Environnement : climat et santé

François Sauvageot
Maître de conférences à l'Université Paris 7 & Animateur à l'IREM Paris 7
Présentation disponible sur le site http://www.math.jussieu.fr/~sauvageo

Objectif de l'atelier

Dans cet atelier, nous avons présenté quelques problèmes liés à l'environnement : ozone, nuisances sonores, épidémiologie etc. en en présentant diverses approches, permettant d'introduire des mathématiques de façon variée. Les modèles n'ont pas été étudiés en détail mais suffisamment explicités pour montrer comment se rattacher aux programmes de Lycée (surtout les classes Terminales L, ES et S). Des ouvertures ont été données pour des TPE en interaction avec langues vivantes, sciences sociales, biologie, chimie et physique. L'objectif est essentiellement de construire, à partir de canevas grossiers, des supports d'enseignement : séquence pédagogique, devoirs maisons, TP, TPE.

Ozone

On s'intéresse à des problèmes issus de la modélisation de la pollution, en particulier l'ozone troposphérique, c'est-à-dire l'ozone ($\mathbf{O_3}$) contenu dans l'atmosphère à une altitude inférieure à 15km. Le thème choisi est celui des problèmes d'analyse numérique et nous verrons sur un exemple très simple comment amener les élèves à améliorer la méthode d'Euler.

La cinétique d'une réaction est donnée par une constante de réaction $\boldsymbol{k}$. Par exemple la réaction $\mathbf{O}+\mathbf{O_2} \xrightarrow{k} \mathbf{O_3}$ est décrite cinétiquement par les équations $\mathbf{d}[\mathbf{O_3}]/\mathbf{d}t=\boldsymbol{k}.[\mathbf{O}].[\mathbf{O_2}]=-\mathbf{d}[\mathbf{O}]/\mathbf{d}t=-\mathbf{d}[\mathbf{O_2}]/\mathbf{d}t$.

Dans un modèle complexe de chimie, il y aura plusieurs équations et la cinétique sera donnée par un bilan de ces réactions. Ainsi un modèle élémentaire en pollution de l'air en troposphère inclut les trois réactions $\mathbf{O}+\mathbf{O_2} \xrightarrow{k} \mathbf{O_3}$,

$\mathbf{NO}+\mathbf{O_3} \xrightarrow{n} \mathbf{O_2}+\mathbf{NO_2}$ et $\mathbf{NO_2}+h\nu \xrightarrow{p} \mathbf{NO}+\mathbf{O}$.

Par ailleurs, l'oxygène $\mathbf{O_2}$ est tellement présent dans l'atmosphère qu'on peut considérer sa concentration comme constante. Quant au monoxyde d'azote, il faut tenir compte d'une source supplémentaire. D'où le bilan cinétique

$\mathbf{d}[\mathbf{O}]/\mathbf{d}t=\boldsymbol{p}[\mathbf{NO_2}]-\boldsymbol{k}[\mathbf{O}]$

$\mathbf{d}[\mathbf{NO}]/\mathbf{d}t=\boldsymbol{p}[\mathbf{NO_2}]-\boldsymbol{n}[\mathbf{NO}][\mathbf{O_3}]+\boldsymbol{s}$

$\mathbf{d}[\mathbf{NO_2}]/\mathbf{d}t= \boldsymbol{n}[\mathbf{NO}][\mathbf{O_3}]-\boldsymbol{p}[\mathbf{NO_2}]$

$\mathbf{d}[\mathbf{O_3}]/\mathbf{d}t=\boldsymbol{k}[\mathbf{O_2}]-\boldsymbol{n}[\mathbf{NO}][\mathbf{O_3}]$

Dans ces équations, $\boldsymbol{k}$ est grand (environ 10^5), $\boldsymbol{n}$ est petit (environ 10^{-16}) et $\boldsymbol{p}$ dépend de la période, diurne ou nocturne (entre 10^{-2} et 10^{-40}). C'est parce que $\boldsymbol{k}$ inclut la

concentration en oxygène $\mathbf{O_2}$ qu'il est nettement plus grand que les autres, et c'est ce qui rend le système d'équations différentielles « raide » et fait que l'on atteint les limites du schéma d'Euler.
Considérons en effet l'équation $\boldsymbol{y}'=-\lambda\boldsymbol{y}$, sur $[0,\boldsymbol{T}]$, avec $\boldsymbol{y}(0)=1$ et λ positif. Sa solution $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=e^{-\lambda t}$, tend vers 0 en l'infini. Le schéma d'Euler étudié en Terminale S fournit comme approximation, avec un pas τ, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n}\tau)\approx(1-\lambda\tau)^{\boldsymbol{n}}$. Pour que cette suite converge vers 0, il faut $0< \lambda\tau <2$, ce qui limite le pas d'intégration.
L'exponentielle qui est solution de l'équation précédente, pour $\boldsymbol{T}=1$, varie très rapidement pour $\boldsymbol{t}$ dans un intervalle $[0,\boldsymbol{u}]$ (régime transitoire) puis est presque nulle sur l'intervalle $[\boldsymbol{u},1]$ (régime permanent). Il serait donc agréable de pouvoir prendre un pas d'intégration petit au départ puis très grand. Le schéma d'Euler précédent, qui est dit explicite, ne le permet pas.
Mais on peut y pallier par un exercice qui peut donner lieu à un TD : au lieu d'approcher $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n}\tau)$ par $\boldsymbol{y}((\boldsymbol{n}-1)\tau)- \lambda\tau.\, \boldsymbol{y}((\boldsymbol{n}-1)\tau)$, on écrit $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n}\tau)\approx \boldsymbol{y}((\boldsymbol{n}-1)\tau)-\lambda\tau.\, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{n}\tau)$, et il vient $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n}\tau)\approx1/(1+\lambda\tau)^{\boldsymbol{n}}$. On constate qu'il n'y a plus de problème de limitation du pas !

Prédiction du temps

Depuis Lorenz on sait qu'il est utopiste de vouloir prévoir le temps très à l'avance : on parle de nos jours de chaos. C'est en fait un problème de « sensibilité aux conditions initiales » ainsi que l'a étudié Poincaré pour les systèmes dynamiques. L'atmosphère est un système chaotique au sens que toute erreur sur l'état initial induit des changements radicaux. C'est ainsi qu'on parle d'effet « papillon » : le battement des ailes d'un papillon peut provoquer un cyclone à l'autre bout de la planète.
Pour cette raison il n'est pas raisonnable à l'heure actuelle d'espérer prévoir à plus de quelques jours (entre 4 et 10) le temps qu'il fera. En ce qui concerne le climat, on peut se contenter d'évaluations statistiques et de dégager des attracteurs du système. Mais contrairement à la prédiction du temps, il faut modéliser les interactions entre l'océan et l'atmosphère, les glaces et la biosphère.
Pour illustrer ce qu'est le chaos, imaginons une bille placée au sommet d'une colline. Une différence infiniment petite dans les conditions initiales va induire une différence de comportement qualitativement sensible : rouler d'un côté ou de l'autre de la colline. On parle de sensibilité aux conditions initiales.
Pour comprendre l'effet sur un gaz, considérons un billard avec de nombreuses boules, toutes immobiles. L'une d'elles est poussée dans une direction, en frappe une autre, est déviée, puis va en frapper une autre etc. Une légère différence dans l'angle de départ fera qu'à terme une bille ne sera pas touchée et une autre le sera.

C'est un système déterministe (au sens de la mécanique newtonienne), mais imprévisible : c'est ça qu'a compris Poincaré.
En particulier la mécanique newtonienne n'est réversible que pour un système complètement isolé, ce qui n'est jamais le cas : c'est comme si tout système oubliait instantanément d'où il vient !
On peut lors d'un TP mettre des boules dans un plan, par exemple des miroirs sphériques en des points d'un réseau.
Il faut ensuite constater dans un exemple simple les réflexions successives d'un rayon lumineux parti de l'origine avec un angle α. On peut aussi faire le calcul soit à la main soit avec une calculatrice, grâce au principe de Fermat ; ou encore se contenter d'un dessin. C'est intéressant car on constate la sensibilité aux conditions initiales, mais aussi une certaine stabilité : les résultats sont divergents seulement à partir d'un certain nombre de rebonds … et c'est pourquoi on peut prédire le temps sur quelques jours !
On associe aussi souvent le chaos et le mouvement brownien. Ce n'est pas une chose aisée à décrire même en Terminale, mais on peut commencer par une construction géométrique basée sur le théorème de Pythagore. En effet si on prend un triangle rectangle et qu'on trace la hauteur issue du sommet où l'angle est droit, on découpe le grand triangle en deux triangles. Mais ces deux triangles sont tous les deux semblables au triangle initial et donc leurs côtés sont proportionnels et leurs aires sont ainsi proportionnelles au carré de leurs hypoténuses respectives. Comme le premier triangle est réunion des deux autres, sont aire est somme des aires des deux autres et, avec la remarque précédente, on obtient le théorème de Pythagore.
Si maintenant on appelle 0 le plus petit des deux triangles et 1 l'autre, on peut pour chacun d'eux obtenir avec la même construction deux nouveaux triangles, soit quatre en tout, que l'on peut appeler 00, 01, 10 et 11. En continuant ainsi on construit en n étapes 2^n triangles appelés 00…00, 00…01, 00…10, 00..11, …, 10..11, 11…00, …, 11…11. On peut condenser cette écriture en associant plutôt un nombre entre 0 et 1 obtenu en multipliant le premier chiffre par ½, le second par ¼, etc. et le dernier par $1/2^n$. Chaque point $\mathbf{P}$ du triangle appartient ainsi à un des triangles $\mathbf{T}_{n,i}$ de chacune des étapes et on peut lui associer la suite des nombres rationnels ($u_n=u_n(\mathbf{P})=u_n(\mathbf{T}_{n,i})=i/2^n$) précédents. Cette suite converge vers un réel t compris entre 0 et 1 et on a ainsi construit une courbe de [0;1] dans le plan : à t on associe le point $\mathbf{P}=\mathbf{P}(t)$ qui appartient au triangle de départ et tel que $\lim u_n(\mathbf{P})=t$.
Cette courbe vérifie $\|\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(u)\|^2\leq|t-u|$ et c'est cette inégalité qui est à la base des changements d'échelles brownien et du $\sqrt{n}$ dans le théorème de la limite centrale.
Durant l'atelier, nous avons également étudié un TPE sur le chaos, réalisé par des élèves de Terminale S. Il s'agit de considérer l'équation différentielle $x'=rx(1-x)$ ou

plutôt la suite récurrente non linéaire $\boldsymbol{x_{n+1}}=\boldsymbol{rx_n}(1-\boldsymbol{x_n})$. L'objet du TPE était de montrer que, pour $0 \leq r \leq 4$, l'intervalle [0,1] est stable puis d'illustrer (par le graphe de ces suites), selon les valeurs de r, la convergence ($r \leq 3$), le comportement périodique ($3 < r \leq 3.57$) ou le chaos ($r > 3.57$).

Dynamique des populations

Le modèle utilisé pour étudier le chaos est en fait un modèle initialement étudié dans le cadre de la dynamique des populations pour prédire la taille de la population à une date donnée. C'est en fait la réponse de Pierre-François Verhulst à Thomas Malthus.

Notons $\boldsymbol{P_n}$ la taille de la population à la $\boldsymbol{n}^{\text{ème}}$ génération (en acceptant que ça ait un sens). Pour Malthus, on a un modèle exponentiel donné par $\boldsymbol{P_{n+1}}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})\boldsymbol{P_n}$: l'accroissement est proportionnel à la population, par un facteur qui dépend du taux de natalité ($\boldsymbol{b}$) et du taux de mortalité ($\boldsymbol{d}$). Pour Verhulst, c'est insuffisant car il faut également modéliser la compétition pour les ressources, qu'il prend comme un facteur de décroissance de la population proportionnel au nombre de paires possibles formées par des individus, soit un facteur proportionnel à $\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{P_n}-1)$. On obtient ainsi un modèle de la forme $\boldsymbol{P_{n+1}}=\boldsymbol{rP_n}-\boldsymbol{aP_n}^2$ ou encore, en posant $\boldsymbol{x_n}= \boldsymbol{aP_n}/\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{x_{n+1}}=\boldsymbol{rx_n}(1-\boldsymbol{x_n})$.

Le modèle de Malthus peut s'écrire sous forme différentielle et constitue une illustration pour introduire l'exponentielle, une variante de la radioactivité !

Le modèle de Verhulst est un bon exercice, pour des $\boldsymbol{r}$ bien choisis, pour étudier les suites récurrentes, ainsi qu'on l'a vu lors de la description du TPE. Il permet aussi d'exercer quelques activités critiques. En effet il est très important, lorsque l'on modélise, de comprendre d'une part qu'on a effectué des choix et que ceux-ci peuvent bien entendu être remis en question, et d'autre part que la critique d'un modèle se fait principalement en construisant un autre modèle et en confrontant les deux modèles. Les études précédentes peuvent donner lieu à des TP en utilisant des données réelles et en ajustant les paramètres. Au niveau du BTS, on peut utiliser la méthode des moindres carrés. Mais bien avant on peut se contenter de trouver des courbes raisonnables et comparer ce qu'elles donnent par extrapolation. Il n'est ainsi pas rare que l'une tende vers l'infini tandis que l'autre reste bornée, voire tende vers 0 ! Ces comparaisons qualitatives sont des exercices très importants qui donnent rapidement un sens aux modèles étudiés.

Donnons maintenant un autre exemple qualitatif. Que ce soit en épidémiologie ou en génétique, on s'intéresse à la propagation de virus, de gènes etc. pour comprendre comment des maladies se diffusent. Ainsi, pour la propagation du Virus Immunodéficitaire Félin (l'équivalent du VIH ou SIDA pour les chats), on choisit un modèle basé sur celui de Verhulst et que nous allons décrire. On note $\boldsymbol{X}$ le nombre de chats sains et $\boldsymbol{Y}$ le nombre de chats atteints par le virus. La taille de la population est donc $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$. Introduisons des termes de natalité ($\boldsymbol{b}$), de mort naturelle ($\boldsymbol{m}$), de compétition ($\boldsymbol{a}$), de transmission par morsure ($\boldsymbol{s}$) et de mort par le virus ($\boldsymbol{v}$). On considère qu'un chat naît sain et que les morsures interviennent lors de combats qui sont proportionnels au nombre de rencontres entre chat sain et chat infecté par un facteur inversement proportionnel à la taille de la population. On en déduit le modèle suivant :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{X}/\mathbf{d}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{mX}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}-\boldsymbol{sXY}/(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{Y}/\mathbf{d}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{sXY}/(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{mY}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{vY}$$

Avec ces équations, on peut observer le comportement qualitatif suivant : lorsque $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{s}$, la maladie disparaît ($\boldsymbol{Y}\rightarrow 0$) et la population tend vers l'équilibre de Verhulst ; lorsque $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}<\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{bs}\leq(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{v})$, la population s'éteint ; enfin lorsque $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}<\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{bs}>(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{v})$, la population atteint un équilibre : $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ tendent vers des valeurs non nulles. Il y a donc deux situations limites évidentes et une autre moins intuitive qui est un équilibre entre population saine et population infectée. Notons que si le virus induit une mort lente, i.e. si $\boldsymbol{v}$ est très petit par rapport aux autres, et si le taux de mortalité (naturelle) est inférieur au taux de natalité, lui-même inférieur au taux de transmission de la maladie, i.e. si $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{b}<\boldsymbol{s}$, alors on a $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}\approx\boldsymbol{b}<\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{bs}>\boldsymbol{ms}\approx(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{v})$ et on se retrouve donc dans le troisième cas. Bien que ce modèle soit trop simpliste pour l'appliquer à l'homme, on voit que qualitativement nos sociétés sont probablement dans la situation $1/\boldsymbol{v}>>0$ et $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{b}<\boldsymbol{s}$, soit exactement dans la situation où on peut s'attendre à une situation d'équilibre non trivial.

Génétique des populations

Nous nous intéressons maintenant à la génétique, avec par exemple en vue l'étude des maladies génétiques. De nombreuses questions sont liées à cela et l'eugénisme n'est pas la moindre. Nous voulons montrer ici comment la nature est parfois paradoxale aux yeux des hommes : certaines maladies mortelles sont également vecteurs de propriétés immunitaires qui aide à protéger les malades de certaines autres maladies. Bien entendu les considérations qui suivent sont de nature statistique, elles n'adresse le problème de l'individu et notamment de l'individu malade. Ce grave défaut doit être compris pour ne pas accorder plus de portée à ces considérations que ce à quoi elles peuvent prétendre. Il s'agit de comprendre qualitativement comment évolue une maladie, en l'absence d'intervention humaine. Cette mise en garde s'adresse tant aux lectrices et lecteurs, qu'à leurs élèves : la grande difficulté de l'interaction entre mathématiques et biologie n'est pas dans la matière étudiée, car il est facile de trouver de nombreux champs d'application des mathématiques en biologie. Il n'est pas besoin de chercher loin pour trouver des sujets de biologie permettant de faire un développement en cours de maths, avec un contenu réel conforme aux programmes du lycée. C'est encore plus vrai si l'on songe aux TPE, même en Première. Non, la réelle difficulté est que chacun a connaissance de personnes effectivement concernées, de très près, par les sujets étudiés, notamment les maladies génétiques, et qu'il devient alors très difficile de ne pas laisser la partie émotionnelle empêcher toute forme de raisonnement « distancié » et rationnel.

De notre point de vue, tout part de la « loi » de Hardy-Weinberg : quand on apparie les gènes aléatoirement d'une génération à l'autre, la proportion des allèles se stabilise dès la première génération. Cette loi a été établie par un mathématicien et un biologiste. Elle n'est pas difficile à établir, mais elle n'est valide que sous certaines hypothèses qui légitiment le modèle. Si l'on note $\boldsymbol{p}$ la proportion d'un allèle **A** dans la population et $\boldsymbol{q}=1-\boldsymbol{p}$ celle de l'allèle **a**, les deux allèles étant les deux possibilités d'expression d'un certain caractère génétique, alors on a une chance $\boldsymbol{p}^2$ que les deux parents (que l'on suppose pris au hasard) ait chacun un allèle **A**, $2\boldsymbol{pq}$ qu'ils soient mixtes et $\boldsymbol{q}^2$ qu'ils aient chacun un allèle **a**. Dans les cas extrêmes l'enfant aura l'allèle commun à ses parents. Dans le cas mixte, il aura une chance sur deux d'avoir l'un ou l'autre. Ainsi pour la génération suivante, la proportion de l'allèle **A** est $\boldsymbol{p}^2+½2\boldsymbol{pq}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}$. De même pour l'allèle **a**, on obtient $\boldsymbol{q}^2+½2\boldsymbol{pq}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}$, ce qui est la loi de Hardy-Weinberg.

Un devoir à la maison, pour des classes de Terminale S, a été mis au point (et effectivement donné à plusieurs classes) sur ce sujet. Il est accessible sur le site Web. L'objet de ce DM est d'étudier plus en détail le cas de la mucoviscidose. Paradoxalement la maladie est portée par un gène récessif et devrait donc diminuer puis s'éteindre.

Il n'en est en fait rien : les porteurs sains bénéficient d'un avantage dans la sélection et se reproduisent plus que les personnes non atteintes.

Ces considérations donnent lieu à l'étude la fonction homographique $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})=[(\boldsymbol{r}-1)\boldsymbol{x}+1]/[(\boldsymbol{r}-2)\boldsymbol{x}+2]$ pour $\boldsymbol{r}$ compris entre 0 et 1. On étudie notamment les points fixes, à savoir 1 et un autre compris entre 0 et 1, et on montre que la suite récurrente définie par cette fonction converge vers le plus petit des points fixes. On obtient à nouveau une situation d'équilibre non trivial entre les deux populations : saines et malades. En particulier, si l'on veut éradiquer la maladie, il faut absolument développer des thérapies, car la nature ne conduira à rien de plus qu'un équilibre.

Cet atelier s'est clos par la proposition d'un TP sur les petites populations. Il s'agit ici, en partant d'une simulation de la loi de Poisson, d'étudier les phénomènes d'extinction. Ce phénomène permet également de rendre compte de la sélection naturelle des gènes via des comportements migratoires, mais on peut le décliner sous des formes moins porteuses d'émotions : la taille d'une population de plantes ou de germes, ou encore le nombre de personnes portant un nom de famille donné (la famille Adams par exemple…).
La simulation est simple : chaque individu d'une génération donne naissance à un nombre aléatoire d'individus de la génération suivante. Par exemple selon une loi de Poisson. Les questions posées sont : combien y a-t-il de personnes à la $\boldsymbol{n}^{\text{ème}}$ génération ? Y a-t-il extinction au bout d'un moment ?
On peut se contenter d'expérimenter en simulant des variables aléatoires. Il est donc important de savoir les simuler sur une calculatrice. Le principe est simple : on tire au hasard un nombre en 0 et 1, selon une loi uniforme, et on utilise la fonction de répartition $\boldsymbol{F}$ pour déterminer une valeur qui, elle suivra la loi qui admet $\boldsymbol{F}$ comme fonction de répartition.
En termes mathématiques, soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur [0,1]. Si $\boldsymbol{X}$ est une variable aléatoire admettant $\boldsymbol{F}$ comme fonction de répartition et si on pose $\boldsymbol{F}^{\leftarrow}(\boldsymbol{t})=\mathbf{inf}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R} \mid \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{t}\}$, alors $\boldsymbol{F}^{\leftarrow}(\boldsymbol{U})$ a la même loi que $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ a la même loi que $\boldsymbol{U}$.
Avec ce principe, voici un programme pour Ti-89 permettant de simuler une loi de Poisson. On se donne une précision ε puis on calcule une liste « loi » contenant les fréquences cumulées d'une loi de Poisson de paramètre λ en se limitant aux fréquences inférieures à 1-ε.

```
poisson(λ,ε)
Prgm
newList(0)→loi
e^(-λ)→p
p→f
0→k
Whilef<1-ε
k+1→k
floor(f/ε)*ε→loi[k]
p*λ/k→p
f+p→f
EndWhile
1→loi[k+1]
EndPrgm
```

Ainsi poisson(1,0.001) fournit la liste [0,367 ; 0,735 ; 0,919 ; 0,981 ; 0,996 ; 1] de sorte que l'on va simuler une variable $\boldsymbol{X}$ qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités 0,367, 0,368, 0,184, 0,072, 0,015 et 0,004. Ce qui est bien la loi de Poisson, à 10^{-3} près. Le programme suivant permet de faire des tirages (attention, il faut créer la liste « loi » grâce au programme précédent avant d'utiliser ce programme) :

```
ceiling(1/ε)➔pas
rand(pas)/pas➔y
0➔k
Whileloi[k+1]<y
k+1➔k
EndWhile
Disp k
```

Pour notre problème, peu importe la loi choisie, voici le résultat que l'on doit observer. Si λ est l'espérance de la loi choisie (qui est bien le λ de la loi de Poisson de paramètre λ), alors pour $\lambda<1$, la population s'éteint en temps fini, pour $\lambda>1$, la population ne s'éteint pas et pour $\lambda=1$, la population s'éteint mais au bout d'un temps infini… Ainsi avec le programme précédent et $\lambda=1$, on peut simuler l'itération (à chaque pas on considère les n individus de la population, on tire aléatoirement un nombre de descendants selon la loi de Poisson, on fait la somme de tous ces nombres : c'est la taille de la population à la génération suivante). Dans une classe de 25 ou 30, il n'est pas impossible qu'au bout d'une heure certains programmes continuent à tourner ! Pour $\lambda<1$, tous devraient s'arrêter rapidement. Par contre pour $\lambda>1$, les élèves doivent constater que la taille de la population est très croissante et qu'on peut penser qu'elle ne s'éteindra jamais.

D'une façon précise, l'espérance de la taille $\boldsymbol{X_n}$ de la génération $\boldsymbol{n}$ est tout simplement λ^{n}. Si l'on savait ce qu'est une espérance conditionnelle, ce serait immédiat : $\mathbf{E}(\boldsymbol{X_{n+1}})=\mathbf{E}(\mathbf{E}(\boldsymbol{X_{n+1}}|\boldsymbol{X_n}))=\lambda\mathbf{E}(\boldsymbol{X_n})=\lambda^{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{X_0})=\lambda^{n}$.

Donc le nombre total d'individus admet $\boldsymbol{n}+1$ comme espérance si $\lambda=1$, $1/(1-\lambda)$ si $\lambda<1$, et l'infini si $\lambda>1$. Quant à la probabilité d'extinction à la $\boldsymbol{n}^{\text{ème}}$ génération, elle vérifie la relation de récurrence $\boldsymbol{p_{n+1}}=\exp(\lambda(\boldsymbol{p_n}-1))$ et l'étude de cette suite récurrente montre qu'elle tend vers 1 pour $\lambda<1$ et vers un point fixe strictement plus petit pour $\lambda\geq1$(de façon semblable au modèle de Verhulst). En effet cette fonction est convexe et vaut 1 en 1. Sa tangente en (1,1) est de pente λ. Si $\lambda=1$, il n'y a donc qu'un point fixe et c'est 1. Sinon, la première bissectrice coupe le graphe de cette fonction convexe sans lui être tangente, elle la coupe donc en exactement deux points. Par croissance de pente des tangentes à une fonction convexe, le plus petit des points fixes correspond au point dont la tangente a une pente strictement inférieure à 1, le plus grand à celui dont la tangente à une pente strictement supérieure à 1. Donc pour $\lambda<1$, 1 est le plus petit point fixe, et donc l'unique point fixe de [0;1], qui est l'intervalle où vit . Par contre pour $\lambda>1$, 1 est un point fixe répulsif tandis que le second point fixe, compris entre 0 et 1, est attractif : la suite converge $\boldsymbol{p_n}$ donc vers lui.

On pourra se reporter aux problèmes du CAPES Agricole 2000 (2ème épreuve) ou de l'ESSEC 1998 dont on trouvera des corrigés sur le site (rubrique « Enseignement », puis « Corrigés du CAPES »).