Rouler en développable

Robert March(*)

Le point de départ de cet atelier est un curieux objet, le sphéricône, présenté par Ian Stewart dans un article de la revue *Pour la Science* (n° 265, novembre 1999). « Formé à partir de deux cônes identiques dont l'angle au sommet vaut 90° », le sphéricône roule sans glisser sur une surface plane d'un mouvement continu, en se « dodelinant de gauche à droite dans une démarche chaloupée ». D'autres objets tout aussi curieux auraient-ils des propriétés analogues ? C'est l'occasion de s'intéresser aux surfaces développables et d'examiner la possibilité d'en extraire un « noyau » ayant la même aptitude que le sphéricône à rouler continûment sur un plan.

Le sphéricône

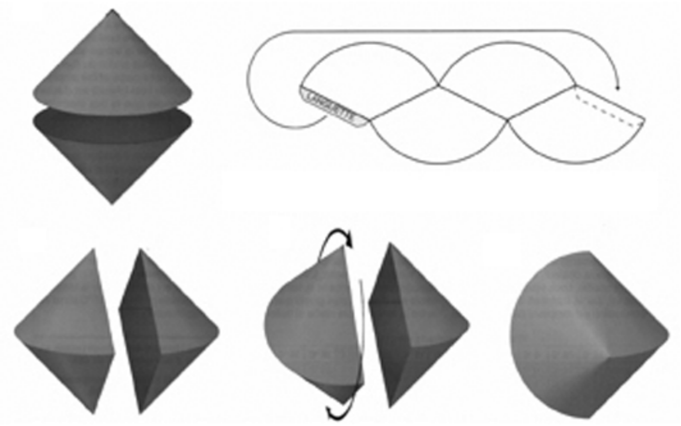
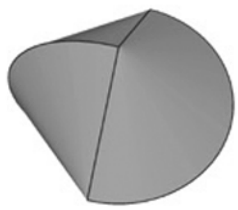


Illustration pour la science



On considère donc deux sections de cônes de révolution identiques dont les génératrices forment avec l'axe un angle de 45°. « On les accole par leur base », explique Ian Stewart, « puis on coupe ce double cône par un plan contenant l'axe

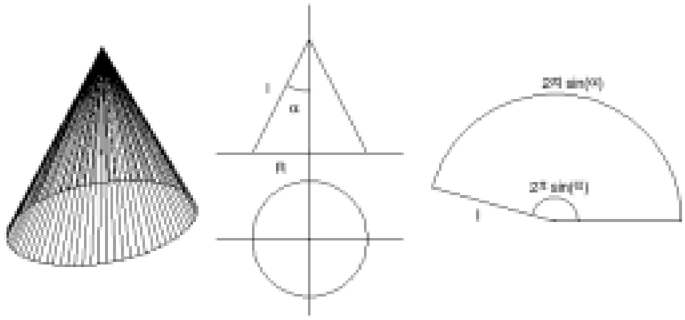
---

(*)Enseignant à l'École d'Architecture Paris Val de Seine

commun : la section est un carré ». On fait alors pivoter l’une des deux moitiés obtenues d’un quart de tour et on crée ainsi un sphéricône.

Le cône est une surface développable et comme le sphéricône résulte de l’assemblage astucieux de quatre demi cônes, il est lui même développable. Par développable, on entend une surface qui est applicable sur un plan « sans déchirure ni duplicature ». On peut aussi considérer, symétriquement, que c’est le plan qu’on applique sur la surface. Une surface développable peut donc être enveloppée dans une feuille de papier sans que celle-ci soit froissée ni déchirée. C’est vrai d’un cône ou d’un cylindre mais manifestement pas de la sphère.

L’applicabilité sur un plan permet, théoriquement, de déterminer le patron d’une partie de surface développable et donc de la modéliser. En pratique, ce n’est pas simple. Mais dans le cas du cône de révolution et de notre sphéricône, on obtient facilement un patron.



Chaque cône se développe selon un secteur circulaire dont on détermine facilement l’angle. Si l est la longueur d’une génératrice, α l’angle qu’elle fait avec l’axe, le périmètre du cercle qui forme la base du cône a pour longueur 2π R avec R = l (sinα). La longueur de l’arc du secteur circulaire est 2π l (sinα), son rayon l et donc l’angle 2π (sinα) rad. Quand $\alpha = 45°$, l’angle vaut $\pi\sqrt{2}$ rad et pour les demi cônes qui nous intéressent, c’est donc un angle de $\pi\sqrt{2}/2$ rad, soit environ 127,28°. Voilà de quoi faire quelques sphéricônes, les regarder se dandiner en dévalant un plan incliné ou encore rouler les uns sur les autres.

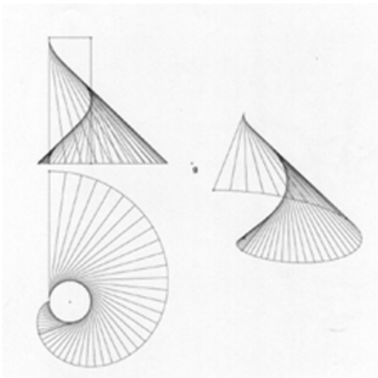
Ian Stewart terminait son article en mentionnant quelques propriétés remarquables de cet objet bizarre et en encourageant le lecteur à en explorer les possibilités de combinaisons qui semblent innombrables. Il se prête notamment à un assemblage spatial selon un réseau cubique. Cela tient au fait que « ses quatre arêtes

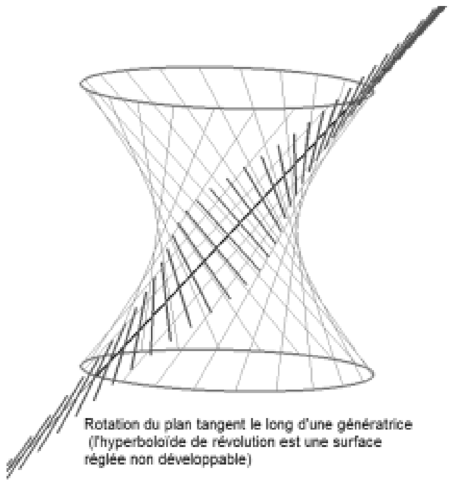
– qui séparent les quatre secteurs – appartiennent à un octaèdre régulier dont les sommets sont les centres des faces d’un cube » (le dual de l’octaèdre). « Deux sphéricônes peuvent rouler l’un sur l’autre ; quatre sphéricônes arrangés en carré peuvent rouler les uns sur les autres ; huit sphéricônes peuvent parcourir un neuvième sphéricône placé au centre… »

L’orthobicycle

Peut-on trouver d’autres objets bizarroïdes qui s’apparentent au sphéricône ? Pour pouvoir rouler sur un plan, cet objet doit appartenir à une surface développable. C’est donc de ce côté que l’on peut engager quelques recherches en s’intéressant à certaines propriétés de ces surfaces.

Ce sont des surfaces réglées particulières. Toute surface développable est soit un cylindre, soit un cône, soit la surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche. Ainsi, les tangentes à une hélice circulaire engendrent un hélicoïde développable. Ces surfaces sont composées de deux nappes dont la courbe gauche qui les définit constitue ce qu’on appelle l’arête de rebroussement.





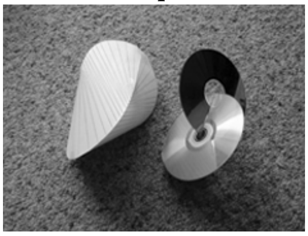
Rotation du plan tangent le long d’une génératrice (l’hyperboloïde de révolution est une surface réglée non développable)

Elles ont comme propriété caractéristique que le plan tangent en un point est invariant quand ce point décrit une génératrice, alors que pour les surfaces réglées non développables il subit, dans le même mouvement, une rotation de 180°.

Les surfaces développables sont aussi les surfaces enveloppes d’un plan qui se déplace dans un mouvement continu. On peut, par exemple, imposer à ce plan d’être tangent à deux courbes, gauches ou planes mais non coplanaires.

Pour aller au plus simple et faire apparaître des propriétés de symétrie, on a choisi deux cercles dans des plans orthogonaux, chaque cercle passant par le centre de l'autre. L'engin a bien deux roues mais curieusement disposées et on l'a donc baptisé orthobicycle.

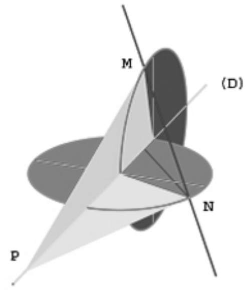
Première maquette et modélisation géométrique



Comme pour le sphéricône, plutôt que de faire rouler un plan sur le bicycle, faisons rouler le bicycle sur un plan pour en déterminer un patron. On peut en encrer le bord et le faire rouler sur une feuille de papier ou encore le faire rouler dans du sable et relever l'empreinte. On obtient ainsi un premier patron d'assez bonne qualité qui nous aide à nous familiariser avec ce curieux objet.

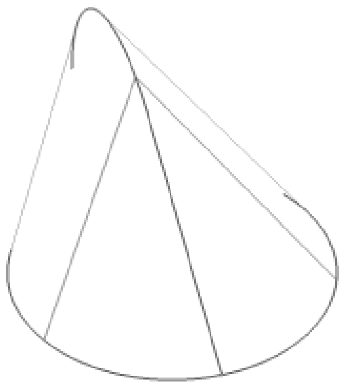
On constate qu'il s'apparente bien au sphéricône. Il roule lui aussi d'un mouvement continu avec une démarche chaloupée. Il présente une face continue. Deux orthobicycles peuvent rouler indéfiniment l'un sur l'autre.

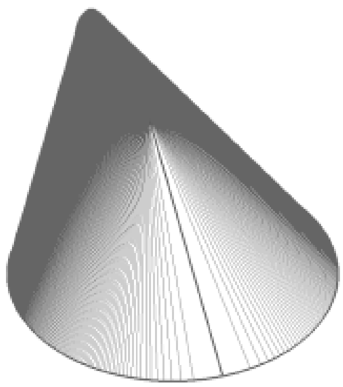
Il s'agit maintenant de modéliser géométriquement cette surface, autrement dit d'en déterminer une génératrice quelconque. Soit MN cette génératrice, les points M et N étant situés respectivement sur chacun des cercles. On part de la propriété que le plan tangent à la surface est invariant le long d'une génératrice. Le plan tangent en un point d'une surface est tangent à toute courbe tracée sur la surface en ce point. Le plan tangent selon la génératrice MN contient donc la tangente en M au premier cercle et la tangente en N au second, ce qui suffit à le définir à condition que ces deux droites soient effectivement coplanaires, c'est-à-dire sécantes en un point P (parallèles quand P est à l'infini). Ce point P, commun aux deux droites, appartient aux deux plans définis qui les contiennent et donc à leur intersection, la droite (D).



On en déduit la construction d'une génératrice MN. On se donne un point P sur la droite (D). On mène par P une tangente à chacun des cercles. Les points de contact M et N déterminent la génératrice correspondante.

Les modélisations présentées ici ont été réalisées à l'aide d'un logiciel 3D, Microstation. A partir d'un réseau de génératrices, on a construit une surface qui approche d'autant mieux la surface développable que les génératrices sont nombreuses et convenablement distribuées. On a aussi utilisé Cabri II+ qui, avec des techniques relevant de la géométrie descriptive et les outils développés par Geneviève Tulloue (http://gtulloue.free.fr/Cabri3D), permet de faire beaucoup de choses en 3D.





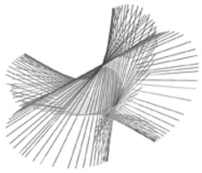
Exploration de la surface

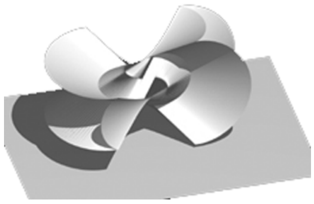
Elle présente les éléments de symétrie de son système générateur, notamment deux plans de symétrie, ceux des deux cercles. Elle est également globalement invariante dans les transformations qui échangent les deux cercles.

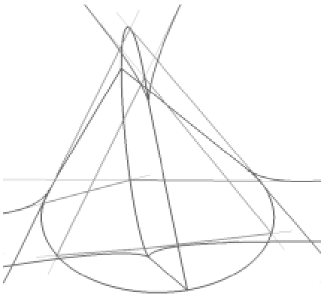
On remarque encore que pour chaque cercle ayant servi à la définir, seul un arc appartient à la surface, l'arc restant constituant une « branche parasite » de chacune de ces courbes directrices.

Si maintenant on s'intéresse à la surface au-delà de son « noyau central » (limité aux segments MN), on peut mettre en évidence sur ce cas particulier une courbe caractéristique des surfaces développables autres que les cônes et les cylindres, l'arête de rebroussement.

Modélisons à nouveau la surface en prolongeant les segments MN au-delà de M et N. On voit clairement l'arête de rebroussement sur la figure obtenue (ce nom tient au fait qu'en coupant la surface par un plan passant par un des points de cette courbe – sous réserve que ce ne soit pas le plan osculateur en ce point – on obtient une courbe qui présente un rebroussement).



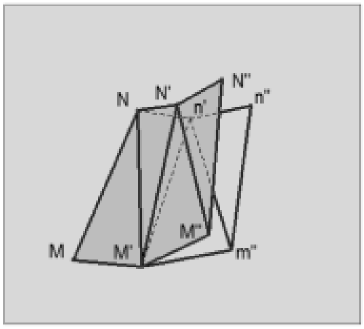


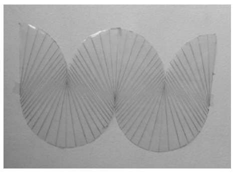


Avec Cabri et l'outil « lieu de droite », on obtient l'arête de rebroussement comme enveloppe des génératrices de la surface (elle est composée de quatre branches).

Cabri peut aussi servir à tracer un développement du noyau central de la surface. La méthode – classique – consiste à approcher la surface par un surface polyédrique s'appuyant sur un réseau de génératrices. Deux génératrices voisines forment un quadrilatère gauche MNN'M', que l'on triangule en joignant M'N. On rabat sur le plan MM'N le triangle NN'M' en le faisant tourner autour de l'axe NM' et en entraînant le reste de la surface triangulée dans ce mouvement. N' est rabattu en n', puis par le même procédé M'' en m'', N'' en n'', etc. Là encore, le développement est d'autant meilleur que les génératrices sont nombreuses et convenablement distribuées. Par ce procédé on obtient le développement de la surface et des arcs utiles appartenant aux deux cercles directeurs.

Reproduits sur du bristol ou sur un transparent, ces tracés permettent de modéliser la surface.





En guise de conclusion

Le sujet présenté dans cet atelier a été étudié dans le cadre d'un enseignement optionnel intitulé « morphologie des surfaces » dispensé à des étudiants de 4e année en architecture. L'enseignement de la géométrie dans les écoles d'architecture – on en a parlé dans cet atelier – est une vraie gageure. Le programme et les heures ont fondu comme neige au soleil au cours de ces vingt dernières années et la géométrie n'est plus reconnue comme nécessaire à la formation des architectes. Il faut sans doute en renouveler l'enseignement. La géométrie « à l'ancienne », paradoxalement, peut être un excellent support de ce renouvellement, surtout si on tourne cet enseignement vers la représentation et la modélisation de formes et de surfaces à partir de leurs propriétés géométriques.

PS 1 – Un grand merci à Robert Ferréol pour avoir accueilli et mis en équation l'orthobicycle sur son site http://www.mathcurve.com (un vrai trésor à recommander vivement à quiconque s'intéresse à la géométrie des courbes et des surfaces).

PS 2 – J'ai découvert récemment que les surfaces développables ayant pour directrices deux courbes du second degré non coplanaires – dont l'orthobicycle n'est qu'un cas particulier – ont été étudiées par les contemporains et les disciples de Monge, en tant que surface d'ombres et de pénombres lorsque la source lumineuse n'est pas ponctuelle.