

La géométrie dans l'espace, un préalable à la géométrie plane en Grande Section de maternelle.

Mauricette Savigny et Nelly Roussignol(*)

Introduction

Cet article présente la partie mathématique d'un projet intitulé « Géométrie et Arts plastiques » conduit dans une classe de Grande Section (GS) de maternelle. Ce projet a pour objet la construction par les élèves d'objets en 3 dimensions (en 3D). Pour la partie mathématique ces objets sont construits à l'aide de formes « planes »⁽¹⁾ en plastique que l'on peut assembler par les côtés en cliquant (Polydron ®⁽²⁾) ou à l'aide de charnières (« Ateliers volumes » de Nathan ®⁽³⁾). D'autres matériaux sont utilisés en « Arts plastiques »⁽⁴⁾. Un des buts essentiels de ce projet est de contribuer à la **construction d'images mentales** de l'espace 3D, dont on sait que leur absence peut s'ériger en obstacle au collège ou au lycée. Ce projet a, de plus, fait apparaître des problématiques liées au dénombrement et à la géométrie plane.

Les photos de l'article ont été tirées du film réalisé dans la classe. Elles donnent une idée du déroulement des séances.

Des compléments à cet article sont disponibles sur le site internet de l'APMEP.

I. Intentions pédagogiques

Faire fabriquer des objets en trois dimensions développe chez les élèves :

- le plaisir de créer des objets palpables,
- le plaisir de surmonter des obstacles dus aux contraintes de la situation,
- la découverte implicite de propriétés de formes 2D.

Les contraintes liées à la situation sont de deux types :

- contraintes techniques, celles liées à l'assemblage des formes planes,
- contraintes géométriques, celles liées au fait qu'on ne puisse pas assembler n'importe quelles formes 2D pour obtenir un objet non plat, voire fermé⁽⁵⁾.

(*) mauricette.savigny@bbox.fr et nelly.roussignol@wanadoo.fr.

Mauricette Savigny est professeur des écoles ; lors de ce travail en classe Nelly Roussignol était professeur de mathématiques en IUFM.

(1) Ces formes en plastique ont évidemment une épaisseur. Elles ne sont pas planes au sens strict du terme, mais c'est quand-même ainsi que nous les nommerons.

(2) Voir « Matériel » sur site internet APMEP.

(3) Ce matériel n'est plus en vente. Pour une description voir « Matériel » sur le site APMEP.

(4) Voir « Progressions parallèles Mathématiques et Arts plastiques » sur site APMEP.

(5) Sans que cela ait été explicitement formulé les enfants ont bien compris qu'un objet était fermé lorsque tous les côtés des formes 2D étaient raccrochés à un autre ; ils n'étaient pas gênés par le fait que certaines formes planes soient trouées ou réduites à leur contour. Il y a en effet parfois des trous dans des formes 2D, ces trous facilitant la préhension.

Cette expérimentation, qui s'inscrit au niveau 0 de la classification de Van Hiele⁽⁶⁾, géométrie de la perception, nécessite de fournir suffisamment de matériel varié aux élèves, matériel partiellement élaboré par l'enseignant(e). L'expérimentation permettra la mise en place d'images mentales.

Permettre à certains élèves d'anticiper les résultats de l'expérimentation, ce qui relève d'une véritable attitude mathématique. Les images mentales jouent alors un grand rôle.

Proposer aux élèves, en parallèle au travail géométrique, des activités plastiques sur des supports équivalents, parfois dans d'autres matériaux, parfois sur de nouveaux supports⁽⁷⁾.

II. Organisation d'une séance et rôle du langage

Pour des raisons techniques (quantité de matériel par exemple), la maîtresse a choisi de travailler avec une demi-classe. L'autre demi-classe travaillait avec l'ATSEM⁽⁸⁾, le plus souvent en arts plastiques.

Les séances duraient entre trois quarts d'heure et une heure. La maîtresse proposait d'utiliser soit du matériel Polydron soit du matériel « AteliersVolumes » de Nathan. Les quatorze élèves étaient assis autour d'une grande table et piochaient leurs pièces dans un tas disposé au centre de la table selon leurs envies ou leurs besoins, ou prenaient tout simplement ce qui était devant eux.

La maîtresse organisait régulièrement des regroupements de début et/ou de fin de séances. Ce furent des moments importants de langage :

– Au début de la première séance la consigne a été : « Vous avez des formes sur la table ; voyez ce que vous pouvez en faire ». En fin de séance la maîtresse a regroupé les élèves et leur a demandé de « classer »⁽⁹⁾ puis de **décrire l'ensemble des productions**.

– Lors des autres séances la maîtresse commençait les séances par un échange oral. Il fallait **se souvenir** de ce qui avait été fait à la séance précédente, et se **poser quelques questions**. Parfois la maîtresse rendait publiques des questions que certains élèves lui avaient posées en aparté. Parfois des élèves posaient des questions ou exprimaient des envies. Ces moments ont permis d'installer du **vocabulaire**, tant basique pour les élèves dont le français n'était pas la langue maternelle, qu'élaboré sous la « pression » de certains élèves. Ils ont permis aux

(6) Voir « Connaissances utiles aux maîtres et maîtresses » sur site.

(7) Voir « Quelques exemples de productions plastiques » sur site.

(8) ATSEM : agent territorial spécialisé des écoles maternelles. Leur travail consiste en : encadrements d'ateliers, travaux manuels avec un groupe d'enfants en général pas plus de 8, préparation du goûter, aide à l'enfant (toilette, lavage des mains, soins, etc), nettoyage des salles de classe, préparation du matériel, de la peinture, etc. Leur rôle est vraiment d'assister le professeur des écoles dans toutes les étapes de la journée.

(9) Il s'agissait de mettre ensemble des objets ayant une ressemblance ; il ne s'agissait pas d'un véritable classement.

élèves de faire des **phrases complètes et correctes** car la maîtresse les reprenait et si besoin les faisait répéter. Une erreur récurrente : un enfant dit « un rectangulaire » pour « un rectangle » ; la maîtresse le reprend : « C'est une forme rectangulaire, c'est un rectangle ».

- La maîtresse a même fait trouver aux élèves que plusieurs noms de formes 2D se terminaient par « gone ».

III. Attitude de l'enseignant(e) et différenciation

Ce type de travail nécessite de se laisser porter par les réactions des enfants, d'être attentif à leur mode d'expression et de les suivre dans leur créativité. Il impose d'ajuster le cap en permanence.

Tout le long du projet les élèves répondaient à la même consigne, mais certains ont travaillé sur des objets plus compliqués que d'autres. En une séance, certains construisaient plusieurs objets alors que certains n'en construisaient qu'un. Chacun se lançait des défis à sa mesure. Les plus ambitieux nous ont épatés ! Le travail était donc différencié dans un même cadre.

Pendant les phases de travail individuel la maîtresse circulait, répondait aux questions, validait, demandait à chacun ce qu'il voulait réaliser, donnait un coup de pouce matériel (comment assembler les formes, ou comment mettre le dernier morceau qui permet de fermer l'objet) ou intellectuel (« tu pourrais essayer de ... »). C'était intense pour la maîtresse mais combien riche et stimulant. De plus, la maîtresse utilisait certains moments de l'accueil du matin pour faire terminer une étape à des élèves en retard, ou permettre à certains élèves de terminer un projet particulièrement ambitieux.

IV. Progression du travail en 3D

Voici en gros⁽¹⁰⁾ la progression mathématique suivie par les élèves de la demi-classe, dite « Groupe 1 », ayant utilisé le matériel Polydron au départ⁽¹¹⁾ : séances 1, 2, 3, 4 avec Polydron, séance 5 avec « Ateliers volumes Nathan », séances 6, 7, 8, 9 avec les deux matériels.

0 - Découverte libre du matériel Polydron (séance 1) (photos 0.1 à 0.3)

Créations libres d'objets plats ou non à partir des formes géométriques planes disposées sur la table, à la libre disposition des élèves.

(10) Pour davantage de détails voir « Progression mathématique détaillée » sur site.

(11) Le groupe 2 a travaillé avec le matériel Nathan aux séances 1, 2, 3, puis avec le matériel Polydron à la séance 4, puis avec les deux matériels aux séances 5, 6, 7, 8.

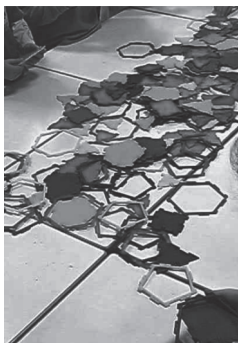


Photo 0.1

Groupe 1 Séance 1

Découverte libre du matériel Polydron

Une demi-classe est assise autour des tables rapprochées.

La maîtresse a déposé le matériel devant eux.



Photo 0.2

Groupe 1 Séance 1

Découverte libre du matériel Polydron

La maîtresse aide les deux fillettes à accrocher la dernière face du dodécagone régulier ou « ballon »



Photo 0.3

Groupe 1 Séance 1

Regroupement de fin de séance 1

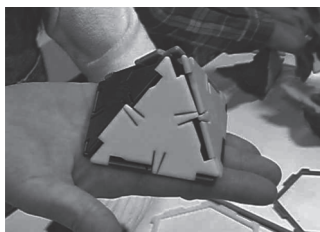
Observation des objets produits. La maîtresse a fait séparer les objets selon qu'ils sont fermés ou pas.

Fermé signifie qu'aucune arête n'est disponible à un nouvel accrochage.

Le mot « arête » n'a pas été utilisé, le mot « côté » sera utilisé.

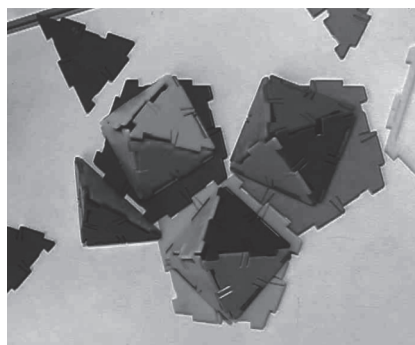
1. Créations d'objets en 3D (séance 2 et à certains moments des séances 3, 4, 5)

Consigne : « Construire des objets fermés⁽¹²⁾ » (photos 1.1 et 1.2)



Photos 1.1 et 1.2
Groupe 1 Séance 1

En fait dès la séance 1 des objets fermés avaient été obtenus. Ici des pyramides à base carrée nommées simplement pyramides



(12) Dans le sens déjà évoqué « il ne reste aucune arête libre ». La maîtresse a fait comprendre cela plutôt avec des gestes qu'avec des mots.

2 - Réalisation d'objets d'après photos (séances 3 et 4)

Consigne : « Choisissez une photo que j'ai faite à la fin de la dernière séance et reconstruisez l'objet. »

Voir photo 2.1 en partie VII « Lien entre objets 3D et représentations en 2D ».

3 - Recherches de patrons (séances 6 et 7) (photos 3.1 et 3.2) et dénombrement de formes (séance 8) (photo 3.3)

- « Déconstruisez un objet pour le mettre à plat en un seul morceau ».
- « Dessinez ce patron à partir des formes en plastique comme gabarits ».
- « Indiquez le nombre de formes nécessaires de chaque type ».
- « Redessinez ce patron à partir des gabarits en carton plus petits que j'ai préparés⁽¹³⁾ ».
- « Dénombrer chaque type de formes nécessaires pour votre patron. Pour écrire un nombre trouvé dessinez la forme dénombrée et écrivez le nombre à côté. »

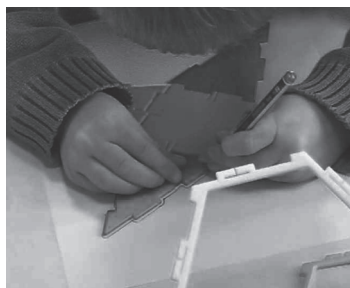


Photo 3.1
Groupe 2 Séance 5

L'élève a déplié sa pyramide à base carrée.

Il dessine le contour obtenu. Deux problèmes pour cette technique : le bord des formes en plastique n'est pas droit du fait du système de clipsage et l'élève n'aura pas accès aux séparations intérieures du patron.

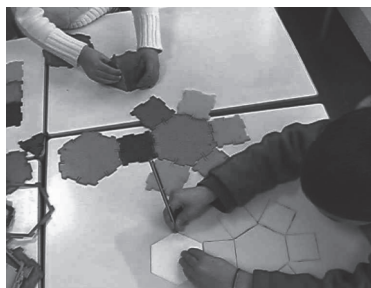


Photo 3.2
Groupe 2 Séance 5

L'élève a déplié sa boîte de forme « prisme droit à base hexagonale ». À l'aide de gabarits en carton proposés par la maîtresse il dessine le patron correspondant à ce dépliage.

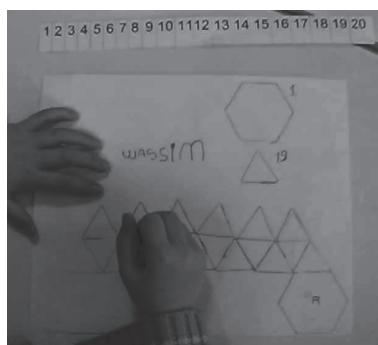


Photo 3.3
Groupe 1 Séance 8

Une élève contrôle le nombre de triangles que son voisin a trouvé sur son patron.

=> À partir de ces documents et de ses propres photos la maîtresse **compose des fiches techniques** qui serviront aux élèves à l'étape suivante « Jeu des marchand(e)s » (photos 3.4 et 3.5)

(13) Ces patrons serviront pour élaborer la fiche technique.

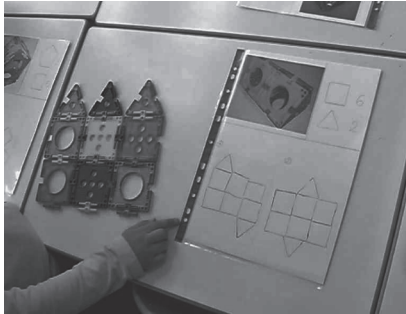


Photo 3.4 avec du matériel Nathan
Groupe 2 séance 8

Une enfant a acheté un triangle de trop et a fait deux erreurs en copiant un des deux patrons proposés.

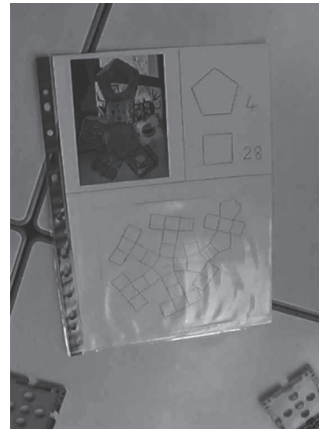


Photo 3.5 avec du matériel Nathan
Groupe 2 séance 8

Un bonhomme avec 4 pentagones et 28 carrés

4 - Utilisation des fiches techniques « Jeu des marchand(e)s » (séance 9)

« Choisissez une fiche technique. Demander aux marchand(e)s les formes nécessaires à la réalisation de l'objet représenté sur la fiche (photos 4.1 et 4.2). Puis, réalisez l'objet représenté (photo 3.4) ».



Photo 4.1
Groupe 1 Séance 9

Les enfants ont mémorisé combien de formes de chaque type il leur faut avant d'aller voir le marchand (ici des formes Nathan ®)



Photo 4.2 Groupe 2
Séance 8

« Après sept, c'est quoi ? » demande une marchande de Polydron.

Le rôle de marchand est un entraînement au comptage. Le client peut aider et parfois c'est la maîtresse qui aide.

V. Quelques problèmes que les élèves ont eu à résoudre

Problèmes spatiaux :

- Comment terminer un objet commencé au hasard ?
- Comment réaliser un modèle qu'on a dans la tête (pas de modèle physique) ? Certains élèves partent en effet d'une image mentale comme modèle.
- Comment dupliquer un objet physiquement présent ? (le plus souvent un objet réalisé par un autre élève).

– Comment disposer les dessins des formes pour réaliser un patron ? (cf photo Difficulté.1)

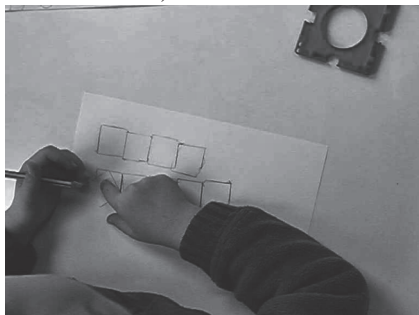


Photo Difficulté.1
Groupe 1 Séance 7

Une difficulté : penser à accoler les formes dessinées avec un gabarit.

– Comment fabriquer avec nos formes en plastique un objet qui ressemble à cet emballage de chocolat?

La réponse trouvée dans le moment de regroupement collectif de la séance 8 du groupe 1 est sur la photo ci-contre
Le patron théorique est composé de trois rectangles et deux triangles. Avec notre matériel il faudra utiliser douze carrés et deux triangles.



Problèmes techniques :

– Que faire si on n'arrive pas à assembler deux formes Polydron ? C'est parfois dû à une contrainte technique du système d'assemblage ; il est alors nécessaire de retourner une des formes. (cf photo Difficulté.2)

Photo Difficulté.2
Groupe 2 Séance 8

Cet élève a encore du mal à accrocher deux formes.
Il retournait les deux pièces simultanément.
Il fallait en retourner une seule.
Ici c'est juste une contrainte technique,
pas une contrainte géométrique
comme cela pourrait arriver.



Problèmes de langage :

– Comment décrire un objet réalisé ? Les élèves répondaient par un nom de la vie courante (maison, tente ...) ou en disant les noms des formes "planes" utilisées.
– Comment nommer les formes planes⁽¹⁴⁾ non connues des élèves ? Le mot "triangle" était connu de la majorité des élèves. Pour les formes à plus de 4 côtés les élèves proposaient régulièrement, de façon inadéquate, le mot "octogone". Il n'y avait pas d'octogone dans le matériel.

(14) Voir "Connaissances utiles aux maîtres et maîtresses - Polygones et polygones réguliers" sur site.

Quelques élèves connaissaient le mot pentagone ; ce mot a donc été utilisé, mais comme il n'était pas question de l'exiger, la maîtresse a fait compter les côtés (joli problème d'énumération), et a proposé de l'appeler un 5-côtés. Cette démarche a pu être reprise pour les hexagones; c'était tout simplement des 6-côtés. Beaucoup d'élèves aimaient utiliser les mots compliqués "pentagone" et "hexagone". En cas d'erreur il y en avait toujours un(e) pour la signaler.

Problèmes liés aux nombres : voir partie VI ci-après

VI. Rôle de l'énumération lors de certains dénombrements et aussi lecture et écriture des nombres.

Une méthode de dénombrement consiste à **énumérer** les objets et, simultanément, dire les mots-nombres en respectant l'ordre de la comptine numérique. **L'énumération** est un peu invisible, c'est une **compétence spatiale**. Il s'agit de la prise en compte une fois et une seule de chaque élément de la collection à dénombrer.

Les élèves ont eu de nombreuses occasions d'utiliser des nombres lors de ce projet.

– Trouver le nombre de côtés, appelés aussi « bords », d'un polygone. La difficulté essentielle était de repérer le premier côté comptabilisé pour ne pas le recompter, ou pour ne pas s'arrêter trop tôt. C'est une compétence très intéressante à travailler en Grande Section de maternelle (photo Nombre.1).



Photo Nombre.1
Groupe 1 séance 9

Un élève cherche le nombre de côtés du couvercle de la boîte de «Pastilles de Vichy® » apportée par la maîtresse. C'est un 8-côtés, cette fois-ci c'est un octogone. Il n'y en avait pas dans le matériel Polydron disponible.

– Trouver le nombre de sommets, appelés pointes, d'un polygone (beaucoup moins souvent cherché que le nombre de côtés). Les enfants n'ont jamais fait remarquer que le nombre de sommets était le même que le nombre de côtés. L'enseignante n'a rien dit.

- Trouver sur le patron le nombre de formes d'un certain type utilisées pour construire un solide⁽¹⁵⁾. Certains enfants ont eu des difficultés lorsqu'il y avait beaucoup de formes disposées de manière irrégulière. En particulier les enfants travaillant sur un patron complexe du dodécaèdre régulier (12 pentagones) ont dû s'y prendre à plusieurs reprises. Ils ne trouvaient pas toujours pareil. Les premières fois, ils exploraient les formes un peu au hasard, et au fur et à mesure des essais ils arrivaient à organiser spatialement leur exploration, et du coup à trouver le nombre⁽¹⁶⁾ cherché.

- Écrire le nombre trouvé ci-dessus. Il y a eu parfois une difficulté de codage⁽¹⁷⁾.

(15) le mot « solide » désigne dans ce contexte un objet en 3 dimensions.

(16) Néanmoins nous avons trouvé intéressant de les aider à trouver un patron plus simple pour faciliter la reproduction du modèle. Voir « Analyse de moments - patron de dodécaèdre régulier » sur site.

(17) Voir « Analyse de moments - Dénombrement de formes dans un patron et codage des nombres » sur site.

- Vérifier sur les patrons de solides les nombres écrits par son voisin.
- À la dernière séance, pour un(e) "marchand(e) de formes", donner à son client la bonne quantité de formes qu'il demandait, et pour un client lire une écriture chiffrée sur sa fiche technique pour savoir dire au marchand ou à la marchande combien on veut de formes⁽¹⁸⁾.
- Partager équitablement une barre géante de Toblerone ®⁽¹⁹⁾ formée de "triangles" de chocolat. Ce partage a été fait en regroupement en classe entière.

VII. Lien entre objets en 3D et représentations en 2D

Deux types de supports ont permis de travailler ces liens : les photos et les patrons des objets.

– Lien entre objets et photos de ces objets : à la fin de la première séance la maîtresse a photographié les productions sous plusieurs angles. Lors de la séance suivante chaque élève a choisi une photo; il devait construire un objet 3D pouvant correspondre à la photo. On ne cherchait pas à reproduire les couleurs. Il s'agissait de retrouver la forme, ou tout au moins une forme possible. Une photo d'un objet correspond en fait à une vue en perspective de cet objet.



L'activité a été reprise en séance 3.

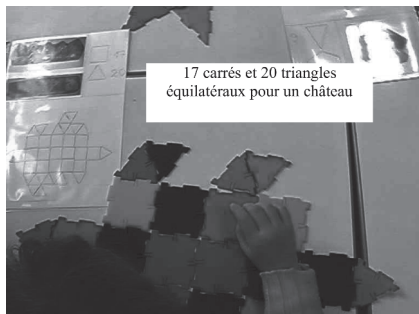
- Dessins de patrons : Un patron n'a plus rien à voir avec ce qu'on voit quand on regarde l'objet. Il faut replier le patron pour retrouver l'objet. Pour cela il faut que les formes soient dessinées avec précision, d'où l'utilisation de gabarits.
- Utilisation des patrons pour fabriquer des objets à traiter en arts plastiques : Les élèves ont créé des "paysages" dans lesquels ils ont inséré leurs productions : des pyramides dans le sable, des immeubles (en forme de parallélépipèdes rectangles) dans des jardins, ... Ils ont évidemment décoré les objets selon leurs destinations. Ils ont aussi réalisé des jardins plantés d'arbres à formes⁽²⁰⁾.
- Utilisations de fiches techniques contenant chacune au moins une photo d'un objet, un patron de l'objet, un dessin de chaque type de formes nécessaires à la construction de l'objet et le nombre nécessaire de chaque type de formes.

(18). Voir « Analyse de moments - Dénombrement de formes dans un patron et codage des nombres » sur site.

(19) La marque Toblerone ® fabrique des barres de chocolat de différentes tailles. L'emballage est le plus souvent un « prisme à base triangulaire » (ce nom n'a pas été donné aux enfants). Ces barres sont des assemblages de « triangles » de chocolat, en fait de tronçures de prismes à base triangulaire.

(20) Voir « Exemples d'activités en Arts plastiques » sur site.

Groupe 1. Séance 9

1 hexagone et 6 triangles isocèles
pour une pyramide à base hexagonale

VIII. Organiser l'observation d'objets afin d'établir leurs patrons

Par ordre de difficulté croissante cette démarche est particulièrement utile pour le dodécaèdre régulier, l'icosaèdre régulier et le « ballon de football ». Les élèves ont construit le premier et le dernier de ces solides ; on trouvera des démarches d'observation dans « Analyse de quelques moments » sur le site.

Pour présenter ici la démarche, décrivons l'icosaèdre régulier. Il a 20 faces, et les faces sont des triangles équilatéraux⁽²¹⁾.

Si l'on « pose » l'icosaèdre sur une pointe on voit :

- un fond constitué de cinq triangles équilatéraux,
- un chapeau également constitué de cinq triangles,
- entre les deux une couronne de 10 triangles, cinq étant accrochés aux triangles du fond, et cinq accrochés aux triangles du chapeau.

Organiser l'observation d'un solide peut bien entendu servir également à le reproduire.

Conclusion

La maîtresse a été étonnée de la concentration des élèves lors des séances de géométrie. Ils étaient aussi intéressés que par les arts plastiques. Ceci confirme que les élèves ne sont pas effrayés par la difficulté des tâches proposées. Quelques-uns ont même maîtrisé des projets ambitieux.

Au fur et à mesure des premières séances les élèves ont obtenu des solides (au sens ici d'objets en 3 dimensions) de dimensions et de niveaux de complexité très variables : pyramides ou tentes dont le tétraèdre régulier, prismes dits boîtes, cubes, vaisseaux, château, bonshommes, dodécaèdre régulier dit « ballon », et même un modèle de « ballon de football ». Ils ont également implicitement découvert des relations entre certaines formes.

La construction de solides géométriques en divers matériaux a développé chez les élèves tant des habiletés manuelles que des habiletés de perception en 3 dimensions.

(21) Voir une illustration sur « Connaissances utiles aux maîtres et maîtresses - Polyèdres » sur site.

Gageons que les élèves se sont ainsi constitué un bon bagage d'images mentales, mobiles qui plus est.

Rappelons que des compléments à cet article dont la présentation du matériel, la bibliographie et la sitographie sont disponibles sur le site internet de l'APMEP. On trouvera ci-dessous la liste de ces compléments.

Nous avons pu vérifier que dès la Grande Section de maternelle la géométrie dans l'espace (en 3D) est une puissante motivation pour la géométrie plane (en 2D), des questions essentielles de géométrie plane apparaissent naturellement. Par exemple « comment reconnaître un carré ? » qui est une vaste question à ce niveau⁽²²⁾.

Liste des documents complémentaires disponibles sur le site APMEP

Rappel de l'introduction de
l'article du bulletin vert

Progressions parallèles Mathématiques et Arts plastiques
Progression Mathématique détaillée

Exemples d'activités en Arts plastiques

Connaissances utiles aux maîtres et maîtresses

Polygones et polygones réguliers
Polyèdres dont prismes, pyramides et
polyèdres réguliers.
Niveaux de géométrie de Van Hiele

Matériel et
particularités avec
le matériel Nathan

Bibliographie

Sitographie

Contexte

Analyse de moments de la progression mathématique

Assemblages de triangles équilatéraux
Assemblages de carrés
Assemblage de pentagones réguliers
Assemblage d'hexagones réguliers
Octogones
"Triangone" et étymologie
Patron de dodécaèdre régulier
Ballon de football (construction et patron)
Dénombrement de formes dans un patron et
codage des nombres
Jeu du (de la) marchand(e)

Progression du travail en géométrie 2D
qui a suivi le travail en 3D

(22) On peut consulter des documents liés à l'atelier de présentation du travail en 2D aux journées APMEP Paris 2010 :

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/80_98_Savigny_Roussignol_Formes_GS.pdf

ou avec les mots APMEP carré rectangle losange à l'aide d'un moteur de recherche.