Maths et musique en série TMD

Jean-François Heintzen

L’objet de l’atelier a consisté à apporter aux collègues des références plus musicales – voire musicologiques – que mathématiques, étant donné que dans ce dernier domaine, leurs connaissances sont très largement suffisantes pour dominer les problèmes rencontrés. En matière de mathématiques et de musique, il est possible de s’enfoncer alors dans un puits sans fin, car certains compositeurs, ou mathématiciens, ont eu recours à des concepts fort sophistiqués pour parler des oeuvres ; notre propos s’est limité aux classes de la seconde à la terminale, dans l’optique de la série TMD.

Nous avons commencé par un rapide tour d’horizon des relations entre mathématiques et musique, afin d’en dégager les grands objets :

- le matériau musical (sons, gammes et modes) : il s’agit ici autant de physique et d’acoustique que de mathématiques.
- la composition (procédés, notation) : la « géométrie » tant de la composition que de la notation musicale a toujours accompagné l’histoire de la musique, c’est le domaine que nous avons souhaité aborder (voir infra).
- l’exécution : à la recherche de la vraie spontanéité musicale, forcément absente d’une interprétation trop figée, nombre de compositeurs ont eu recours à la mise à disposition de matériau musical pouvant être assemblé, modifié « en direct » par l’instrumentiste. Les connexions avec l’aléatoire et la combinatoire prennent ici tout leur sens.

Enfin, la volonté de traiter d’un objet qui ne se résume pas à un art conceptuel (i.e. incompréhensible pour celui qui n’en possède pas les clés) nous a conduit à chercher nos exemples dans des thèmes issus du répertoire « savant occidental », la musique dite « classique » pour faire simple…

Géométrie musicale

Le parti-pris de cette intervention fut donc, résolument, de considérer la partition comme un objet graphique, et de poser la question : *la partition est-elle une représentation graphique de fonction, au sens où l’entendent les mathématiciens* ?

1. La mélodie

Nous souhaitons donc considérer la mélodie comme une fonction du temps. La variable est le temps, l’image est la fréquence ou la hauteur. En toute rigueur, il s’agirait de fonctions en escalier, car l’émission d’une note correspond, en première approximation, à une fonction constante sur un intervalle.

On suppose dans un premier temps que la mélodie est une fonction M : t $\rightarrow$ M(t) sans autre précision.

Exemple 1 : cas de la forme « chanson à couplets »

M est donnée sur un intervalle [0, T], et « reproduite » ensuite, si l’on exécute la chanson « *ad libitum* »

$$M(t) = M(t - T \times E(\frac{t}{T})) \text{ pour } t \geq 0$$

C’est l’opération servant à rendre périodique une fonction donnée sur un intervalle borné.

Exemple 2 : thème Jazz.

On donne cette fois deux mélodies A : t $\rightarrow$ A(t) (le thème) et B : t $\rightarrow$ B(t) (le « pont »), et l’on joue AABA AABA AABA…

Écrire la fonction M(t)…

2. *La partition*

La partition peut être considérée comme une « représentation graphique », à condition de convenir de quelques adaptations de ce concept :

Sur l’axe horizontal, on ne revient jamais en arrière (l’occasion pour décrire les procédés utilisés par les musiciens pour ne par réécrire ce qu’ils ont déjà noté : ce sont les barres de renvoi). De plus, toutes les mesures doivent avoir la même longueur à l’impression (en pratique ce n’est pas le cas, pour des raisons typographiques essentiellement).

On a alors les correspondances :

Mélodie ascendante = fonction croissante ;

Mélodie descendante = fonction décroissante.

L’axe vertical pose deux problèmes :

- Problème n°1 : sur la partition, les unités verticales ne sont pas égales (car les intervalles d’1 ton ou d’½ ton sont indiscernables au néophyte). Admettons que l’on ait une partition où tous les interlignes aient la même valeur (!)…
- Problème n°2 : la transposition. Cela consiste, par exemple, à jouer une mélodie 2 tons plus haut. C’est une translation pour le musicien, on « fait glisser » la mélodie de deux cases sur le manche de la guitare, ou de deux touches sur le piano. Par contre, pour le mathématicien, c’est plus ambigu. Lorsqu’une mélodie est jouée avec le même doigté sur un violon et sur un alto, cela la transpose d’une quinte vers le bas : on perçoit la dilatation qui transforme un violon en alto, l’un est un homothétique de l’autre.

Exemple (cité par un participant à l'atelier) : le capodastre de la guitare. Lorsqu'on le déplace sur le manche, on décale (translate) les positions d'accords vers l'aigu. En réalité on réalise une réduction de la corde, le centre d'homothétie étant situé au chevalet de l'instrument.

Conséquence : il faut concevoir l'unité verticale comme une unité musicale (on additionne des intervalles, et en conséquence, il n'y a pas de 0 sur l'axe vertical).

3. Géométrie de la partition

Moyennant ces conventions, il est alors possible d'observer divers exemples (fournis lors de l'atelier) où une réelle action géométrique est exercée sur la partition : elle peut être lisible à l'endroit comme à l'envers, fournir un accompagnement de la mélodie originale lorsqu'on la lit en sens inverse… C'est l'occasion d'évoquer toutes les contraintes d'ordre formel que semblaient s'imposer certains compositeurs (Bach, Mozart, Schumann, et autres…), contraintes pouvant êtes traduites en langage géométrique.

L'appréciation de ces contraintes dépasse notre entendement contemporain, mais l'évocation de quelques usages musicaux du temps permet de mieux les mettre en perspective : jouer à vue une partition posée à l'envers devant soi, par exemple, était une pratique courante chez certains virtuoses (les typographes savent bien lire les matrices d'imprimerie à l'envers, est-ce si différent ?). Mozart a écrit la partition d'une mélodie qui, lorsqu'elle est jouée par deux musiciens face à face (l'un la lisant à l'endroit, l'autre à l'envers), fournit un duo : il poursuit, en le raffinant, l'usage des *consorts*[1] du XVIe siècle, où un seul livre fournissait aux musiciens assis tout autour de la table la partition de chacun, imprimée dans le sens adéquat.

4. Musique et fonctions associées : l'exemple des canons

Le canon est l'imitation stricte d'une voix (dux ou antécédent ou leader) par une autre (comes ou conséquent ou follower). Au sens propre, le canon est la règle qui fixe cette imitation. La seconde voix doit être l'exacte répétition de la 1ère ou une déduction (par un procédé précisé) de la première. Les procédés correspondent à ce que les programmes de mathématiques du secondaire appellent les *fonctions associées* : comment on obtient, à partir d'une fonction donnée (ici l'antécédent du canon) une autre fonction (le conséquent) dont la courbe se déduit de la première par un procédé géométrique. Divers types de canons furent évoqués, illustrés par la lecture de la partition, et des auditions. Voici quelques-uns de ces exemples[2].

---

[1]Un consort est un ensemble d'instruments de même famille (consort de violes, de flûtes) apparu en Angleterre au XVIe. Les instrumentistes se disposaient en général autour d'une table, sur laquelle sont posées à plat les partitions.

[2]Un seul est ici accompagné du matériel explicatif complet : représentation graphique, partition « brute », partition « résolue ».

Canon par translation : seul l'antécédent est noté. Il est reproduit exactement par les autres voix, qui entrent successivement à intervalles de temps réguliers (distance d'entrée) et, éventuellement, sur une autre note (intervalle d'entrée , p. ex. quinte, octave, quarte). A la fin du canon, les voix peuvent terminer chacune l'une après l'autre, ou bien toutes ensemble (point d'orgue).

Notation mathématique :

Si l'on note $M_1 : t \longrightarrow M_1(t)$ l'antécédent, on aura M_2 (le conséquent) défini par :

$M_2 : t \longrightarrow M_2(t) = M_1(t - d) + h$

où d est la distance d'entrée, et h l'intervalle d'entrée. Si h = 0, le canon est dit à l'unisson.

Canon circulaire ou perpétuel : les différentes voix retournent à leur commencement, de sorte que le canon peut se poursuivre indéfiniment (canon *perpetuus*). La plupart des canons de société appartiennent à ce type.

Notation mathématique : on retrouve la structure de la chanson évoquée plus haut.

Canon en spirale : canon perpétuel dans lequel l'antécédent termine un ton plus haut qu'il n'a commencé, de sorte que les voix s'élèvent à chaque fois d'un ton, formant ainsi une spirale.

Notation mathématique :

Si l'on note $[\,0\,,T\,]$ l'intervalle sur lequel est donné l'antécédent originel M_1, on aura donc :

$$M_1(t) = M_1(t - T \times E(\frac{t}{T})) + E(\frac{t}{T}) \text{ pour } t \geq 0$$

Canon *cancrizan* ou canon à l'écrevisse (ou canon rétrograde) : le conséquent marche à reculons, il est obtenu à partir de l'antécédent par une symétrie d'axe vertical.

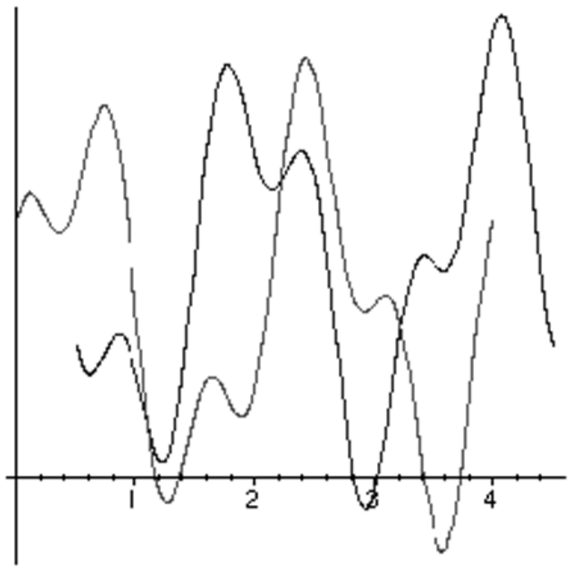
Notation mathématique :

$M_2(t) = M_1(T - t)$ où T est la longueur du thème.

Canon par mouvement contraire ou canon *en miroir* : lorsque l'antécédent monte, le conséquent descend. Mathématiquement parlant, le conséquent est obtenu pas une symétrie glissée d'axe horizontal.

Notation mathématique :

$M_2(t) = - M_1(t - d) + K$



La présentation musicale reproduite ci-dessous consiste en une « triple partition » en deux portées :

- Sur la première figure le « thème royal » servant de base au canon.
- Sur la seconde figurent les <u>deux</u> voix du canon. L'antécédent est noté en clé d'ut 1e ligne, 3 bémols à la clé. Le conséquent est noté par la même ligne mélodique, mais rapportée à une autre clé d'ut (3e ligne cette fois) écrite à l'envers (observer les bémols).

BACH Jean-Sébastien, Canon à 2 sur le thème royal par mouvement contraire, Offrande musicale BWV 1079 n° 5

Ainsi l'antécédent commence sur un do (1e clé) et le conséquent sur un sol : le canon est à la quinte.

L'antécédent commence par une ligne mélodique descendante, et le conséquent (après symétrie de la partition d'axe horizontal) par une ligne ascendante. Un symbole de reprise (moitié de la 1e mesure indique l'instant de départ du conséquent.

Cette présentation « codée » du canon, chère à Bach peut aussi être présentée « résolue » :

BACH Jean-Sébastien, Canon à 2 sur le thème royal par mouvement contraire, Offrande musicale BWV 1079 n° 5

5. *Conclusion*

Bien sûr, ce résumé est un peu abrupt. Mais si la musique (et les mathématiques !) s'apprenait uniquement dans les livres, cela se saurait. Pour élucider ces structures étranges où géométrie et création musicale s'interpénètrent, il faut lire, écouter, manipuler, observer. Pour cela la bibliographie qui suit peut être utile.

Bibliographie :

La petite chronique d'Anna-Magdalena Bach, Buchet / Chastel, 1989.

HOFSTADTER Douglas, *GÖDEL, ESCHER, BACH, les brins d'une guirlande éternelle*, Interéditions, 1985.

MICHELS Ulrich, *Guide illustré de la musique*, Fayard, coll. « Les indispensables de la musique », tome 1, 1988.

MORONEY Davitt, *Bach, une vie*, Babel / Actes Sud, 2000.

Discogaphie [si l'on peut obtenir les partitions des œuvres, c'est encore mieux !]

BACH Jean Sébastien :

- Variations canoniques sur « Vom Himmel noch », BWV 769
- Variations Goldberg, BWV 988
- L'offrande musicale, BWV 1079
- L'art de la fugue, BWV 1080

Web

À propos des mathématiques et de L'offrande musicale :

Math and the Musical Offering par Tony Phillips
http://www.ams.org/new-in-math/cover/canons.html

Informations sur L'offrande musicale, et sur les procédés utilisés par Bach dans ses canons (avec « partitions animées ») :

The Canons and Fugues of J. S. Bach par Timothy Smith
http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/honorific.html#bwv1078