les Égyptiens ont adopté une année religieuse de 365 jours. Au bout de 4 ans les fêtes avancent d'un jour, en 120 ans d'un mois, et en 1460 ans elles reprennent leur place originelle dans l'année des saisons (1460 x 365,25 = 1461 x 365).
Après cette digression, Géminos retourne aux efforts des Grecs.
On a d'abord essayé une période bisannuelle avec un mois intercalaire tous les 2 ans. Le résultat étant très mauvais, il explique comment on est arrivé à l'octaétéride, période de 2.922 jours ou 8 années, soit 99 mois dont 3 intercalaires. Il parle ensuite d'essais d'amélioration de ce système par des périodes de 16 puis 160 ans.
Il parle enfin de la période de 19 ans, soit 6.940 jours ou 235 mois dont 7 intercalaires, qu'il attribue à Euctémon, Philippe et Callippe et que nous appelons "cycle de Méton" et d'une amélioration sur 76 ans.

Le livre **XVIII** ne traite pas exactement de problèmes de calendriers mais **de l'exéligme** *durée la plus petite possible contenant un nombre entier de mois, de jours et de "révolutions anomalistiques"* (*intervalle de temps entre le plus petit déplacement* journalier *de la lune et le prochain plus petit déplacement*, on parlerait maintenant de l'intervalle de temps entre 2 passages successifs de la lune au périgée, c'est une période liée à l'excentricité de l'orbite lunaire). Cette période de 669 mois, soit 19.756 jours vaut 3 fois la période de 18 ans et 11 jours que nous appelons "saros". Elle servait peut-être à prévoir les éclipses.

II **Différentes formulations des fractions** rencontrées dans l'*Introduction aux phénomènes* (on a transposé en notations modernes)

1) Fractions égyptiennes :

Les anciens Égyptiens ne connaissaient comme fractions, à l'exception de 2/3, que les inverses de nombres entiers, ce qui les obligeait à des formulations assez compliquées, par exemple 2/29 était noté

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} \qquad \text{(papyrus Rhind)}$$

On ne sait pas bien comment les scribes faisaient pour obtenir les tables de décompositions qu'ils utilisaient ; d'ailleurs la solution n'est pas unique.
Bien des algorithmes ont été donnés pour cela.

Le plus célèbre et le plus court est la méthode de Fibonacci (1202) :
Soit m/n la fraction à décomposer : "on prend pour premier terme de la décomposition la plus grande fraction unitaire (c.a.d. de numérateur 1) inférieure à m/n. Ensuite on soustrait cette fraction unitaire de m/n, ce qui donne une nouvelle fraction. Le deuxième terme de la décomposition est la plus grande fraction unitaire inférieure ou égale à la fraction restante", etc. (Gardner, 1980).

Exemple : $$\frac{2}{29} = \frac{1}{15} + \left(\frac{2}{29} - \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{15} + \frac{30 - 29}{29 \times 15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{435}$$

Pour une fraction m/n inférieure à 1, cette méthode conduit toujours à une somme de fractions "unitaires" dont le nombre de termes est inférieur ou égal à n. Mais elle peut mener à des dénominateurs bien compliqués.

Dans les problèmes de calendriers, la fraction à décomposer n'étant en général connue que d'une manière approchée, il vaut mieux essayer par tâtonnement avec des dénominateurs correspondant aux cycles que l'on veut trouver a priori.
On peut généraliser en admettant le signe "-" , c.a.d. en considérant des sommes et des différences d'inverses de nombres entiers.

Géminos a utilisé ce type de formulation :

Pour la valeur de l'année, il donne 365 j $\frac{1}{4}$

Pour les saisons 94 j $\frac{1}{2}$, 92 j $\frac{1}{2}$, 88 j $\frac{1}{8}$, 90 j $\frac{1}{8}$

Et surtout, il trouve 29 j $\frac{1}{2}\ \frac{1}{33}$ pour le mois lunaire et 27 j $\frac{1}{2}\ \frac{1}{18}$ pour la révolution anomalistique de la lune.

Géminos sait calculer avec ces fractions égyptiennes (comment **?**) :
par exemple retranchant l'année lunaire de l'année solaire pour déterminer l'erreur de l'octaétéride, il obtient

$$365\,j\,\frac{1}{4}\ -354\,j\,\frac{1}{3}\ =\ 10\,j\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$$

et multipliant cet écart par 8, il obtient

$$8 \times (10\,j\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}\ )\ =\ 87\,j\,\frac{1}{3}$$

2) Autres fractions :

Géminos utilise aussi des formulations plus générales, par exemple retranchant la valeur de l'année admise de celle prise pour le cycle de Méton, il obtient un excédent

$$365\,j\,\mathbf{\frac{5}{19}}\ -365\,j\,\frac{1}{4}\ =\ \frac{1}{76}\ j \qquad \text{(base du cycle de Callippe)}$$

3) Fractions sexagésimales :

Notre numération de position décimale nous permet de noter d'une manière raccourcie

$$3{,}14159 \qquad \text{au lieu de} \qquad 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5}$$

De même, les chaldéens utilisaient une numération de position à base 60 qui aurait pu aussi amener à écrire des nombres de la forme

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} \qquad \text{soit} \quad 3\ \ 8'\ 29''\ 44'''$$

(autre approximation du nombre π encore meilleure).

Pour passer de la notation décimale à la notation sexagésimale, je note et je retranche la partie entière, puis je multiplie le reste par 60 ; je note et je retranche la nouvelle partie entière, etc.

Quand à passer de la notation sexagésimale à la notation décimale, il suffit de laisser faire la calculette.

Cette numération sexagésimale, qui subsiste encore pour les mesures d'angles et d'heures, était couramment utilisée jusqu'au XVII^{e} siècle, et c'est sans doute à partir de tels développements qu'ont été déterminées les règles du calendrier grégorien d'après G. Moyer (1982).

En effet la durée de l'année était estimée à

365 jours 5 heures 49 minutes 16 secondes

soit 365,2425462963... jours

$$\text{ou} \qquad (365 + \frac{14}{60} + \frac{33}{60^2} + \frac{10}{60^3}\ )\ \text{jours} \quad \text{soit} \quad 365\ j\ 14'\ 33''\ 10'''$$

Si on tronque en abandonnant le dernier terme (soit 4 s), on garde

$$365 + \frac{14}{60} + \frac{33}{60^2} = 365 + \frac{97}{400} = 365{,}2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$$

Dans le calcul de l'erreur de l'octaétéride, Géminos prend pour le mois lunaire

$$29\ j\ 31'\ 50''\ 8'''\ 20'''' \qquad \text{c.a.d.} \qquad 29\ j + \frac{31}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{8}{60^3} + \frac{20}{60^4}$$

Enfin, dans la partie sur l'exéligme, Géminos emploie concurremment les notations égyptienne et sexagésimale pour exprimer les fractions de jour.

III Comment a-t-on pu arriver à des périodes et des règles d'intercalation précises ?

On en est réduit aux conjectures, sauf pour quelques points explicités par Géminos. Il est certain que l'on n'a pu y arriver que par des **observations portant sur de longues périodes**.
C'est ainsi que l'observation du retour des *fêtes d'Isis* au solstice d'hiver au bout de 1460 années solaires a pu conduire à la valeur admise de 365 j 1/4 car $1460 \times 365{,}25 = 1461 \times 365$

Mais il a du y avoir de nombreux **tâtonnements** qui peuvent s'exprimer en termes de fractions de différentes manières.

1) D'abord sous la forme des <u>fractions égyptiennes</u>.
Montrons le par quelques exemples basés sur des cycles que l'on pourrait chercher a priori.

1er exemple : le mois lunaire
Partant de 29 j 1/2 , on s'aperçoit au bout de quelques années que cette valeur est trop faible. On veut ajouter 1 jour supplémentaire de temps en temps en respectant le cycle de 12 mois (année lunaire). On rajoute 1 jour tous les 3 ans ; on obtient

$$29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{36} = 29{,}527778...$$

Cette correction s'avérant insuffisante au bout d'une génération, on rajoute encore un jour supplémentaire tous les 30 ans ; on obtient

$$29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{36} + \frac{1}{360} = 29{,}530556...$$

C'est l'excellente approximation du calendrier musulman.

2e exemple : le calendrier luni-solaire

$$\frac{365{,}2424}{29{,}5306} = 12{,}368269...$$

Si on cherche des cycles de 4 ans à cause des olympiades, on rajoute un mois tous les 4 ans, puis, cette correction étant insuffisante, encore un mois tous les 8 ans, ce qui nous fait

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

C'est l'octaétéride.

Si on cherchait des cycles de 3 et 5 ans et leurs multiples, on pourrait considérer la décomposition

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30} = 0{,}366667... = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$$

ou mieux $\frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{600} = 0{,}368333...$ etc.

2) On peut aussi imaginer d'exprimer les tâtonnements par des <u>suites d'intercalations de périodes différentes</u> d'où des fractions de la forme

$$\mathbf{\frac{i + j}{i\,m + j\,n}}$$

Commençons par un exemple : on veut concilier le mois lunaire avec l'année solaire par l'adjonction d'un mois intercalaire de temps en temps.
La fréquence moyenne doit être

$$\frac{365{,}2424}{29{,}5306} - 12 = 0{,}368269...$$

On essaye un mois tous les 2 ans. La fréquence est 1/2 = 0,5
C'est beaucoup trop.

On peut essayer alors un mois intercalaire tous les 3 ans. Cela ferait une fréquence 1/3 = 0,333... trop faible.

On essaye alors 1 mois intercalaire tous les 3 ans et 1 tous les 2 ans ; on obtient une fréquence

$$\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

trop grande mais un peu meilleure. C'est la fréquence d'intercalation du calendrier gaulois de Coligny (Parisot).

C'est une espèce de moyenne entre 1/2 et 1/3 (on dit souvent "médiation") que certains ont appelée "l'addition des cancres" (Ferréol).
En fait, on n'additionne pas des fractions, mais on fait se succéder des intercalations.

On peu encore améliorer l'approximation de la fréquence :
Prenons 2 fois une intercalations tous les 3 ans et une pour 2 ans, la fréquence devient

$$\frac{1+1+1}{3+3+2} = \frac{2+1}{2 \times 3 + 2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

c'est celle de l'octaétéride.

On obtiendrait de même l'approximation

$$\frac{4}{11} = \frac{3+1}{3 \times 3 + 2} = 0{,}3636...$$

qui semble n'avoir jamais servi

et celle du cycle de Méton

$$\frac{7}{19} = \frac{5+2}{5 \times 3 + 2 \times 2} = 0{,}3684...$$

qui peut se présenter par exemple sous la forme

$$\frac{1+1+1+1+1+1+1}{3+3+2+3+3+2+3}$$

si l'on veut répartir le plus uniformément possible les mois intercalaires pour minimiser les décalages.

La possibilité d'approcher par cette méthode une fréquence donnée d'aussi près que l'on veut repose sur la propriété facile à vérifier :

Toute fraction rationnelle $\frac{n}{d}$ *comprise entre* $\frac{n_1}{d_1}$ *et* $\frac{n_2}{d_2}$ *peut s'exprimer sous la forme*

$$\frac{n}{d} = \frac{i\,n_1 + j\,n_2}{i\,d_1 + j\,d_2}$$

Il suffit de prendre $i = n_2\, d - n\, d_2$ et $j = n\, d_1 - n_1\, d$

Tableau des fractions de la forme $\mathbf{\dfrac{i + j}{3\,i + 2\,j}}$ où l'on a mis en caractères gras les fractions utilisées par des calendriers luni-solaires.

	i =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
j = 0	**0**	1/3	2/6	3/9	4/12	5/15	6/18	7/21	8/24	9/27
1	**1/2**	**2/5**	**3/8**	4/11	5/14	6/17	7/20	8/23	9/26	--
2	2/4	3/7	4/10	5/13	6/16	**7/19**	8/22	9/25	--	--
3	3/6	4/9	5/12	6/15	7/18	8/21	9/24	--	--	--
4	4/8	--	--	--	--	--	--	--	--	--

IV Parlons encore d'un moyen efficace mais assez complexe de trouver de bonnes approximations rationnelles du rapport de 2 fréquences, et donc de bonnes règles d'intercalations, **les fractions continues** simples.

1) **Définition** : soit un nombre positif réel α et le développement

$$\alpha = u_o + \frac{1}{\alpha_1} \quad , \ldots , \quad \alpha_{n-1} = u_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}$$

avec les α_i réels positifs supérieurs à 1 et les u_i entiers positifs
A l'étape n, on prend l'inverse de la partie fractionnaire de α_{n-1}

$$u_{n-1} = \mathrm{Int}(\alpha_{n-1}) , \qquad \alpha_n = \frac{1}{\alpha_{n-1} - u_{n-1}}$$

où la notation Int( ) désigne la fonction partie entière.
Les α_i sont les quotients totaux et les u_i les *quotients partiels* successifs.

Ce développement

$$\boxed{\alpha = u_o + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \cfrac{1}{u_4 + \cfrac{1}{u_5 + \cfrac{1}{u_6 + \ldots}}}}}}}$$

que nous noterons $\alpha = (u_o \,;\, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots)$ est le développement en *fraction continue* de α.
Ce procédé s'arrête si et seulement si α est rationnel.
Résumons encore l'algorithme permettant de trouver la série des quotients partiels :

Noter et retrancher la partie entière, inverser le reste,
noter et retrancher la nouvelle partie entière, inverser le nouveau reste etc...

2) **Approximations de α à partir de son développement**

Définissons

$$\begin{cases} P_o = u_o, & Q_o = 1 \\ P_1 = u_o u_1 + 1, & Q_1 = u_1 \\ P_2 = (u_o u_1 + 1) u_2 + u_o, & Q_2 = u_1 u_2 + 1 \\ P_n = P_{n-1} u_n + P_{n-2}, & Q_n = Q_{n-1} u_n + Q_{n-2} \end{cases}$$

Les fractions rationnelles $\frac{P_n}{Q_n}$ s'appellent les *réduites* successives de α.

(On peut remarquer que l'itération passant des réduites $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ à la suivante $\frac{P_n}{Q_n}$ est du type d'interpolation étudié précédemment : $\frac{i\, n_1 + j\, n_2}{i\, d_1 + j\, d_2}$ avec i = 1 et j = u_n)

Les quotients partiels u_i étant des entiers positifs, les entiers Q_i et P_i successifs vont croissant.

De l'itération

$$P_{n+1} = P_n\, u_{n+1} + P_{n-1}\,, \qquad Q_{n+1} = Q_n\, u_{n+1} + Q_{n-1}$$

on tire la relation

$$P_{n+1}\, Q_n - Q_{n+1}\, P_n = - (P_n\, Q_{n-1} - Q_n\, P_{n-1}) = \ldots = (-1)^n$$

P_n et Q_n sont donc premiers entre eux (théorème de Bachet-Bezout)

et

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{Q_n\, Q_{n+1}}$$

d'où le développement en série

$$\alpha = \frac{P_o}{Q_o} + \frac{1}{Q_o\, Q_1} - \ldots + \frac{(-1)^n}{Q_n\, Q_{n+1}} + \ldots$$

et

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n\, Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}$$

(On peut remarquer que l'expression $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_o}{Q_o} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{Q_i\, Q_{i+1}}$ est de la forme des fractions égyptiennes généralisées admettant le signe –)

Ainsi

<u>les réduites successives $\frac{P_n}{Q_n}$ sont des fractions irréductibles convergeant en alternant vers α.</u>

Définition : on dit que la fraction rationnelle irréductible $\frac{A}{B}$ est une *meilleure approximation* de α si elle approche α de plus près que toute fraction rationnelle irréductible ayant un dénominateur inférieur ou égal à B, c.a.d. si

$$\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| < \left|\alpha - \frac{A}{B}\right| \Rightarrow Q > B$$

Les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ sont des "meilleures approximations" de α ; ce ne sont pas les seules, mais elles sont privilégiées, en effet :

* Si $\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| < \frac{1}{2Q^2}$, alors $\frac{P}{Q}$ est une réduite.

* Sur 2 réduites successives, 1 au moins vérifie :

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{2Q^2}$$

* Sur 3 réduites successives, 1 au moins vérifie :

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, Q^2} \qquad \text{etc.}$$

En conclusion :

Les fractions continues fournissent, par leurs réduites successives, les fractions rationnelles les plus simples approchant le mieux possible un nombre réel donné.

Leur application dépasse le domaine des calendriers et des calculs d'engrenages, elles ont aussi un grand intérêt en arithmétique, en analyse, en dynamique théorique etc.

Encore un mot pratique sur la convergence des réduites successives : on déduit de l'itération définissant les P_n et Q_n qu'un quotient partiel élevé produira une réduite assez proche de la précédente, mais beaucoup plus compliquée. On aura donc intérêt à arrêter un développement avant un quotient partiel élevé.

3) Applications aux calendriers

1er exemple : <u>l'année solaire</u>

L'année tropique dure actuellement 365,2422... j

Développons $\alpha = 0{,}2422$: $\alpha = (0; 4, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 2, ...)$

Les réduites successives sont

$$\mathbf{0}, \ \mathbf{\frac{1}{4}}, \ \frac{7}{29}, \ \mathbf{\frac{8}{33}}, \ \frac{31}{128}, \ \frac{132}{545}, \ \frac{163}{673}, \ \frac{295}{1218}, \ \frac{458}{1891}, \ \frac{1211}{5000}, \ \dots$$

Il y a 2000 ans, l'année tropique était de 365,2424... j.

Développons $\alpha = 0{,}2424$: $\alpha = (0; 4, 7, 1, 37, ...)$

Les réduites successives sont

$$\mathbf{0}, \ \mathbf{\frac{1}{4}}, \ \frac{7}{29}, \ \mathbf{\frac{8}{33}}, \ \frac{303}{1250}, \ \dots$$

Les 4 premières sont les mêmes que plus haut.

La 1ere donne l'année "vague" de 365 j des égyptiens.

La 2e donne l'année julienne de 365,25 j.

La réduite 8/33 = 0,2424... a été utilisée en Perse au XIe siècle.

La réduite 31/128 = 0,2421875 a été proposée au XIXe siècle par l'astronome Medler.

<u>Mais</u> on ne retrouve pas la bonne approximation

$$0{,}2425 = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$$ base du calendrier grégorien.

2^e^ exemple : <u>les calendriers luni-solaires</u>

$$\frac{365{,}2424}{29{,}5306} = 12{,}368269...$$

Développons $\alpha = 0{,}368269$: $\alpha = (0; 2, 1, 2, 1, 1, 17, 1, 1, 1, ...)$

Les réduites successives sont

$$0\,,\ \mathbf{\frac{1}{2}}\,,\ \mathbf{\frac{1}{3}}\,,\ \mathbf{\frac{3}{8}}\,,\ \frac{4}{11}\,,\ \mathbf{\frac{7}{19}}\,,\ \frac{123}{334}\,,\ \frac{130}{353}\,,\ \frac{2653}{5000}\,,\ ...$$

Les solutions du 13^e^ mois tous les 2 puis tous les 3 ans ont été employées par les grecs et peut-être par les gaulois.
La solution 3/8 (99 mois lunaires pour 8 ans) est la base de l'octaétéride des Grecs.
La réduite 7/19 (235 lunaisons pour 19 ans) nous donne le cycle de Méton (Athènes, 433 av. J. C.) utilisé par le calendrier juif et le calendrier liturgique chrétien ainsi que par les calendrier, chinois, tibétain etc.
Les réduites successives sont les mêmes jusqu'à 7/19 que l'on adopte la valeur actuelle de 365,2422... j ou l'approximation grégorienne de 365,2425 j.

V Cet algorithme des fractions continues, connu explicitement depuis le XVII^e^ siècle (Brouncker) et développé au XVIII^e^ siècle (Euler, Lagrange), **a-t-il déjà été ébauché par les Anciens ?**

1) Dans ses calculs pour établir un calendrier luni-solaire, Géminos commence par retrancher une année lunaire c.a.d. 12 mois lunaires de 29,5 j d'une année solaire de 365,25 j ; il reste 11,25 j, soit 1/8 de 90 j, ou environ 1/8 de 3 mois. D'où la règle des 3 mois supplémentaires pour 8 ans (l'octaétéride).
C'est par une démarche semblable que l'on enlève la partie entière 12, du rapport de l'année au mois : $\frac{365{,}25}{29{,}5306} - 12 = 0{,}368526...$
Mais ensuite Géminos ne passe pas par les réduites 1/2 et 1/3 ; il déclare tout de suite que 0,368526... est proche de 3/8.
Quand à la période de 19 ans, Géminos la donne directement.
De la démarche des fractions continues, il ne prend que la soustraction de la partie entière, ensuite ce sont apparemment des tâtonnements pour trouver des <u>plus petits multiples communs</u> (p.p.c.m.) <u>approchés</u>.

2) Pourtant, malgré la faiblesse du système de numération grec qui rendait les divisions extrêmement difficiles (cf. Annexe), des spécialistes de la science antique, Fortia d'Urban, P. Tannery, Th. Heath ont écrit que les anciens devaient connaître les fractions continues.
Leur argumentation s'appuie sur l'excellente approximation $\frac{43}{37}$ du rapport $\frac{71755875}{61735500}$ donnée par Aristarque dans son traité *des Grandeurs et des Distances du Soleil et de la Lune* (à la proposition XVI).

En effet, si je développe en fraction continue, avec ma calculette, le quotient $\alpha = \frac{71755875}{61735500}$, je trouve

$\alpha = (1; 6, 6, 4, 1, 2, 1, 2, 5, 1, 66, ...)$ d'où

$\frac{P_o}{Q_o} = 1$ $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{6}$ $\mathbf{\frac{P_2}{Q_2} = \frac{43}{37}}$ $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{179}{154}$ $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{222}{191}$

etc.

3) La solution est peut-être à chercher dans l'algorithme d'Euclide pour déterminer le plus grand diviseur commun (p.g.c.d.) de 2 nombres entiers donnés :
On divise le plus grand par le plus petit, puis le diviseur par le reste obtenu, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'une de ces divisions donne un reste nul, le dernier diviseur employé est le p.g.c.d. (Manuel d'arithmétique des années 50)

Toutes ces divisions sont des divisions euclidiennes avec un quotient et un reste entiers (en fait, ce type de "division" n'est qu'une suite de soustractions répétées jusqu'à ce que le reste soit inférieur au diviseur).

On peut remarquer (Damphousse, Itard, Lefort) que la recherche des quotients partiels pour développer le rapport de 2 nombres entiers en fraction continue revient à chercher leur p.g.c.d. par l'algorithme d'Euclide, mais en notant à chaque étape le quotient entier.

Reprenons par exemple le rapport $\frac{71755875}{61735500}$ et appliquons la méthode de recherche du p.g.c.d. :
nous trouvons une suite de quotients entiers coïncidant avec celle issue de l'algorithme des fractions continues jusqu'au 8^e terme mais qui s'arrête ensuite (1; 6, 6, 4, 1, 2, 1, 2, 6)
et nous avons le p.g.c.d. 3375.
Nous vérifions que $71755875 = 21261 \times 3375$
$61735500 = 18292 \times 3375$
Mais si j'applique, avec ma calculette, l'algorithme des fractions continues à la fraction simplifiée $\frac{21261}{18292}$, je retrouve le même développement illimité que plus haut.

Ainsi l'algorithme de recherche du p.g.c.d. d'Euclide, un peu plus long à programmer que celui des fractions continues, est plus précis car, utilisant seulement la division euclidienne et ne traitant donc que de nombres entiers, il n'amène pas d'erreurs de troncatures.

Peut-être certains savants de l'Antiquité auraient-ils pu procédé ainsi (**?**)

Une remarque et une question aux historiens et aux hellénistes à propos de l'octaétéride

L'octaétéride, période de 8 années soit environ 2922 jours, a longtemps servi de base pour le calendrier luni-solaire grec car elle est très proche d'un nombre entier de lunaisons
(99 x 29,53 = 2923,47).

Rappellons que la période synodique d'une planète est l'intervalle moyen de temps séparant deux positions relatives de la planète par rapport à la Terre et au Soleil. C'est ainsi par exemple que si la planète se lève le soir au moment du coucher du Soleil, ce phénomène se reproduira au bout d'une période synodique.

La période synodique de Vénus est d'environ 583,9 jours, ainsi

l'octaétéride vaut à très peu près 5 périodes synodiques de Vénus

En effet 2920 est la plus petit multiple commun (p.p.c.m.) de 365 = 5 x 73 et de 584 = 8 x 73

Cette propriété (liée par ailleurs à certains cycles des calendriers maya et aztèque) était-elle connue des anciens grecs **?**

Bibliographie

Sur les calendriers :

Couderc, P. : *Le Calendrier* , P.U.F. "Que sais-je ?" n° 203.
Géminos, *Introduction aux Phénomènes* , édition, présentation et traduction par G. Aujac, "Les Belles Lettres", Paris, 1975.
Guitel, G. : *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion, Paris, 1975.
Lefort, J. : *La saga des calendriers* , Belin "Pour la Science", Paris, 1999.
Moyer, G. : *Le calendrier grégorien* , in "Pour la Science", juillet 1982.
Parisot, J.P. et Suagher, F. : *Calendriers et chronologie* , Masson, Paris, 1996.

Sur les fractions égyptiennes et les fractions continues :

Damphousse, P. : *Découvrir l'arithmétique* , Ellipses, Paris, 2000.
Dumont, M. : *Le nombre π et les fractions continues* , in "Le petit Archimède", numéro spécial "π" , mai 1980.
Ferréol, R. : *Addition des cancres, suites de Brocot et friandises associées* , in "Quadratures", avril-mai-juin 1999.
Gardner, M. : *Jeux mathématiques* , Belin, Paris, 1980.
Le livre de G. Guitel
Itard, J. : *Arithmétique et Théorie des Nombres* , P.U.F. "Que sais-je ?" n° 1093.
Rouche, N. : *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*, Ellipses, Paris, 1998.
Trignan, J. : *Fractions continues* , Editions du Choix, Argenteuil, 1994.
Valiron, G. : *Théorie des fonctions* , Masson, Paris, 1942.
Pour l'histoire des fractions continues voir le site
http://www.reunion.iufm.fr/Recherche/IREM/Fiches/Brezinski2.htm

Et pour la numération grecque

Le livre de G. Guitel et les sites
http://fr.wikipedia.org/wiki/Num%C3%A9ration_grecque
http://kilana.unibe.ch:8080/TurtleGallery/652

Annexe : **Le système de numération grec**

Le système grec n'est pas un système de position,
c'est un système additif de base de 10.

Les Grecs (numération ionienne) se servaient de lettres accentuées ou non, et de ponctuation.

Dans cette numération, on peut retrouver des lettres dont l'usage est tombé en désuétude (stigma ou digamma, koppa, sampi).

Signe	Valeur	Signe	Valeur	Signe	Valeur
α	1	ι	10	ρ	100
β	2	κ	20	σ	200
γ	3	λ	30	τ	300
δ	4	μ	40	υ	400
ε	5	ν	50	φ	500
ς (stigma) ou F (digamma)	6	ξ	60	χ	600
ζ	7	ο	70	ψ	700
η	8	π	80	ω	800
θ	9	ϟ ou ϙ (koppa)	90	ϡ (sampi)	900

Pour distinguer un nombre d'un mot, on le surmontait d'une barre.

La présence d'une sorte de virgule à gauche désignait une multiplication par 1000 :

,α = 1000 ,β = 2000 etc

Pour exprimer une fraction unitaire, on ajoutait un "prime" à droite du nombre. :

$$\beta' = \frac{1}{2} \quad \text{etc.}$$

Ce système engendrait de nombreuses ambiguïtés que le contexte était censé lever. Il fallait aussi une grande habitude pour utiliser les 27 caractères nécessaires.

"Nous sommes redevables à un moine byzantin du XIV^e siècle, Rhabdas, du peu que nous savons sur la manière dont les Grecs calculaient" (Guitel) : les multiplications se décomposaient en produits de nombres simples à l'aide de tables et en addition des produits partiels.
Quant à la division, il n'en est pas question (mais la division euclidienne peut être considérée comme une suite de soustractions successives jusqu'à ce que le reste soit inférieur au diviseur).

Quelques exemples d'écritures de fractions que l'on trouve chez Geminos

(la fraction $\mathbf{\frac{1}{2}}$ n'est pas ici indiquée par **β'**, comme indiqué plus haut, mais par ***L'***)

$365\ \frac{1}{4}$ s'écrit $\overline{\tau\xi\varepsilon}\ \ \delta'$

$29\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{33}$ s'écrit $\overline{\kappa\theta}\ \ L'\ \lambda\gamma'$

$27\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{18}$ s'écrit $\overline{\kappa\zeta}\ \ L'\ \iota\eta'$

$\frac{5}{19}$ s'écrit $\bar{\varepsilon}$ *έννεακαιδεκάτων*

Et pour les fractions sexagésimales :

29 j 31' 50" 8''' 20'''' s'écrit

ήμερων $\overline{\kappa\theta}$
και πρώτων έξηκοστων $\lambda\alpha'$
και δευτέρων ν''
και τρίτων η'''
και τετάρτων κ''''