Calculer des probabilités avec Blaise Pascal

Paul-Louis Hennequin,
Professeur honoraire à l'Université Blaise Pascal (Clermont-Fd 2)

Nous nous proposons de montrer sur un exemple historique, comment on peut calculer en réponse à une question le même nombre en exécutant des algorithmes différents ; toute l'intelligence du calcul consiste à choisir entre ces algorithmes le plus efficace ou le plus économique ou le plus rapide . Nos trois exemples peuvent être travaillés, le premier au collège, les deux autres au lycée . Nous nous laisserons guider par des figures et des représentations, pratiquant avec Pascal une *Géométrie du hasard.*

I.Le triangle arithmétique

Bien qu'on lui ait donné son nom, le triangle arithmétique n'a pas été inventé par Pascal, tant s'en faut, puisqu'on le trouve chez les arabes et les chinois, au moins 350 ans auparavant (cf. fig. 1, 2, 3).

Le *traité du triangle arithmétique,* écrit en 1654 rassemble toutes les formules utiles, certaines étant démontrées par récurrence , les valeurs des paramètres étant toujours explicitées et ne dépassant jamais quelques unités .

A. Additions

Pascal part de la formule :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$$

qui permet de déterminer la ligne n du triangle quand on connaît la ligne n-1, avec la convention :

$$\binom{n}{0} = 1$$

Pour n=1, $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$

et les calculs commencent avec : $\binom{2}{1} = 1+1 = 2$

on en déduit immédiatement : $\binom{n}{1} = 1+n-1 = n$

Figure 1, *Le triangle d'al-Karaji (XI e siècle)*

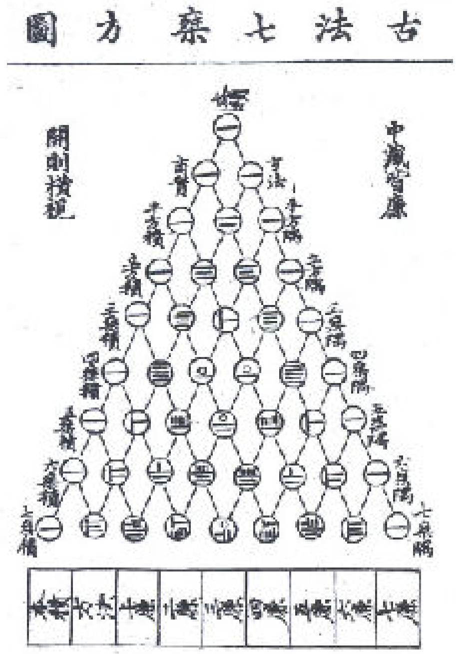

Figure 2, *Le triangle du Miroir de Jade des quatre inconnues (XIII e siècle)*

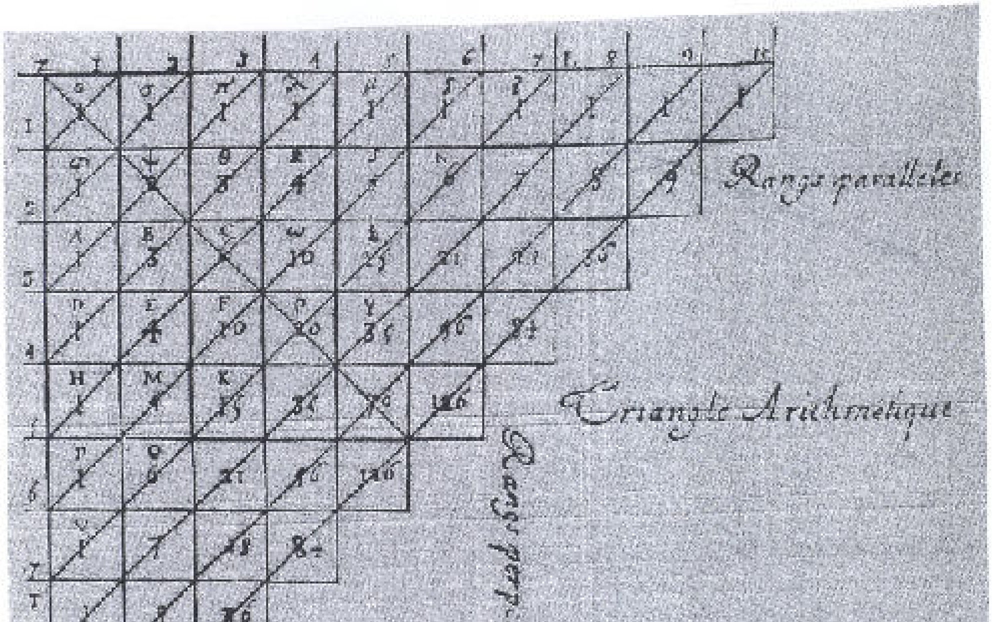

Figure 3, *Le triangle de Pascal (1654)* et Pascal montre que, pour $0 \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

pour remplir la ligne n, il suffit donc de calculer les $\binom{n}{p}$ pour $2 \leq p \leq n/2$,

soit, si $n=2r$ est pair, $2 \leq p \leq r$, donc r-1 additions,

si $n=2r+1$ est impair, $2 \leq p \leq r$, donc r-1 additions,

dans les deux cas, $r = [n/2]$, partie entière de $n/2$.

Pour remplir tout le triangle jusqu'à la ligne $2r+1$, il faut donc :

$2\sum_{s=2}^{r}(s-1) = r(r-1)$ additions, et, si on s'arrête à la ligne $2r$, $r(r-1) - (r-1) = (r-1)^2$ additions.

Si on utilise une machine pour effectuer ces additions dans l'ordre naturel, il n'y a dépassement de capacité que quand le nombre calculé ne peut être inscrit .

Dans la ligne n, le plus grand nombre à calculer est : $\binom{n}{[n/2]}$

, que l'on peut estimer par la formule de Stirling (1730) :

on obtient la valeur approchée :

$$\frac{2^{n+1/2}}{\sqrt{\pi n}}$$

Dans le cas du modèle à huit chiffres décimaux de la Pascaline (cf. fig. 4), on peut atteindre la **29**$^{\text{ème}}$ ligne ; pour remplir le triangle, il faut effectuer **13x14 = 182** additions .

B. Multiplications

Si l'on souhaite seulement calculer une valeur de « *p parmi n* », on peut être tenté d'utiliser la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

pour calculer m !, il faut m-2 multiplications : 2x3x4x…m, donc pour « *p parmi n* »,
n-2 + p-2+(n-p-2) +1 = $2n$ –5 multiplications et une division ;mais on risque la catastrophe d'un dépassement de capacité pour n ! , ainsi, si n= 29, 29 ! = 8,8 10^{30} .
Si on utilise un calcul en virgule flottante, on a peu de chance de trouver un résultat entier !
Il vaut donc mieux :

a) simplifier : si $p \leq n/2$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n.(n-1)...(n-p+1)}{p.(p-1).....2}$$

soit $2p$-3 multiplications suivies d'une division, mais risque de dépassement de capacité au numérateur .

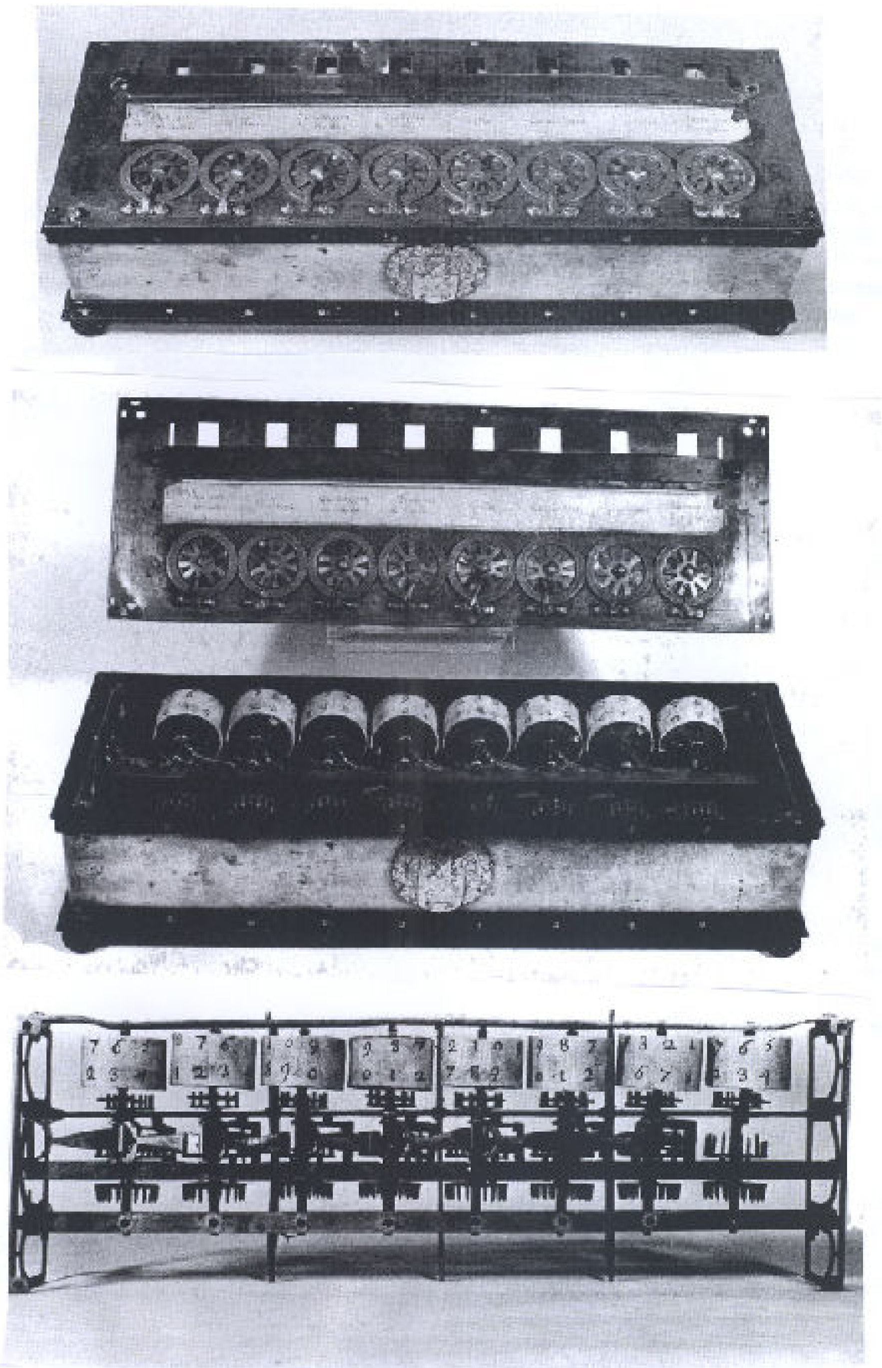

Figure 4, *la Pascaline de Marguerite Périer ou de Clermont-Ferrand (Musée Lecoq)*

b) calculer : $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} * \frac{n-1}{p-1} * \ldots \frac{n-p+2}{2} * \frac{n-p+1}{1}$,

soit p-1 divisions suivies de p-1 multiplications.

II- La règle des partis, cas de deux joueurs

Cette règle relative aux jeux de hasard fait l'objet d'une lettre perdue de Fermat à Pascal, de la lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654 (cf. par exemple [1] p.215) et d'un fragment du *Traité du triangle arithmétique : « Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties »*

A. L'énoncé du problème.

Deux joueurs A et B jouent à « Pile ou Face » et misent chacun M. Le vainqueur du jeu est le premier qui a gagné c coups ; il empoche alors sa mise et celle de son partenaire . Le jeu est interrompu alors qu'il reste a coups à gagner pour A et b pour B . Comment doivent-ils se partager les mises pour que le jeu soit équitable ?
On savait depuis longtemps (cf. par exemple [3])que ce problème, dont Pascal dit qu'il lui a été posé par le Chevalier de Méré qui ne savait pas le résoudre, avait été posé et étudié à la fin du XVe par Luca Paccioli (1494) puis au XVIe par Tartaglia (1556) , le premier propose de partager les mises proportionnellement aux coups déjà gagnés soit :
$2M\,(c-a)/(2c-a-b)$ pour A et $2M\,(c-b)/(2c-a-b)$ pour B
et évoque, pour la rejeter le « parti » :
$M(1+(b-a)/c)$ pour A et $M(1-(b-a)/c)$ pour B que Tartaglia reprendra .
Mais on ignorait, en tout cas chez les probabilistes, deux textes contemporains de Pacioli retrouvés par des chercheurs de l'Université de Sienne dans des arithmétiques commerciales du XVe et qui donnent exactement la solution de Pascal pour deux puis trois joueurs . Nous renvoyons à l'article de Norbert Meusnier (cf.[2] p.3-23)qui imagine un texte arabo-musulman à l'origine de la solution de ce problème .
Je supposerai que ni Pascal, ni Fermat ne connaissaient ces textes

B. Modalités de mise en œuvre

Les programmes d'août 2001 pour la terminale S précisent :
On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.
Et ajoutent :
Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve .
En fait on ne trouve pas de représentations chez Fermat et uniquement des tableaux chez Pascal. Représentons les fins de jeu possibles, celles qui ne sont pas jouées si l'on décide de s'arrêter : une suite de coups peut se représenter comme le fait Pascal par un mot utilisant seulement les deux lettres A et B et énumérant dans l'ordre les gagnants des coups successifs : BAABABA ; la partie s'arrête et A gagne si ce mot contient a lettres A et moins de b lettres B, ou, et B gagne, si ce mot contient b lettres B et moins de a lettres A
L'ensemble des jeux possibles peut se représenter par un *arbre* , tel celui emprunté à [4] représenté ci-dessous fig.5. Pratiquement, un tel arbre est illisible dès que a+b dépasse la dizaine. Il est plus simple de représenter chaque jeu par une trajectoire sur un quadrillage, chaque coup étant représenté par un pas vers la droite (de la feuille ou du tableau) si A gagne et vers le haut si c'est B (cf. fig. 6)
Fixer la règle des partis c'est soit calculer la probabilité $P_{a,b}$ que A aurait de gagner la fin du jeu, soit répartir équitablement les enjeux : A doit alors recevoir ce qu'il espérait du jeu, soit : $2M\,P_{a,b}$ et B :

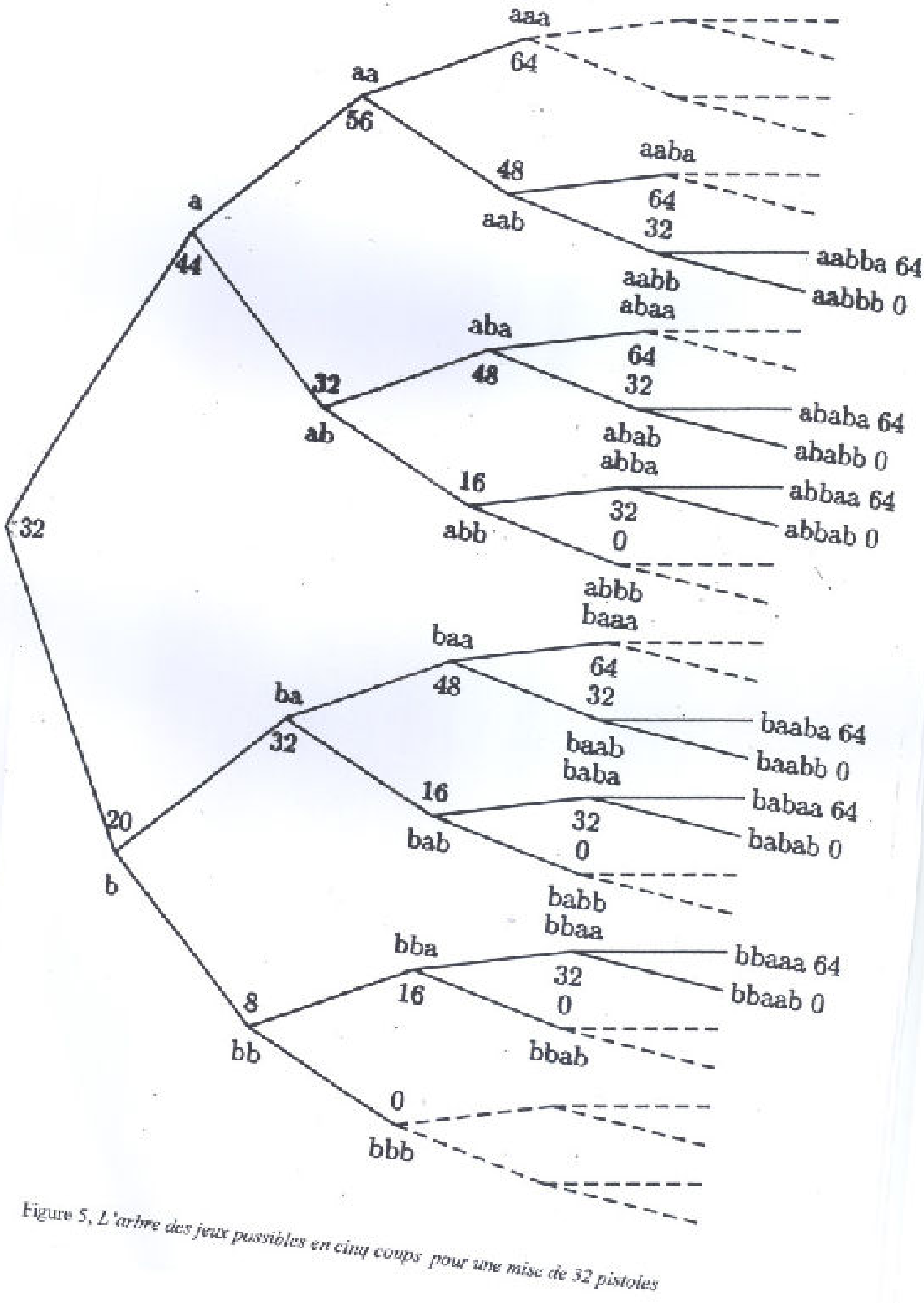

Figure 5, *L'arbre des jeux possibles en cinq coups pour une mise de 32 pistoles*

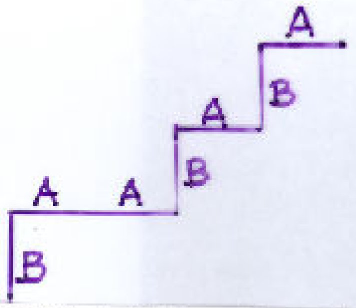

Figure 6, *La trajectoire représentant le jeu BAABABA*

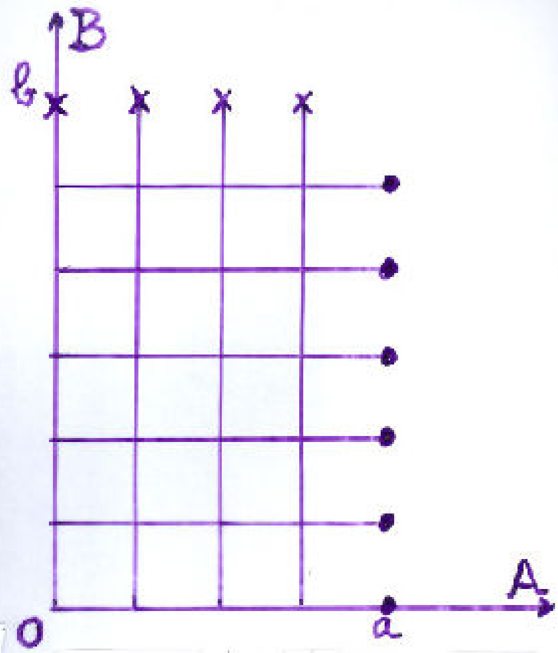

Figure 7, *Première solution combinatoire*

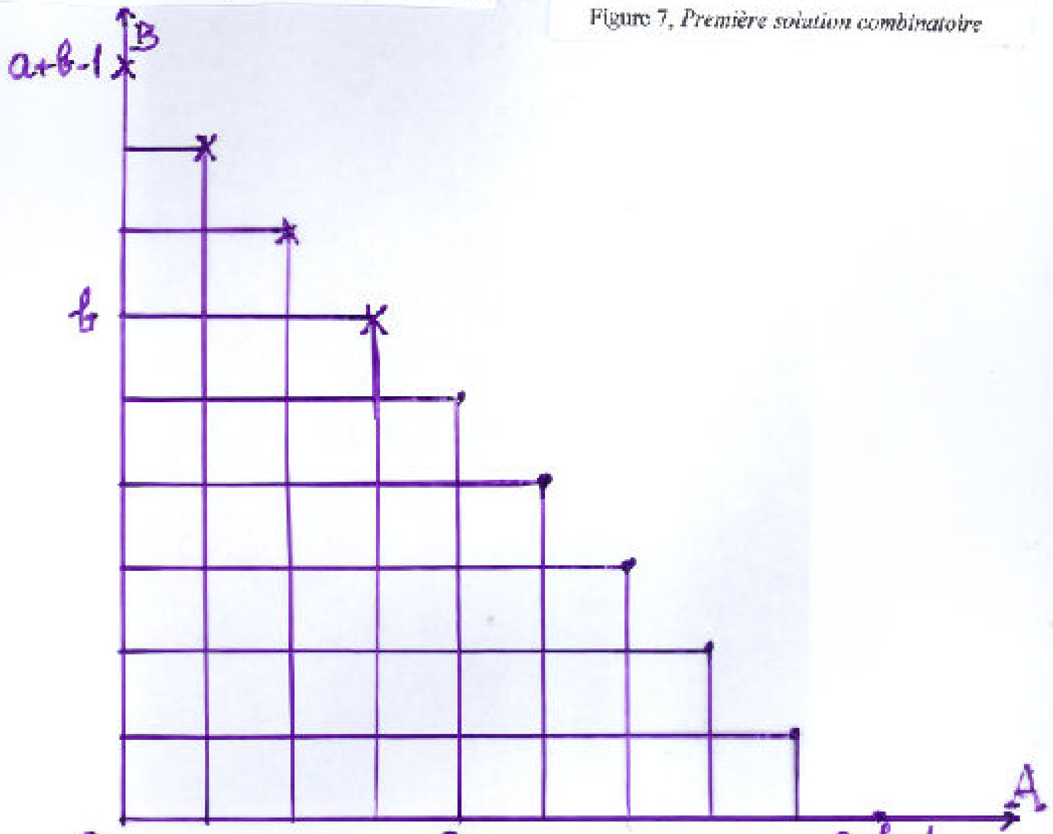

Figure 8, *Deuxième solution combinatoire*

$2M$ (1- $P_{a,b}$) . On peut aussi calculer le bénéfice (positif ou négatif) de A : $M(2P_{a,b}-1)$ et celui de B : $M(1-2P_{a,b})$

C. Première solution combinatoire (C1)

Bien que nous ne connaissions la solution proposée par Fermat que par ce qu'en dit Pascal (*elle utilise les combinaisons*), on peut penser que c'est l'une des deux que nous notons (C1) et (C2)
Les coups successifs étant indépendants et de même probabilité ½, une trajectoire gagnante pour A comporte $a+j$ coups avec $0\leq j<b$ et elle a pour probabilité $1/2^{a+j}$; pour compter le nombre de ces trajectoires (cf. fig 7), notons qu'elles se terminent par le pas vers la droite
$(a-1, j)$, (a, j),
et qu'il y a :

$\binom{a+j-1}{j}$ trajectoires comportant $a-1$ pas vers la droite et j vers le haut
de sorte que :

$$P_{a,b}=\sum_{j=0}^{b-1}\binom{a+j-1}{j}/2^{a+j} \qquad \textbf{(C1)}$$

D. Deuxième solution combinatoire (C2)

Les coups restant à jouer sont en nombre au plus $a+b-1$. Supposons que, pour leur plaisir de jouer, les deux joueurs décident d'effectuer tous ces coups (cf. fig 8).
La trajectoire décrivant un jeu joint maintenant le point (0,0) à un point de la «diagonale» qui va de $(0,a+b-1)$ à $(a+b-1,0)$; cette trajectoire est gagnante pour A si et seulement si elle aboutit à l'un des points $(a+i,b-1-i)$ avec $0\leq i<b$,

les trajectoires gagnantes sont donc en nombre : $\binom{a+b-1}{a+i}$
et ont chacune la même probabilité : $1/2^{a+b-1}$.
On en déduit :

$$P_{a,b}=\sum_{i=0}^{b-1}\binom{a+b-1}{a+i}/2^{a+b-1} \qquad \textbf{(C2)}$$

expression différente de **(C1)** mais plus simple à calculer .
Dans sa lettre à Fermat du 29 juillet, Pascal explicite le calcul de $P_{b-1,\,b}$, probabilité que A gagne le jeu s'il a gagné le premier coup :

$$P_{b-1,b}=\sum_{i=0}^{b-1}\binom{2b-2}{b-1+i}/2^{2b-2}$$

Or, d'après les propriétés du triangle arithmétique,

$$\binom{2b-2}{b-1+i}=\binom{2b-2}{b-1-i}$$

et $$\sum_{j=0}^{2b-2}\binom{2b-2}{j}=2^{2b-2}$$

on en déduit :

$$2\sum_{i=0}^{b-1}\binom{2b-2}{b-1+i}=\sum_{j=0}^{2b-2}\binom{2b-2}{j}+\binom{2b-2}{b-1}=2^{2b-2}+\binom{2b-2}{b-1}$$

et $P_{b-1,b} = 1/2 + \binom{2b-2}{b-1} / 2^{2b-1}$

avec $\binom{2b-2}{b-1} = (2b-2)\,!\,/\,[(b-1)\,!]^2 = (2b-3)\ldots 3.1.\ 2^{b-1} \;/\; (b-1)\,!$

$= (2b-3)\ldots 3.1.\ 2^{2b-2} \;/\; (2b-2)\ldots 2$,

d'où : $2\,P_{b-1,b} - 1 = (2b-3)\ldots 3.1 \;/\; (2b-2)\ldots 2$, produit des ($b$-1) impairs divisé par le produit des (b-1) pairs.

E. La solution de Pascal par récurrence (R)

Pascal connaît bien et maîtrise parfaitement le calcul par récurrence des termes du triangle arithmétique . il suit les coups du jeu et analyse le passage d'un coup au suivant : en termes modernes, il utilise les probabilités et espérances conditionnelles et la formule clef s'écrit :
$P(E) = P_F(E)\,P(F) + P_{F^c}(E)\,P(F^c)$, où F est un événement de probabilité distincte de 0 et de 1, F^c son contraire, et E un événement quelconque.
Pour calculer $P_{a,,b}$, nous choisissons pour F le succès de A au premier coup (pas vers la droite) et donc pour F^c celui de B (pas vers le haut)
Si F est réalisé, la probabilité que A gagne le jeu est $P_{a-1,b}$,
Si c'est F^c , cette probabilité est $P_{a,b-1}$; par ailleurs, $P(F) = P(F^c) = ½$
D'où la formule :

$$P_{a,b} = (P_{a-1,b} + P_{a,b-1}) / 2 \qquad \textbf{(R)}$$

qui, avec les conditions : $P_{a,0} = 0$ pour a>0 et $P_{0,b} = 1$ pour b>0, détermine les $P_{a,b}$ par récurrence :
$P_{a,1} = P_{a-1,1}/2 = 1/2^a$, $\quad P_{a,2} = (P_{a-1,2} + P_{a,1}) / 2$, …

Pascal effectue à la main et pas à pas les additions et les divisions par 2, pour calculer les premières valeurs de $P_{a,b}$, jusqu'à a=b=8 . En fait il évite les fractions en calculant le bénéfice de l'un des joueurs et en utilisant pour M une puissance de 2 convenable .

Remarquons qu'on a obtenu un *algorithme de calcul,* mais pas une formule *explicite* comme C1 ou C2 ; pour avoir celle-ci nous utilisons la technique des *fonctions génératrices* dont le plein usage sera effectué par Laplace (cf. par exemple [2] p.205) à la fin du XVIIIe mais qui commence à germer chez Newton, Leibniz puis Euler.
Posons , pour |x| < 1 et |y| < 1 :

$$G(x,y) = \sum_{a\geq 1}\ \sum_{b\geq 1} P_{a,b}\, x^a y^b$$

Multiplions les deux membres de (R) par $x^a y^b$ et sommons ; nous *obtenons* :

$$G(x,y) = \sum_{a\geq 1} \sum_{b\geq 1} x/2\ P_{a-1,b}\ x^{a-1}y^{b} + y/2 \sum_{a\geq 1} \sum_{b\geq 1} P_{a,b-1}\ x^{a}y^{b-1}$$

$$= x/2 \sum_{a'\geq 0} \sum_{b\geq 1} P_{a',b}\ x^{a'}y^{b} + y/2 \sum_{a\geq 1} \sum_{b'\geq 0} P_{a,b'}\ x^{a}y^{b'}$$, en posant $a'=a$-1 et $b'=b$-1,

$$= x/2 \sum_{b\geq 1} y^{b} + x/2 \sum_{a'\geq 1} \sum_{b\geq 1} P_{a',b}\ x^{a'}y^{b} + y/2 \sum_{a\geq 1} \sum_{b'\geq 1} P_{a,b'}\ x^{a}y^{b'}$$, car $P_{a,0} = 0$ et $P_{0,b} = 1$,

$$= xy/2(1-y) + [(x+y)/2]\ G(x,y)$$

d'où $G(x,y) = xy / (1-y)(2-x-y) = (x/2) \sum_{i\geq 1} y^{i} \sum_{j\geq 0} [(x+y)/2]^{j}$

$$= x \sum_{i\geq 1} y^{i} \sum_{j\geq 0} \sum_{k\geq 0} \binom{j}{k} x^{k}\, y^{j-k} / 2^{j+1}$$

$P_{a,b}$ est le coefficient de $x^{a}y^{b}$ dans le développement de G ; pour l'obtenir, il faut prendre dans la sommation : $1+k = a$, et $i+j-k = b$, ou $k = a-1$ et $i+j = a+b-1$;
posons $i = b-l$, de sorte que $j = a + l - 1$.
$i,j,k,$ doivent satisfaire les conditions : $i > 0$ donc $l < b$, $j \geq 0$, $0 \leq k \leq j$, donc $l \geq 0$;

Finalement :

$$P_{a,b} = \sum_{l=0}^{b-1} \binom{a+l-1}{a-1} / 2^{a+j}$$

et on retrouve **(C1)**

F. Vérification

Vérifions que les solutions fournies par **(C1)** et **(C2)** satisfont **(R)** et les conditions aux limites ;
il en résultera que **(C1) = (C2)**
Pour **(C1),** on a : $P_{a,0} = 0$ comme somme vide. pour tout $a \geq 1$,

$$P_{0,b} = \sum_{j=0}^{b-1} \binom{j-1}{j} / 2^{j} = 1 ,$$

avec la convention : $$\binom{j-1}{j} = \binom{j}{j} - \binom{j-1}{j-1} = \begin{cases} 0 , \text{ si } j \geq 1 \\ 1, \text{ si } j = 0 \end{cases}$$

de plus, $$(P_{a-1,b} + P_{a,b-1}) / 2 = \sum_{j=0}^{b-1} \binom{a-1+j-1}{j} / 2^{a+j} + \sum_{j=0}^{b-2} \binom{a+j-1}{j} / 2^{a+j+1}$$

(en posant $j'=j+1$) $$= \sum_{j=0}^{b-1} \binom{a+j-2}{j} / 2^{a+j} + \sum_{j'=1}^{b-1} \binom{a+j'-2}{j'-1} / 2^{a+j'}$$

$$= \sum_{j=0}^{b-1} \binom{a+j-1}{j} / 2^{a+j} \quad = \ P_{a,b} \, ,$$

par la règle de construction du triangle arithmétique .

De même pour **(C2)** :

$P_{a,0} = 0$ comme somme vide et

$$P_{0,b} = \sum_{i=0}^{b-1} \binom{b-1}{i} \ / \ 2^{\,b-1} \quad = 1 \, ,$$

de plus, $(P_{a-1,b} + P_{a,b-1}) / 2$

$$= \sum_{i=1}^{b} \binom{a+b-2}{a+i-1} / 2^{a+b-1} + \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a+b-2}{a+i} / 2^{a+b-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{a+i} / 2^{a+b-1} \, ,$$

avec la convention : $\binom{a+b-2}{a+b-1} = 0$

G. Remarques

a)On peut se limiter à calculer les $P_{a,b}$ pour $a<b$; en effet , puisque le jeu est équitable, $P_{a,a} = ½$ pour tout a et $P_{a,b} = 1 - P_{b,a}$

b) Dans sa lettre à Fermat du 29 juillet, Pascal donne deux tableaux triangulaires correspondant à c=6 et $a<b\leq 6$ et donnant le bénéfice de A : $M(2P_{a,b}-1)$ où, pour ne manipuler que des entiers, il choisit M = $2^8 = 256$. (cf. fig. 9)

Le second tableau, T, contient à l'intersection de la ligne i et de la ligne j, le bénéfice $T_{i,j}$, pour $a = 7-i-j$ et $b = 7-i$; on déduit de (R) que les $T_{i,j}$ satisfont la relation de récurrence $T_{i,j} = (T_{i+1,j} + T_{i-1,j+1}) /2$, qui permet de construire T à partir de $T_{i,7-i} = 256$, et de $T_{0,j} = 0$ (ligne virtuelle) Le premier tableau, S, est défini à partir de T par $S_{i,j} = T_{i,j} - T_{i-1,j}$ et satisfait donc lui aussi la récurrence : $S_{i,j} = (S_{i+1,j} + S_{i-1,j+1}) /2$ mais avec $S_{1,j} = T_{1,j}$ et $S_{i,8-i} = 0$.

c) Chaque joueur a la même probabilité ½ de gagner ou de perdre à chaque coup. Si on supprime cette hypothèse et qu'on note p la probabilité de gain de A et q celle de B , on trouve par les mêmes méthodes :

$$P_{a,b} = \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a+j-1}{j-1} p^a q^j = \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a+j-1}{j-1} p^a q^j \quad \text{et} \quad : P_{a,b} = p\, P_{a-1,b} + q\, P_{a,b-1}$$

d) Nous laissons au lecteur la tâche de comparer les trois algorithmes.

TABLE

DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE

(de Pascal à Fermat , 29 juillet 1654)

Si on joue chacun 256, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
1^{re} Partie.	63	70	80	96	128	256
2^{e} Partie.	63	70	80	96	128	
3^{e} Partie.	56	60	64	64		
4^{e} Partie.	42	40	32			
5^{e} Partie.	24	16				
6^{e} Partie.	8					

Tableau S

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
La 1^{re} Partie.	63	70	80	96	128	256
Les 2 1^{res} Parties.	126	140	160	192	256	
Les 3 1^{res} Parties.	182	200	224	256		
Les 4 1^{res} Parties.	224	240	256			
Les 5 1^{res} Parties.	248	256				
Les 6 1^{res} Parties.	256					

Tableau T

Figure 9

III. La règle des partis, cas de trois joueurs

A. L'énoncé du problème.

Il y a maintenant trois joueurs , A , B , C , et chacun gagne un coup avec la même probabilité 1/3 . Les coups peuvent par exemple provenir du lancer équitable d'un dé et chaque joueur s'intéresse à l'une des trois éventualités : {1,2},{3,4},{5,6}. La mise initiale de chacun est M ; comment partager l'enjeu, 3M, alors que pour gagner, il reste *a* coups pour A*,* *b* pour B et *c* pour C ? On pourrait penser qu'il s'agit d'une généralisation triviale du cas de deux joueurs remplaçant 2 par 3 dans les calculs . Cependant il n'a pas fallu moins de quatre lettres (Pascal à Fermat, 24 août ; F. à P., 29 août ; F. à P., 25 septembre (réponse à la lettre du 24 août) ; P. à F. 27 octobre) et les délais de la poste pour qu'enfin « *La vérité soit la même à Toulouse qu'à Paris* » . Il est intéressant d'analyser pourquoi .

B. Modalités de mise en œuvre : les solutions (C1) et (R)

Considérons maintenant (cf. fig. 10) les points à coordonnées entières naturelles d'un espace affine de dimension 3 rapporté à une base (O, ABC). On peut, comme pour deux joueurs, associer à un jeu la trajectoire obtenue en mettant bout à bout des vecteurs égaux à **OA , OB, OC ,** suivant le résultat de chaque coup . Le jeu s'arrête dès qu'on atteint un point du plan $x = a$ (A gagne) ou $y = b$ (B gagne) ou $z=c$ (C gagne) ; le point (a,j,k) avec $0\leq j<b$ et $0\leq k<c$ doit être atteint à partir du point $(a\text{-}1,j,k)$, sinon le jeu se serait arrêté au coup précédent ;
Il y a donc : $(a\text{-}1+j\text{-}k)!\ /(a\text{-}1)!\ j!\ k!$ telles trajectoires gagnantes pour A , chacune de probabilité $1 / 3^{a+j+k}$, d'où en notant $P_{a,b,c,}$ la probabilité de gagner le jeu :

$$P_{a,b,c} = \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{c-1} (a\text{-}1+j+k)!\ /(\ a\text{-}1)!\ j!\ k!\ \ / \ 3^{a+j+k} \qquad \textbf{(C1)}$$

Pour en déduire les probabilités $Q_{a,b,c}$ et $R_{a,b,c}$ de gagner pour B et C , il suffit de remarquer les symétries du jeu :
$P_{a,b,c} = P_{a,c,b}$, $Q_{a,b,c} = P_{b,a,c} = P_{b,c,a}$, $R_{a,b,c} = P_{c,a,b} = P_{c,b,a}$
On peut verifier que $P_{a,b,c} + Q_{a,b,c} + R_{a,b,c} = 1$

Nous avons donc sans difficulté généralisé la première solution combinatoire et c'est semble-t-il ce qu'a fait Fermat ; on ferait de même pour un nombre quelconque de joueurs.
De même le raisonnement de Pascal obtenant une formule de récurrence en conditionnant par le résultat du premier coup conduit à l'équation :

$$P_{a,b,c} = (P_{a\text{-}1,b,c} + P_{a,b\text{-}1,c} + P_{a,b,c\text{-}1})\ /3 \qquad \textbf{(R)}$$

Avec les conditions aux limites :
$P_{0,b,c} =1$ pour $b\geq 1$ et $c\geq 1$, $P_{a,0,c} = P_{a,b,0} = 0$, pour $a\geq 1$, $b\geq 1$,$c\geq 1$, qui permettent de calculer les $P_{a,b,c}$ de proche en proche et de retrouver **(C1).**

C. La seconde solution combinatoire

Pour trois joueurs, le nombre maximum de coups de la fin du jeu est $a+b+c\text{-}2$; supposons qu'ils décident de jouer tous ces coups et reprenons la représentation des jeux par des trajectoires (cf. fig 11) ; une différence fondamentale apparaît avec le cas de deux joueurs: certains points (i,j,k) tels que $i+j+k= a+b+c\text{-}2$ peuvent être atteints *à la fois* à partir de points donnant la victoire à A et de points la donnant à un autre joueur : ainsi, si $c\geq 2$, le point $(a,b,c\text{-}2)$ peut être atteint soit à partir du point $(a,b\text{-}1,c\text{-}2)$ qui donne la victoire à A, soit du point $(a\text{-}1,b,c)$ qui la donne à B . Cette différence entre la

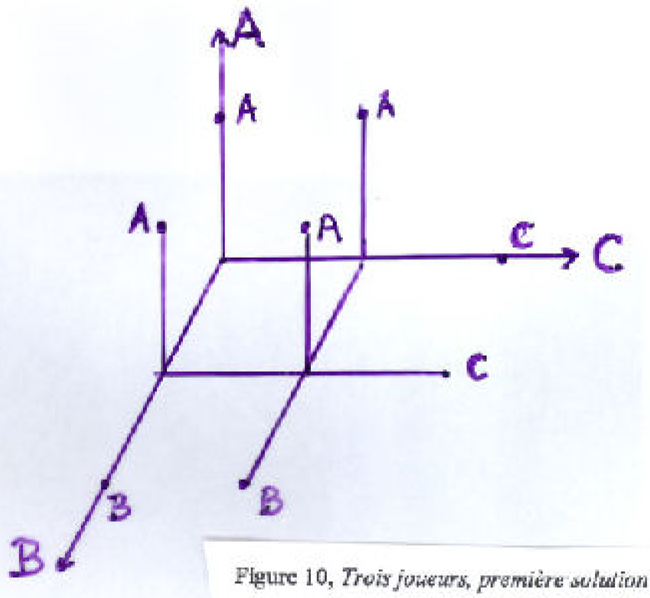

Figure 10, *Trois joueurs, première solution combinatoire*

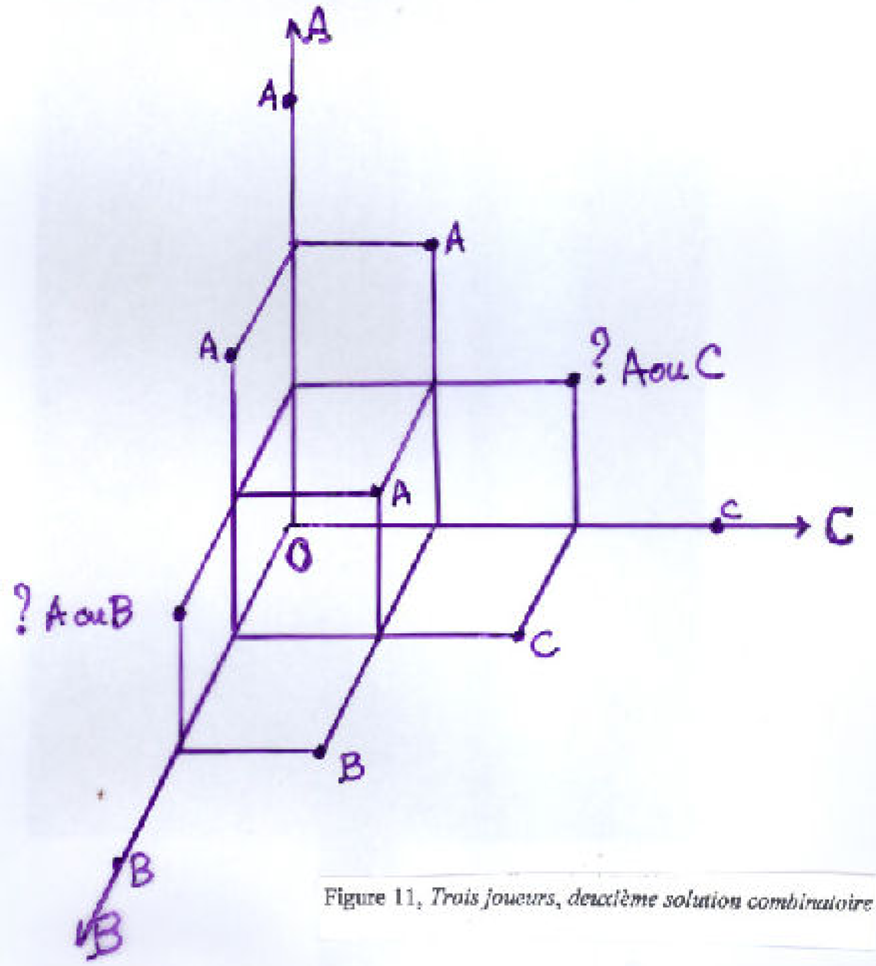

Figure 11, *Trois joueurs, deuxième solution combinatoire*

dimension 2 et les dimensions supérieures et l'étude des propriétés de *symétrie* signalées au paragraphe précédent, nous montrent ce qu'apporte la figuration de la situation et justifie a posteriori le nom de *Géométrie du hasard* choisi par Pascal pour ce que nous appelons « Calcul des probabilités ».
Dans son débat avec Fermat, Pascal prend l'exemple a=1, b=2, c=2 et calcule ce qui revient à chacun d'une mise initiale de 3x9 . Si on s'arrête de jouer dès que le nombre de coups gagnants est atteint par l'un des joueurs, il y a :

- quatre points dont la première coordonnée est 1, pour lesquels A reçoit 27, et B et C 0, ce que nous notons **{27, 0, 0}**,
- deux points dont la deuxième coordonnée est 2 pour lesquels la répartition des mises est **{0, 27, 0}**
- deux points dont la troisième coordonnée est 2 pour lesquels la répartition des mises est **{0, 0, 27}.**
- La règle de récurrence **(R)** ou la formule **(C1)** permettent d'en déduire la répartition des mises pour les quatre points (i,j,k) tels que $i \leq 0$, $j \leq 1$, $k \leq 1$: en particulier pour le point de départ (0,0,0), on obtient **{17, 5, 5}**

Cependant dans sa première lettre, Pascal pense que Fermat (qui dit seulement avoir employé les combinaisons) a utilisé la deuxième solution combinatoire qui tend deux embûches au calculateur pour le point (1,2,0) (et symétriquement pour le point (1,0,2)) : 3 trajectoires sur 27 aboutissent à ce point qui semble donner la victoire à la fois à A et à B ; on a alors le choix entre deux « partis » :

- associer à ce point une victoire pour A et une pour B ce qui conduit au parti :**{19, 7, 7}** qui ne convient pas puisque l'enjeu est de 27 et non de 33
- partager **en deux** entre A et B la part 3 de l'enjeu qui revient à ce point, ce qui conduit au parti **{16, 5.5, 5.5}** .

En listant toutes les trajectoires, Pascal montre que sur les 3 , 2 donnent la victoire à A et une seule à B, d'ou le parti exact : **{17, 5, 5}** .

Le schéma de calcul introduit par Pascal peut être considéré comme l'ancêtre des schémas numériques développés depuis 50 ans pour trouver des solutions approchées de problèmes aux dérivées partielles ; [4] montre comment on peut y voir aussi le germe des *mathématiques financières*, si à la mode aujourd'hui .

Références

[1] Groupe IREM Epistémologie et Histoire *Mathématiques au fil des ages,* Gauthier-Villars – Bordas, 1987
[2] E. Barbin et J.P. Lamarche (coordonnateurs) : *Histoire de probabilités et de statistiques*, *actes d'un colloque de la commission inter-IREM d'épistémologie , Orléans mai 2002,* Ellipses, août 2004
[3] E. Coumet : *le problème des partis avant Pascal,* Archives internationales d'histoire des sciences, juillet 1965, p. 245-272
[4] Y. Derriennic : *Pascal et les problèmes du chevalier de Méré,* Gazette des mathématiciens, n° 97, p. 45-71