Les TICE pour étudier un problème d'écologie :
un regard surprenant sur les mathématiques. (atelier D 15)

Par Monique Maesen

I Présentation du projet

Notre école organise trois jours de projet au cours desquelles aucun cours n'est donnés, mais chaque professeur et chaque élève développe un projet.
Le mien était : en trois jours, découvrir comment à l'aide d'une calculatrice graphique des élèves de seconde (6 h de math par semaine) et de première (5 ou 7 h de math par semaine) peuvent résoudre des problèmes dynamiques. Certains apprendront aussi les limites, les dérivées ; tous découvriront les exponentielles et le nombre e. Mais aussi comment utiliser la calculatrice dans le cours, découvrir un peu quel plus elle apporte.

II Le premier problème : l'étang

A Lecture de l'énoncé

> Un étang artificiel contenant 30 000 litres d'eau pure est utilisé par un pisciculteur. Cet étang est alimenté par un ruisseau dont le débit moyen est de 150 litres à l'heure. La vidange de l'étang s'effectue au même débit.
> À 1 000 m en amont, une porcherie industrielle voudrait s'installer. Dans sa demande de permis d'installation, elle annonce qu'elle déversera une eau polluée à 4 % de purin.
> La commune demande à un mathématicien, écologiste à ses heures, de lui calculer à tout moment le pourcentage de purin présent dans l'eau de l'étang.
> On suppose que le temps de parcours du kilomètre est négligeable.
> Le pisciculteur s'est renseigné : son élevage est en danger dès que la pollution de l'étang atteint 2%. Il souhaite savoir s'il doit réagir, ou s'il peut accepter cette nouvelle porcherie. Bref il souhaite répondre à la question : à quel moment la pollution de l'étang sera-t-elle supérieure à 2% ?
> Pour répondre à la demande de la commune et du pisciculteur, le mathématicien souhaite trouver l'expression analytique de la fonction de pollution.

B Brainstorming

Dans un premier temps, les élèves ont répondu à la question : « à la longue, quelle sera la pollution de l'étang ? » Chaque idée a été commentée et justifiée. C'est l'intuition et la présence de la limite de 2% qui a favorisé la réflexion et amené la conjecture : le taux de pollution ne dépassera jamais 4% (i.e. 30 000 litres*4% = 1 200 litres) car le pourcentage de pollution dans l'étang ne peut être supérieur au pourcentage de pollution entrante.

Remarque : le fait d'avoir employé le terme limite (à 2%) a apporté une confusion car ce n'était pas la limite au sens mathématique. De cette confusion est née plus tard un approfondissement de la notion de limite au sens mathématique.

Dans un second temps, les élèves ont recherché la ou les variable(s), la question, les données et trié les données essentielles.

Données : le volume de l'étang = 30 000 l
le débit : 150 l/h (entrée et sortie)
le taux de pollution de l'eau qui entre dans l'étang : 4

La distance de 1 km, entre la porcherie et l'étang, a relancé le débat : le temps nécessaire pour parcourir ce km n'étant pas déterminable ! Pour finir quelqu'un ayant relu tout l'énoncé a vu la pertinence de la phrase « on suppose que le temps de parcours du kilomètre est négligeable ».

Une autre inconnue étant « y a-t-il un dépôt soit dans le lit de la rivière au long de ce km, soit dans le fond l'étang ? », la réponse à cette question appartenant plus au domaine chimique que mathématique, la question de la collecte de toutes les données est apparue comme très importante.

Un troisième temps, de réflexion, a commencé, les élèves n'ayant découvert ni variables, ni questions : que cherche-t-on, quelle est la question ? Finalement, l'accord s'est fait sur la question de l'évolution de la pollution qui permettait de répondre automatiquement à la question des 2%. La variable, c'est donc le temps.

C Deux chemins pour déterminer la fonction de pollution

<u>1 Première résolution : à l'aide d'une méthode algébrique puis graphique (en litres de pollution)</u>

Première double erreur, assez généralisée :

Le calcul de la pollution après une heure est généralisé donc après 2h (respectivement 3h, ...) la pollution entrante est double (triple) de la précédente et l’eau polluée est toute au même taux.

débit :	150	Litres/heure
pollution :	4%	
volume :	30 000	Litres

nombre d'heures (h)	quantité d'eau entrée (qdee)	quantité de purin entrée (qdpe)	pourcentage de purin dans l'étang (a)	pourcentage de purin dans l'eau qui sort (b)	volume de purin qui sort (c)	volume de purin dans l'étang
	= h * débit	=(qdee* pollution)	= qdpe / 300	= a de la ligne précédente	= (b*débit*h) / 100	= qdpe - c
0	0	0	0	0	0	0
50	7500	300	1	0	0	300
100	15000	600	2	1	150	450
150	22500	900	3	2	450	450
200	30000	1 200	4	3	900	300
250	37500	1 500	5	4	1 500	0
300	45000	1 800	6	5	2 250	-450
350	52500	2 100	7	6	3 150	-1 050
400	60000	2 400	8	7	3 600	-1 200

Une extrapolation dans le temps à mis en évidence une erreur de raisonnement : la pollution sortante diminue-t-elle ? pourquoi la pollution sortante est-elle négative ?
La recherche de l'erreur n'a pas toujours été évidente. Il fallait en effet comprendre ce que signifiaient les calculs :

l'eau entrait en un coup ;
toute l'eau sortante avait le pourcentage de pollution de l'étang au temps précédent.

Corriger les deux erreurs revient à considérer que l'eau entre heure par heure et que l'eau qui sort a une pollution qui varie d'heure en heure.

débit :	150	Litres/heure
pollution :	4%	
volume :	30 000	Litres
dt :	1	heure

Nombre d’heures	**entre** en 1 dt	**sort** en 1 dt (C)	**dedans** sur le dt (D)	dedans en % (E)
	= dt*débit*pollution	= E(ligne précédente) * 150 *dt	= entre + D (ligne précédent) – C (même ligne)	= dedans / volume
0	6	0	6	0,02%
1	6	0,03	11,97	0,04%
2	6	0,05985	17,91015	0,06%
3	6	0,08955075	23,82059925	0,08%
4	6	0,119102996	29,70149625	0,10%
5	6	0,148507481	35,55298877	0,12%
136	6	2,965478410	596,1302035	1,99%
137	6	2,980651018	599,1495525	2,00%
138	6	2,995747763	602,1538047	2,01%
250	6	4,286352717	852,9841906	2,86%
500	6	5,510568831	1102,603197	3,68%
750	6	5,860214601	1172,182706	3,91%
1000	6	5,960076189	1192,055162	3,97%
1250	6	5,988597445	1197,730892	3,99%
1500	6	5,996743340	1199,351925	4,00%
1750	6	5,999069872	1199,814905	4,00%
2000	6	5,999734348	1199,947135	4,00%

C'est à partir du graphe ci-dessous que, l'ambiguïté du terme " limite " s'est éclaircie : la limite à 2% (imposée pour les poissons) n'a pas la même signification que la limite à 4% (valeur de la pollution entrante).
En effet, l'antécédent de 2% donne le temps de survie des poissons. Cette limite est donc bien atteinte en un temps fini. Tandis que y = 4% est l'équation de l'asymptote horizontale. Remarque : la fonction est croissante, mais ne dépassera jamais 4%.
La signification d'une asymptote horizontale a été redécouverte : plus la précision de calcul est grande (le nombre de décimales élevé), plus il faut de « temps » pour que la courbe s'approche de l'asymptote. Donc si l'on pouvait avoir une infinité de décimales, la courbe ne toucherait jamais l'asymptote.

2 Deuxième résolution à l'aide des suites (en concentration de pollution)

Composition de l'étang après la première heure :

150 litres d'eau polluée à 4% sont entrés (soit 0,5% de l'étang)

29 850 litres d'eau pure sont restés dans l'étang (soit 99,5% de l'étang)

150 litres d'eau pure sont sortis.

Or 4% de 150 litres = 6 litres

$\Rightarrow$ la pollution dans l'étang est de 6 litres = **0,02**% de 30.000 litres.

Remarque : l'eau entrant de l'étang augmente la pollution de l'étang de 0,02% par heure.

Composition de l'étang après la deuxième heure :

150 litres d'eau polluée à 4% sont entrés

29 850 litres d'eau polluée à 0,02%

150 litres d'eau polluée à 0,02% sont sortis

Or 4% de 150 litres = 6 litres et 0,02% de 29.850 litres = 5,97 litres

$\Rightarrow$ la pollution dans l'étang est de 11,97 litres = 0,0399% de 30.000 litres

Chaque heure 150 litres entrent (avec une pollution de 4%) et 150 litres sortent (avec une pollution variable) donc 29 850 litres « restent » en permanence dans l'étang.

0	aucune pollution n'est entrée	$C_0 = 0$	
1	6 litres de purins sont entrés = 0,02% de 30.000	$C_1 = 0,02$	
2	...	$C_2 = 0,02 + 0,995 \times C_1$	$C_2 = 0,02*(1+0,995)$
3	...	$C_3 = 0,02 + 0,995 \times C_2$	$C_3 = 0,02*(1+0,995+0,995^2)$
4	...	$C_4 = 0,02 + 0,995 \times C_3$	$C_4 = 0,02*(1+0,995+0,995^2+0,995^3)$

En utilisant les suites, ce groupe a mis au point de la formule suivante :

$$C_0 = 0 \text{ et } C_{n+1} = 0,02 + 99,5\ \% * C_n$$

$\Rightarrow$ chaque élément de cette série est la somme d'une série géométrique où q = 0,995

$$\Rightarrow C_n = \frac{0,02 \times \left(1\text{-}0,995^n\right)}{1\text{-}0,995}$$

Si $n \to \infty$, alors $0,995^n \to 0$ et donc $C_\infty = \dfrac{0,02}{1-0,995} = 4$

D Recherche de l'expression analytique de la fonction et de son évolution

Quand le graphe correspond à la conjecture initiale – le taux de pollution ne dépassera jamais 4% – la recherche de la solution analytique de y et de son évolution est commencée.

Chacun a recherché, à l'aide des formules utilisées lors des calculs, la valeur de y (t+Δt) :

En travaillant avec les volumes	En travaillant avec les concentrations
$y(t+\Delta t) = \Delta t\ 150 * 4\% + y(t) - \frac{y(t)}{30000} * 150 * \Delta t$	$y(t+\Delta t) = \Delta t\ \frac{150*4}{30000} + y(t) - \frac{150}{30000}\ \Delta t\ y(t)$
$y(t+\Delta t) = 6\ \Delta t + y(t) - 0{,}005\ \Delta t\ y(t)$	$y(t+\Delta t) = y(t) + 0{,}02\%\ \Delta t - 0{,}005\ \Delta t\ y(t)$

Pour ceux qui ont travaillé avec les suites, Δt = 1 et

donc $y(t) - \frac{150}{30000}\ \Delta t\ y(t) = \frac{29850}{30000}\ y(t) = 0{,}995\ y(t)$.

À l'étape suivante, ils ont remarqué que cette « fusion » menait à une confusion.

À partir d'ici tous les calculs sont faits en fonction du volume et non plus de la concentration.

L'évolution = ce qui ce passe entre y(t) et y(t+Δt)
= la pollution qui entre - la pollution qui sort
= 6 - 0,005 y(t)

6 = 150*4% soit la quantité de purin entrée par unité de temps (indépendamment du moment où l'on fait le calcul).

$0{,}005\ y(t) = \frac{150}{30000}\ y(t)$ soit la quantité de purin qui sort par unité de temps au temps t

150 c'est le débit d'eau sortie donc 150 l sortent par unité de temps

par unité de temps, la proportion d'eau qui sort, vaut :

$\frac{150}{30000} = 0{,}005$

donc 1/200ième de l'étang sort par unité de temps

En comparant les deux formules, un lien évident apparaît. Dans la formule de $y(t+\Delta t)$, en isolant l'évolution dans le membre de droite, on obtient :

$y(t+\Delta t) - y(t) = 6\ \Delta t - 0{,}005\ \Delta t\ y(t)$ dans les formules il y a aussi Δ

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = 6 - 0{,}005\ y(t)$$

<u>L'évolution, c'est la dérivée !</u>

$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$ = le coefficient angulaire de la sécante passant par $(t, y(t))$ et $(t+\Delta t, y(t+\Delta t))$

et donc $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$ = le coefficient angulaire de la tangente passant par $(t, y(t))$

Ici, **la dérivée vaut l'évolution :** $y' = 6 - 0{,}005\ y(t)$. y' est donc une manipulation de la fonction y.

Remarque : pour ceux qui n'avaient pas encore rencontré la dérivée, nous l'avons introduite à partir de son interprétation géométrique.

Conclusion : l'évolution n'est autre que la dérivée de la fonction de départ ; de plus la dérivée dépend de la fonction même, c'est-à-dire dans les problèmes dynamiques l'évolution dépend du fait même.

$$y' = 150 * \frac{150}{30000} *4\% - y(t) \text{ ou } y' = 6 - 0{,}005\ y(t)$$

III Trois problèmes appartenant à la même famille

A Problème du CO dans la pièce

L'air d'une pièce de 3m x 4m x 2,5m est initialement chargé de 0,001% de monoxyde de carbone (CO). À l'instant t = 0, des fumées toxiques contenant 5% de CO commencent à se dégager dans la pièce à raison de 0,003 m^3/min., mais l'air mélangé est éliminé à la même vitesse.

Cherche l'expression du volume f(t) de CO présent à chaque instant dans la pièce au temps t.

B Problème de la banque :

La quantité d'argent liquide en circulation dans un petit pays est estimé à 9 milliards d'euros et chaque jour, 50 millions d'euros transitent par les banques du pays. Le gouvernement a décidé d'introduire de nouveaux billets et pièces en obligeant les banques à changer les anciens billets et pièces contre les nouveaux à chaque fois que l'argent passe par elles. On désigne par $y(t)$ la quantité de nouvelle monnaie en circulation au temps t et on suppose aussi que $y(0) = 0$.
Calculez le temps nécessaire pour que 90% de la monnaie en circulation soit renouvelée.

C Problème du pétrolier qui dégaze en mer :

Un bateau a dégazé en mer. Sur le radar de contrôle, une nappe de pétrole apparaît. Le 1/3/04, elle mesure 0,01 m². Sa superficie augmente de 10% par jour. Recherche la superficie $f(t)$ de la nappe de pétrole au temps t.

IV Comparaison des quatre problèmes

	Données	**Mise en équation**
La pollution dans l'étang	Volume d'eau dans l'étang : 30 000 litres, Débit entrant = débit sortant = 150 l/h, Eau polluée entrante contient 4% de purin.	$y(t+\Delta t)=\Delta t*150*4\%+y(t)-\frac{150}{30000}*y(t)*\Delta t$ ou $y(t+\Delta t)=6\Delta t+y(t)-0{,}005\,\Delta t\,y(t)$
Le CO dans la pièce	Volume de la pièce : 30 m³ Pourcentage de CO dans la pièce 0,01%, Fumées toxiques contiennent 5% de CO, débit entrant = débit sortant = 0,003m³/min	$y(t+\Delta t)=y(t)+0{,}00015*\Delta t-\frac{0{,}003}{30}*\Delta t*y(t)$

La banque	Volume de pièces/billets dans le pays : 9 milliards, Volume de pièces/billets transitant par la banque : 50 millions par jour	$y(t+\Delta t)=y(t)+50*\Delta t-\frac{50}{9000}*\Delta t*y(t)$
Le pétrolier qui dégaze	surface initiale : 0,01m² progression : 10% par jour.	$y(t+\Delta t) = y(t) + 0,1*\Delta t*y(t)$

	évolution ou dérivée	**solution**
la pollution dans l'étang	$y' = 6 - 0,005\ y(t)$	$y(t) = 1\ 200 * (1 - e^{-0,005t})$
le CO dans la pièce	$y' = 0,000\ 15 - 0,0001\ y(t)$	$y(t) = 1,5 - (1,5-0,000\ 3)e^{-0,0001t}$
la banque	$y' = 50 - 0,005\ 56\ y(t)$	$y(t) = 9\ 000 * (1 - e^{-0,005\ 56t})$
le bateau qui dégaze en mer	$y' = 0,1\ y(t)$	$y(t) = 0,01 * e^{0,1t}$