À propos de l'article de Gérard Lopez « Voulez-vous des triplets ? »

Richard Choulet

Le résultat principal : (trouvé ? retrouvé ? à vrai dire je n'en sais rien. Ce qu'il y a de sûr, c'est que je ne l'ai pas vu avant d'écrire cette note.)
Pour tous entiers a, b, X et Y , le triplet (x ; y ; z), où x, y et z sont données par les formules suivantes est un triplet pythagoricien.

$$x = (a^2 + 2ab)X^2 + (2a^2 + 4ab + 2b^2)XY + (2ab + 3b^2)Y^2,$$
$$y = 2(ab + b^2)X^2 + 2(a^2 + 3ab + 3b^2)XY + 2(a^2 + 3ab + 2b^2)Y^2,$$
$$z = (a^2 + 2ab + 2b^2)X^2 + (2a^2 + 8ab + 6b^2)XY + (2a^2 + 6ab + 5b^2)Y^2.$$

D'où vient l'idée ?
Dans l'article de Gérard Lopez, on découvre que le quadruplet de nombres de FIBONACCI consécutifs (F_n ; F_{n+1} ; F_{n+2} ; F_{n+3}) permet de construire un triplet pythagoricien (x ; y ; z) avec $x = F_n F_{n+3}$, $y = 2F_{n+1} F_{n+2}$ et $z = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$ et la suite de FIBONACCI classique pour laquelle $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (convention dans ce qui suit $F_{-1} = 1$) ainsi que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout n. Il en est de même avec les nombres de LUCAS en remplaçant F par L.
Ces deux résultats m'ont incité à regarder s'il en était ainsi avec **toute suite récurrente d'ordre deux « à la FIBONACCI »**, c'est-à-dire qui vérifie la récurrence ci-dessus (avec des valeurs initiales a et b).
Or, en gardant la notation générique de L pour une suite récurrente fibonaccienne ($L_0 = a$ et $L_1 = b$, sans oublier $F_{-1} = 1$), on a pour tout n :

$$L_n = aF_{n-1} + bF_n.$$

Un quadruplet quelconque de nombres consécutifs est alors du type :

$$(aF_{n-1} + bF_n\ ;\ aF_n + bF_{n+1}\ ;\ aF_{n+1} + bF_{n+2}\ ;\ aF_{n+2} + bF_{n+3}),$$

ou encore si l'on préfère :

$$(aF_{n-1} + bF_n\ ;\ bF_{n-1} + (a + b)F_n\ ;\ (a + b)F_{n-1} + (a + 2b)F_n\ ;$$
$$(a + 2b)F_{n-1} + (2a + 3b)F_n).$$

Le triplet (x ; y ; z) donné par :

$$x = (a^2 + 2ab)F_{n-1}^2 + (2a^2 + 4ab + 2b^2)F_{n-1}F_n + (2ab + 3b^2)F_n^2,$$
$$y = 2(ab + b^2)F_{n-1}^2 + 2(a^2 + 3ab + 3b^2)F_{n-1}F_n + 2(a^2 + 3ab + 2b^2)F_n^2,$$
$$z = (a^2 + 2ab + 2b^2)F_{n-1}^2 + (2a^2 + 8ab + 6b^2)F_{n-1}F_n + (2a^2 + 6ab + 5b^2)F_n^2$$

est un triplet pythagoricien.
En faisant le calcul de $z^2 - x^2 - y^2$, je me suis aperçu que cela revenait à établir une identité dans $\mathbb{Z}[X\ ;\ Y]$, les F_i ne jouant aucun rôle particulier, mais seulement les coefficients dirigeant F_{n-1}^2, $F_{n-1}F_n$ et F_n^2.
Je ne détaille pas ici les calculs que j'ai fait, mais tout logiciel de calcul formel se débrouille très bien dans cette tâche ingrate.