La détermination des "symétries au sens large" ou des "automorphismes" de solides géométriques.

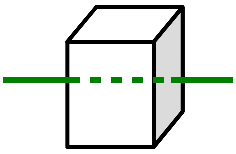
L'atelier L16 comprend trois parties:

Une "Synthèse" sur les isométries de l'espace.
Le calcul du nombre d'automorphismes.
La détermination d'automorphismes de solides particuliers.

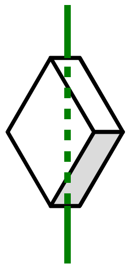
Semblablement aux figures planes finies, les automorphismes d'un solide fini sont des transformations de l'espace (déplacements et retournements de l'espace) qui superposent le solide à lui-même tout en conservant sa structure.
La détermination des automorphismes passe donc par la maîtrise des types de déplacements et des types de retournements de l'espace ainsi que par la recherche <u>du nombre de points du solide</u> ayant les mêmes caractéristiques.
Le nombre de points du solide ayant les mêmes caractéristiques est en relation avec la détermination de l'orbite d'un point d'une figure.

<u>Exemples d'automorphismes du cube</u>

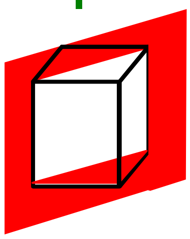
Rotation d'un quart de tour d'axe passant par deux centres de faces opposées –
Déplacement de l'espace -
Axe d'ordre 4



Rotation d'un demi tour d'axe passant par deux milieux d'arêtes opposées –
Déplacement de l'espace –
Axe d'ordre 2



Symétries bilatérales
de plans diagonaux –
Retournements de l'espace –
Plans passant par deux arêtes opposées



A. Isométries de l'espace

Les deux orientations de l’espace

Main gauche et main droite

Nos deux mains sont les mêmes (isométriques) et différentes à la fois :

elles sont les mêmes du point de vue des dimensions (même volume, même surface de peau, même longueur de doigts …) ;

elles sont différentes au sens où elles ont des orientations différentes ; il existe une gauche et une droite (on parle en sciences des deux formes énantiomères d’un même objet).

Les qualificatifs « gauche « et « droite » permettent de les distinguer ; de mettre en évidence les deux formes énantiomères potentielles d’un même objet. Ces qualificatifs « gauche « et « droite » sont arbitraires, on aurait pu les inverser et appeler une main gauche, une main droite, et inversement.

Isométries de l'espace :

Les isométries de l’espace sont les transformations de l’espace qui conservent les distances.

Déplacements et retournements de l’espace

Les isométries de l’espace se décomposent en « deux sous-familles » : les déplacements et les retournements de l’espace.

Déplacements de l'espace

En géométrie élémentaire, une définition des déplacements de l’espace peut être donnée via les types de mains (ou de pieds) : *« un déplacement de l’espace est une isométrie de l’espace qui conserve les types de mains (ou de pieds) »*.

On peut montrer que les déplacements de l'espace se réduisent aux translations, aux rotations et aux vissages.

Remarque :

Dans l’espace, une symétrie orthogonale est un déplacement de l'espace (une rotation de 180 ° de l'espace) alors que dans le plan, une symétrie orthogonale est un retournement du plan.

<u>Retournements de l'espace</u>

En géométrie élémentaire, une définition des retournements de l’espace peut être donnée via les types de mains ou de pieds : « *un retournement de l’espace est une isométrie de l’espace qui inverse les types de mains (ou de pieds)* ».

On peut montrer que les retournements de l'espace se réduisent aux symétries bilatérales, aux symétries centrales, aux antirotations et aux symétries bilatérales glissées.

<u>Remarque :</u>

Dans l’espace, une symétrie centrale est un retournement de l’espace alors que dans le plan, une symétrie centrale est un déplacement du plan (une rotation de 180 ° du plan).

Le tableau synoptique de la page suivante résume les différents types de déplacements de l'espace et de retournements de l'espace.

Tableau récapitulatif des isométries de l'espace

Isométries de l'espace

Déplacements

« un déplacement de l'espace est une isométrie de l'espace qui conserve les

Transl

Rotations de

Vissages de l'espace

Vissage : rotation suivie d'une translation dont la direction est parallèle à l'axe de la rotation

Retournements

« un retournement de l'espace est une isométrie de l'espace qui inverse les

Symétries bilatérales
(symétries par rapport à un plan)

Symétries centrales

Symétries bilatérales

Antirotations de

Symétrie bilatérale glissée : symétrie bilatérale suivie d'une translation dont la direction est parallèle au plan définissant la symétrie

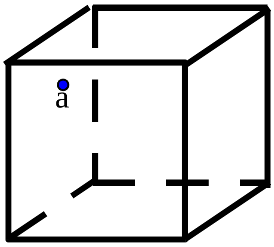
Antirotation : rotation de l'espace suivie d'une symétrie centrale de l'espace dont le centre appartient à l'axe de la rotation.

B. **Nombre d'automorphismes d'un solide et orbite d'un point**.

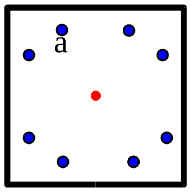
Le détermination du nombre d'automorphismes d'un solide passe par la recherche de l'orbite d'un point "non particulier" et du nombre de points faisant partie de cette orbite.

<u>Détermination du nombre de points dans l'orbite d'un "point non particulier" d'un cube.</u>

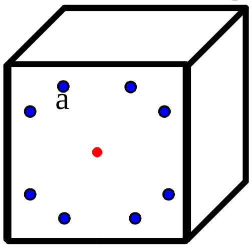
Soit a un "point non particulier" d'une face carrée d'un cube.



Il y a exactement huit points de cette face carrée qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point a (ce sont les 8 points obtenus à partir des 8 automorphismes de cette face carrée).



Comme un cube est formé de six carrés, il y a donc 48 (6 x 8) points du cube qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point a.



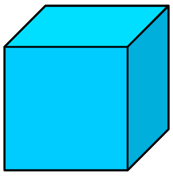
Comme tout automorphisme superpose le cube à lui-même tout en appliquant un point sur un point de même caractéristique, on en conclut que le nombre d'automorphismes du cube est de 48.

Le théorème de LAGRANGE montre qu'il existe autant d'automorphismes du type "déplacements" que du type "retournements".
Dès lors,

Auto (C) = 48 → **$Auto^+$ = 24** ; **$Auto^-$ = 24**

C. Automorphismes de solides particuliers

Le cube

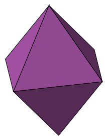


Auto (C) = → **$Auto^+$ = 24** ; **$Auto^-$ = 24**

$Auto^+$		**3 axes d'ordre 4**	**4 axes d'ordre 3**	**6 axes d'ordre 2**	**Total**
	1_E	**$r_{1/4}$ $r_{2/4}$ $r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$ $r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	**3 3 3**	**4 4**	**6**	**24**
$Auto^-$	**Sc**	**$ar_{1/4}$ $S\alpha$ $ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$ $ar_{2/3}$**	**$S\beta$**	
	1	**3 3 3**	**4 4**	**6**	**24**
Auto (C)					**48**

α = **plans médiaux** β = **plans diagonaux**

<u>**L'octaèdre régulier**</u>



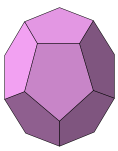
Auto (Oc) = → **Auto^{+} = 24**
→ **Auto^{-} = 24**

Auto^{+}		**3 axes d'ordre 4**	**4 axes d'ordre 3**	**6 axes d'ordre 2**	**Total**
	1_E	**$r_{1/4}$ $r_{2/4}$ $r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$ $r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	**3 3 3**	**4 4**	**6**	**24**
Auto^{-}	**Sc**	**$ar_{1/4}$ Sα $ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$ $ar_{2/3}$**	**Sβ**	
	1	**3 3 3**	**4 4**	**6**	**24**
Auto (Oc)					**48**

α = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 4 et passant par le centre de l'octaèdre (c)

β = plans perpendiculaires aux axes d'ordre 2 et passant par le centre de l'octaèdre (c)

<u>**Dodécaèdre régulier**</u>



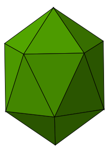
Auto (Do) = 120 → **Auto^{+} = 60**
→ **Auto^{-} = 60**

Auto^{+}		**6 axes d'ordre 5**	**10 axes d'ordre 3**	**15 axes d'ordre 2**	**Total**

	1 E	$r_{1/5}$	$r_{2/5}$	$r_{3/5}$	$r_{4/5}$	$r_{1/3}$	$r_{2/3}$	$r_{1/2}$	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto⁻	Sc	$ar_{1/5}$	$ar_{2/5}$	$ar_{3/5}$	$ar_{4/5}$	$ar_{1/3}$	$ar_{2/3}$	$S\alpha$	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Do)									120

α = plans bissecteurs ou plans passant par deux arêtes opposées

<u>Icosaèdre régulier</u>



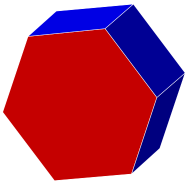
Auto (Ico) = 120 $\rightarrow$ **$Auto^+$ = 60**

Auto (Ico) = 120 $\rightarrow$ **$Auto^-$ = 60**

$Auto^+$		**6 axes d'ordre 5**				**10 axes d'ordre 3**		**15 axes d'ordre 2**	**Total**
	1 E	$r_{1/5}$	$r_{2/5}$	$r_{3/5}$	$r_{4/5}$	$r_{1/3}$	$r_{2/3}$	$r_{1/2}$	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
$Auto^-$	Sc	$ar_{1/5}$	$ar_{2/5}$	$ar_{3/5}$	$ar_{4/5}$	$ar_{1/3}$	$ar_{2/3}$	$S\alpha$	
	1	6	6	6	6	10	10	15	60
Auto (Ico)									120

α = plans passant par deux arêtes opposées

<u>Prisme à bases hexagonales</u>



Auto (P_6) = 24 → **Auto$^+$ = 12**

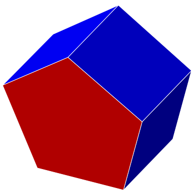
Auto (P_6) = 24 → **Auto$^-$ = 12**

Auto$^+$		**1 axe d'ordre 6**	**6 axes d'ordre 2**	**Total**
	1_E	**$r_{1/6}$ $r_{2/6}$ $r_{3/6}$ $r_{4/6}$ $r_{5/6}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	**1 1 1 1 1**	**6**	**12**
Auto$^-$	**S c**	**$r_{1/6}$ $r_{2/6}$ $S\alpha$ $r_{4/6}$ $r_{5/6}$**	**$S\beta$**	
	1	**1 1 1 1 1**	**6**	**12**
Auto (P_6)				**24**

α = plans parallèles aux bases et passant par le centre du prisme à bases hexagonales

β = plans médiaux et plans diagonaux perpendiculaires aux bases

<u>Prisme à bases pentagonales</u>



Auto (P_5) = 20 → **Auto$^+$ = 10**

Auto (P_5) = 20 → **Auto$^-$ = 10**

Auto$^+$		**1 axe d'ordre 5**	**5 axes d'ordre 2**	**Total**
	1_E	**$r_{1/5}$ $r_{2/5}$ $r_{3/5}$ $r_{4/5}$**	**$r_{1/2}$**	

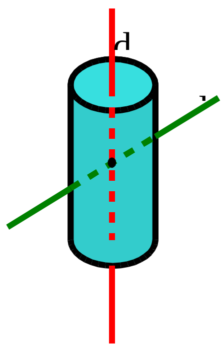
	1	1 1 1 1	5	10
$Auto^-$		$ar_{1/10}$ $ar_{3/10}$ $S\alpha$ $ar_{7/10}$ $ar_{9/10}$	$S\beta$	
		1 1 1 1 1	5	10
Auto (P_5)				20

α = plans parallèles aux bases et passant à mi –hauteur du prisme à bases pentagonales

β = plans bissecteurs et perpendiculaires aux bases

$ar_{1/10}$ = $r_{1/10}$ o Sc où c est sur l'axe d'ordre 5 à mi –hauteur du prisme à bases pentagonales

Cylindre fini



Auto (Cy) = ∞

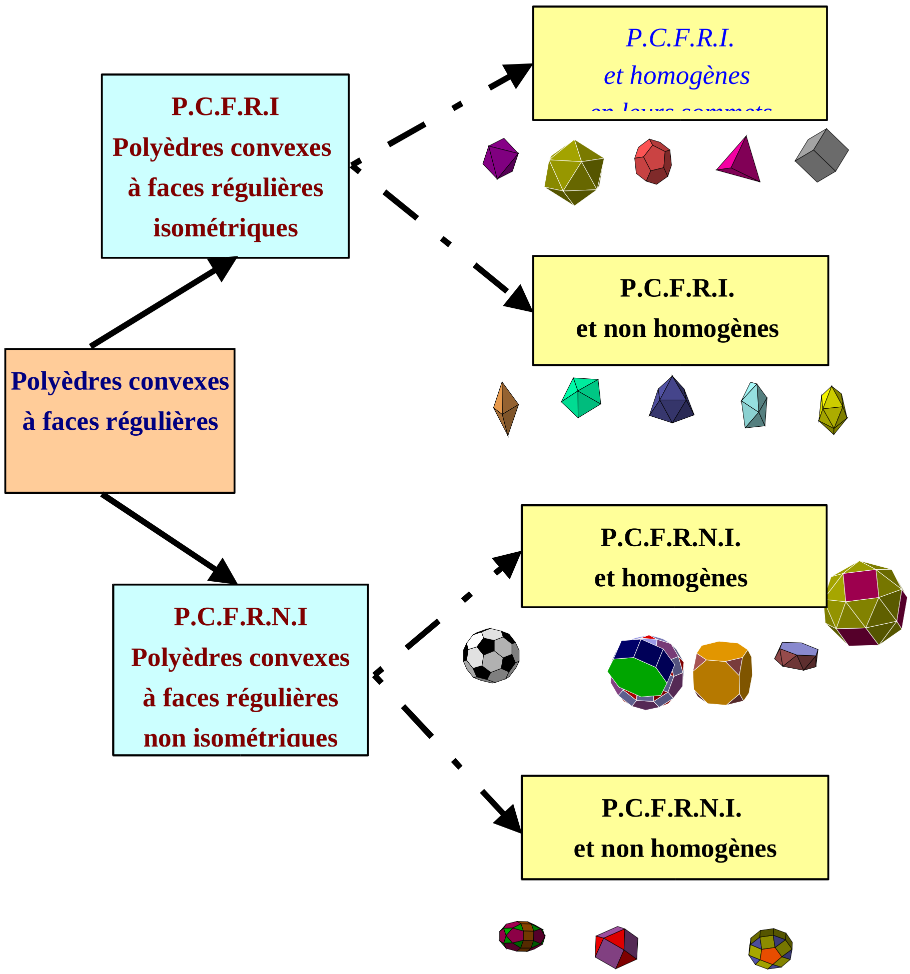
$Auto^+ = \infty$

$Auto^- = \infty$

Auto$^+$ **=** ∞	**Auto**$^-$ **=** ∞
1_E	<u>Symétrie centrale (Sc)</u>
un axe de révolution	Symétrie bilatérale de plan perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par le centre c
$r_{d,\alpha}$ où **o** $\leq$ α <	Symétries bilatérales de plans contenant l'axe de révolution
une infinité d'axes d'ordre 2	Antirotations d'axes de révolution et d'amplitudes variant
$r_{d2,1/2}$	de 0° à 360° excepté 180°

A titre d'information, la page suivante présente le classement des polyèdres convexes à faces régulières en fonction de l'homogénéité des faces et de l'homogénéité des sommets.
Ce type de classement est souhaité dans le rapport KAHANE.

Classement "visuel" des polyèdres



Le classement des polyèdres convexes à faces régulières en fonction de la transitivité des faces et des sommets (les polyèdres réguliers et semi réguliers) n'est pas abordé avant 17/18 ans. En effet, ce classement exige la maîtrise des automorphismes des polyèdres concernés.