Quelles différences y a-t-il…? Exemples d'analyses didactiques d'exercices et d'activités d'élèves (en collège ou lycée)

Aline Robert

Voici trois énoncés d'exercices assez proches, à proposer en troisième après le cours sur le théorème de Thalès[1]. Quelles différences y a-t-il entre ces énoncés ?

Énoncé 1
EFG est un triangle tel que EF = 5, EG = 7, FG = 9 (l'unité est le cm). On prend un point M sur le segment [EF] et on pose EM = x.
Un point N est sur le segment [EG] et tel que les droites (MN) et (FG) sont parallèles.
1) Exprimer EN et MN en fonction de x.
2) Calculer x pour que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8.

Énoncé 2
EFG est un triangle tel que EF = 5, EG = 7, FG = 9 (l'unité est le cm). On prend un point M sur le segment [EF] et on pose EM = x.
La parallèle à (FG) passant par M coupe le segment [EG] en N.
1) Montrer que EN = 7/5 x.
2) Exprimer MN en fonction de x.
3) Exprimer MF, NG et le périmètre du trapèze MNGF en fonction de x.
4) Résoudre l'équation 3/5 x = 1,2.
5) Calculer x pour que le périmètre du trapèze soit égal à 19,8.
On commencera par faire une figure.

Énoncé 3
EFG est un triangle tel que EF = 5, EG = 7, FG = 9 (l'unité est le cm). On prend un point M sur le segment [EF] et on pose EM = x.
Un point N est sur le segment [EG] et tel que les droites (MN) et (FG) sont parallèles.
Calculer x pour que le périmètre du trapèze MNFG soit égal à 19,8.

(1) Une étude complète du premier exercice et de son déroulement effectif analysé à partir d'une vidéo est présentée dans Robert, A. (2004) : Une analyse de séance de mathématiques au collège à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants, perspectives en formation d'enseignants, *Petit x* n° 65 p. 52-79.

Nous avons conservé en 1 l'énoncé utilisé dans une « vraie » classe, pour laquelle nous disposons d'une vidéo tournée pendant la recherche de l'exercice ; les autres énoncés sont des variantes proposées par des enseignants en formation comme alternatives à partir du premier texte.

Il n'y a aucune recherche d'originalité pour ces énoncés, nous n'avons aucune prétention à donner un « bon » texte – au contraire, notre objectif est d'étudier les vertus et les inconvénients de chacun de ces énoncés.
Nous étudions ainsi l'ordinaire de la classe, en cherchant avant tout à comprendre comment se font les mélanges et les réorganisations des connaissances nouvelles et des connaissances anciennes ainsi que l'exploration des connaissances nouvelles.
Nous allons discuter ici, d'un point de vue didactique, de différences entre ces trois énoncés. Nous étudierons d'abord les activités(2) mathématiques des élèves que peuvent provoquer, a priori, ces trois exercices (activités appelées *tâches* par la suite). Nous dégagerons quelques outils qui permettent de faire ces analyses. Nous reviendrons alors sur la manière dont les trois énoncés peuvent être proposés et gérés en classe, avec des conséquences sur les activités potentielles des élèves : ces dernières correspondent davantage à la réalité que les premières analyses. Nous n'avons cependant accès encore qu'à des activités potentielles, car nous ne savons pas dans quelle mesure (tous) les élèves s'engagent dans ce que l'enseignant propose. Tout ceci nous amènera à évoquer des choix correspondants des enseignants. Nous conclurons en dégageant à quoi peuvent servir des recherches en didactique de ce type.

1. Quelles tâches mathématiques pour les élèves ? Analyse « a priori » des différences entre les trois énoncés.

Peut-on remarquer autre chose que le fait que le deuxième énoncé est plus détaillé que le premier et que le troisième l'est moins ? Dans quelle mesure les activités mathématiques des élèves sont-elles, a priori, modifiées selon les énoncés ? Les questions qui nous intéressent dans ce premier paragraphe concernent les connaissances utilisées (à utiliser) par les élèves, en référence aux cours qu'ils ont reçus et la manière dont elles sont (peuvent être) mises en œuvre par ces élèves. Ces analyses ne peuvent pas se faire indépendamment des programmes de la classe de Troisième et même des progressions suivies au cours de l'année. Nous inspirant de la classe de Troisième dans laquelle le premier énoncé a été proposé, nous supposons que le chapitre sur le théorème de Thalès vient d'être traité et que les équations du premier degré l'ont également été.

Nous allons décrire ce qu'on peut attendre du premier énoncé et le comparer ensuite aux deux autres.

(2) Ce mot n'est pas à prendre au sens restreint d'activités introductives, comme il en figure au début des chapitres des manuels : les activités des élèves font référence à ce qu'ils pensent, disent, font, ne font pas, … Il y a là un emprunt aux théories de l'activité comme fondement de la construction des connaissances.

Le degré de détail adopté dans cette analyse peut paraître superflu (voire ennuyeux !) : il est évidemment exclu qu'un enseignant réfléchisse ainsi sur chaque exercice !
Ne tenir compte d'emblée ni des élèves réels – travailler sur des élèves fictifs – ni du projet de l'enseignant est un exercice très difficile : c'est ainsi à un travail d'analyse de chercheur, en deux temps qui restent un peu *virtuels* pour un enseignant – analyse a priori, déroulement –, que nous invitons le lecteur, pour une fois, pour illustrer notre démarche et mieux valider nos résultats !

1. Le premier énoncé[(3)]

Pour le premier énoncé, il faut d'abord faire une figure, qui est proche de figures déjà utilisées dans le cours (et les exercices). Cette première étape n'est pas indiquée explicitement ; les données numériques n'excluent pas une construction en vraie grandeur et un travail de mesurage, avec évidemment alors une difficulté pour placer M[(4)]. On reconnaît là ce que Brousseau[(5)] appelle une *variable didactique*, implicite ici : si on avait donné d'autres mesures numériques, la question du tracé en vraie grandeur pourrait se poser autrement. De plus la figure n'est pas donnée tout à fait dans l'ordre de la construction : on signale que N est sur le côté [EG] avant de dire que les droites (MN) et (FG) sont parallèles, ce qui peut retarder certains élèves.

Compte tenu des programmes en vigueur, nos élèves (fictifs) ont alors à reconnaître qu'il faut utiliser le théorème de Thalès dans la figure donnée, sous une forme déjà donnée en quatrième ; ils ont cependant à l'utiliser en adaptant l'énoncé du théorème : il faut en effet remplacer la longueur EM par x. Signalons que le mot « exprimer » n'est pas encore beaucoup utilisé à ce niveau scolaire : ceci peut fonctionner comme le signal d'une adaptation ou comme une difficulté.

Nous utilisons le terme « adaptation » pour signaler que les élèves ont une transformation à faire à partir de leur cours ; il ne s'agit pas seulement de recopier la conclusion du théorème en remplaçant les données générales par leurs expressions (de même nature) issues du contexte de l'exercice. Ce sont ces adaptations que nous traquons dans les analyses a priori, dans la mesure où elles engendrent des activités mathématiques différentes : application simple et isolée si tout est indiqué et analogue, ou au contraire reconnaissance d'un théorème et/ou travail mathématique pour l'appliquer. Bien sûr ces analyses dépendent de la classe : ainsi on peut penser que le fait que les lettres de l'exercice (E, F, G, M, N) ne sont sans doute pas celles du cours, ne pose plus de problème dans une classe standard de troisième, alors que cela peut être une source de difficultés ailleurs. Nous reviendrons plus systématiquement dans le paragraphe suivant sur les catégories que nous avons retenues pour analyser les adaptations.

(3) Nous reprenons ici presque intégralement l'analyse déjà faite dans l'article cité.
(4) Certains logiciels de géométrie permettent de placer un tel point M variable.
(5) Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage.

Puis les élèves ont à faire une transformation algébrique sur des quotients qui font intervenir des nombres et des lettres, ceci deux fois de suite, de manière indépendante, en choisissant à chaque fois la « bonne » égalité : une question peut se poser pour écrire le résultat et placer x ; de plus le coefficient 7/5 qui intervient peut être ou non transformé en décimal.

Dans la deuxième question, les élèves ont à penser à exprimer le périmètre d'un trapèze, dont la définition est à retrouver (connaissance ancienne à mobiliser) ; puis ils ont à remplacer la longueur de chaque côté par son expression algébrique en utilisant les résultats précédents, avec un petit calcul supplémentaire intermédiaire puisque ce ne sont pas exactement les « bonnes » longueurs qui ont été calculées pour deux des côtés.
Enfin ils doivent mettre en forme et résoudre une équation en x du type $c = ax + b$, c'est-à-dire faire un travail purement algébrique de simplification d'une somme puis de résolution d'une équation du premier degré.
Le retour à la géométrie doit terminer la question puisqu'il faut vérifier que la solution est géométriquement acceptable : M doit être sur le segment [EF] (c'est bien vérifié). Cependant, dans la mesure où les questions d'existence sont peu (pas) proposées au collège, cette question semble d'emblée un peu hors de portée des élèves si elle n'est pas explicite.

Globalement, il n'y a pas à mélanger plusieurs notions pour résoudre cette question, c'est une utilisation isolée du seul théorème de Thalès, mais elle est suivie d'un travail algébrique consistant, avec même un retour à la géométrie à la fin. Les activités des élèves comportent ainsi des *changements de cadres* de travail, géométrique/algébrique, en reprenant l'expression de Régine Douady(6).

Les étapes sont à peu près indiquées dans l'énoncé et il n'y a pas trop de choix sur l'ordre à suivre ; il y a deux exceptions, la construction de la figure qui est à la charge des élèves (a priori) et la discussion éventuelle de la légitimité géométrique de la solution trouvée. S'il n'y a pas non plus d'indépendance complète entre les questions, il n'y a pas non plus de conjecture préalable : le travail peut commencer rapidement, malgré la légère ambiguïté sur la figure. Un unique intermédiaire à introduire par les élèves : l'expression de MF et NG pour exprimer le périmètre.
Les calculs algébriques nécessaires font intervenir des fractions non numériques dans lesquelles x intervient comme un nombre généralisé (inconnu) puis une équation du premier degré où x est l'inconnue mais qu'il faut reconnaître comme telle, en la mettant en forme puis qu'il faut résoudre alors qu'on « est en géométrie ». Il reste une ambiguïté pour les élèves sur l'utilisation de fractions ou de nombres décimaux.

(6) Les *cadres* sont des domaines de travail comme l'algébrique, le vectoriel, le graphique, le numérique, … Cf. Douady, R (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 7 n° 2.

2. Les deux autres énoncés

Si les connaissances à utiliser par les élèves sont globalement les mêmes dans les exercices 2 et 3, les adaptations demandées pour mettre en fonctionnement ces connaissances diffèrent beaucoup. Ceci implique à nos yeux des différences dans les activités mathématiques que pourront déployer les élèves, et à terme, peut-être, dans les apprentissages. Si on ne peut pas mettre en rapport un seul exercice et l'apprentissage de quelque chose, on peut supposer que ce dernier est fonction de l'ensemble des exercices proposés aux élèves. D'où l'intérêt d'analyser les caractéristiques des exercices en termes de mises en fonctionnement des connaissances : la nature de ces connaissances et la variété des adaptations nous semblent un critère important pour les apprentissages.

Dans l'énoncé 2, on a un énoncé plus découpé, plus fermé, qui sépare davantage encore le travail géométrique et le travail algébrique et minimise ce dernier ainsi que le travail sur les connaissances anciennes. Signalons que la figure est plus facile à tracer en suivant l'ordre de l'énoncé. Précisons.
Si le travail de reconnaissance et d'écriture géométrique du théorème de Thalès est inchangé, l'expression de EN peut être recopiée à partir de l'intitulé de la question 1) et de l'égalité des rapports de longueur obtenue en appliquant le théorème : le travail algébrique précis, qui correspond à une adaptation réelle du théorème de Thalès, n'a pas vraiment besoin d'être fait. On peut penser qu'une imitation peut permettre éventuellement d'échapper encore à ce travail pour la question 2), qui met en jeu des fractions analogues. Pour la troisième question, on supprime le petit calcul supplémentaire à introduire seul en demandant l'expression de MF et NG ; de plus les élèves n'ont plus à penser à exprimer le périmètre (mobilisation d'une connaissance ancienne), ils n'ont qu'à l'écrire. La question 4) se place dans le cadre algébrique seul. La question 5) ne demande plus qu'une transformation algébrique portant sur des nombres pour retrouver l'équation donnée en 4) et là encore un travail de reconnaissance a posteriori peut être imaginé.

Globalement donc, les activités des élèves vont a priori comporter moins d'initiatives : à cause du découpage préalable, ils auront à faire moins de changements de cadres au sein d'une même question ; il n'y a plus d'intermédiaire à introduire ; le travail algébrique est minoré, à la fois dans la transformation des fractions et dans l'écriture de la « fonction » périmètre ; la résolution de l'équation du premier degré demandée peut à la fois être grandement facilitée et perdre du sens dans la mesure où elle est proposée « toute arrangée » avant même que soit posé le problème qu'elle est censée modéliser. Dans cet énoncé, les élèves ont ainsi davantage que dans le premier énoncé à résoudre des questions « simples et isolées », où l'activité mathématique consiste à remplacer des données générales par des données du contexte ou à appliquer une règle.

C'est évidemment le contraire avec *l'énoncé 3* !

Les activités mathématiques commencent par la mobilisation de la connaissance sur le périmètre du trapèze : elles amènent à se rendre compte de ce qui manque et à chercher les « calculs » à faire. On retrouve donc la même utilisation du théorème de Thalès, a priori, mais plus cachée et arrivant en deuxième position. Des adaptations sont nécessaires : il faut avoir l'initiative complète des calculs intermédiaires, en introduisant les étapes données dans les énoncés précédents (expression de EN puis NF et expression de MN).

Le fait que le calcul algébrique est au centre de la question donne d'emblée le statut d'inconnue à x, le passage par l'interprétation « nombre généralisé » peut être plus implicite. Cependant on ne travaille pas encore sur une expression fonctionnelle.
Cet énoncé nous semble aussi forcer le changement de cadres géométrique/algébrique : il y a ici un *jeu de cadres*, c'est-à-dire un changement de cadres à la charge des élèves.

Reste à réfléchir à la manière dont peuvent se dérouler en classe les exercices correspondants : certes il est tentant de proposer des initiatives aux élèves mais si c'est pour qu'ils ne travaillent pas, faute de pouvoir entrer dans le problème, cela peut s'avérer moins utile que de leur donner plus d'indications et de permettre à beaucoup d'entre eux de faire au moins quelque chose !
De plus la manière dont le travail des élèves est organisé joue : l'enseignant peut choisir d'intervenir dès que les élèves sont bloqués, modifiant ainsi les activités prévues ; il peut aussi les laisser travailler seuls ou en petits groupes espérant que le temps de recherche et/ou la recherche collective faciliteront les prises d'initiative – encore faut-il que cela ne dégénère pas…
Avant d'aborder plus précisément ces questions pour nos trois énoncés, nous donnons quelques outils généraux que nous utilisons dans nos analyses a priori.

2. Des outils pour analyser les mises en fonctionnement des connaissances dans les exercices

Toutes les analyses sont relatives à un niveau scolaire donné, un programme donné, une classe donnée. Elles ont pour ambition de renseigner sur les activités potentielles des élèves, pour comparer ce qui est attendu avec ce qui se passe en classe et permettre de saisir, soit des adaptations imprévues, soit des modifications dues au déroulement. Cela renseigne donc sur les activités des élèves et en conséquence, à terme, sur leurs apprentissages.

a) Les énoncés proposés aux élèves portent sur des connaissances qui peuvent être **anciennes ou en cours d'acquisition** : c'est une première distinction à prendre en compte vis-à-vis des activités et des apprentissages qu'ils peuvent induire. Les analyses portent davantage sur les notions nouvelles que sur les anciennes.

b) De plus, ces connaissances peuvent être ou non **indiquées**, directement ou indirectement (par leur place dans un chapitre notamment) : on parle alors de fonctionnement respectivement de type **mobilisable** ou **disponible**. Et le travail des élèves n'est pas analogue selon qu'ils doivent rechercher les connaissances à utiliser, c’est-à-dire mettre en relation une propriété à démontrer et différents outils (travail du pourquoi ou du quoi) ou mettre en fonctionnement en l’adaptant une propriété (travail du comment).

c) De même, la question posée peut être **fermée** (montrer que…) ou nécessiter des conjectures, plus ou moins larges : Entre « calculer… » et « que peut-on dire de … ? », il peut y avoir encore beaucoup de différence de travail. Une question fermée sans aucune indication peut cependant ne pas être abordée immédiatement, ce qui nous intéresse en termes d’activité.
d) **Dans tous les cas**, qu’il s’agisse de connaissances anciennes ou en cours d’acquisition, et qu’elles doivent être mobilisables ou disponibles, les mises en fonctionnement peuvent varier, avec des conséquences sur les activités et les apprentissages. Un travail sur ces conséquences potentielles nous amène à distinguer des grands **types d’adaptations**.
Si le travail consiste à appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières) on parle *d’application simple et isolée* ou immédiate : est mise en jeu une seule fois une application immédiate d’une propriété donnée en cours, et d’une seule.
Dans le cas contraire, six types se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément et qui ont chacun un spectre assez large (et encore une fois relatif) :

A1. Les *reconnaissances* (partielles) *des modalités d’application* des notions, théorèmes, méthodes, formules. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations à des reconnaissances de formules, de configurations géométriques ou de conditions d’applications de théorèmes.

A2. *L’introduction d’intermédiaires* – notations, points, expressions, … : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour pouvoir utiliser le théorème de Thalès.

A3. *L‘intervention conjointe* de plusieurs cadres ou notions, …, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres ou de registres(7) (modes d’écriture), les mises en relation ou interprétations, …

A4. *L’introduction d’étapes, l’organisation* des calculs ou des raisonnements, l’utilisation répétée d’un même théorème. Les étapes peuvent être classiques (étude d’une fonction) ou à imaginer.

A5. *L’utilisation de questions précédentes* dans un problème.

A6. *L’existence de choix* – forcés (un seul convient finalement) ou non.

Ces analyses doivent être complétées, notamment par une étude de la nature des notions sur lesquelles portent les exercices.

(7) Cf. Duval, R. (1988) : Graphiques et équations : l'articulation de deux registres, *Annales de didactique et sciences cognitives Strasbourg*, vol 1, IREM de Strasbourg.

3. Les déroulements en classe : des variables qui dépendent des énoncés, des élèves et des enseignants

Tout énoncé peut être géré en classe de différentes manières, nous l'avons évoqué à la fin du premier paragraphe ; cependant les différences d'activités a priori mises en évidence dans ce premier paragraphe ont en elles-mêmes des conséquences sur les déroulements, rendant plus difficile tel ou tel choix. C'est ce que nous allons montrer maintenant, en racontant d'abord le déroulement organisé sur le premier énoncé dans la classe correspondante, avec quelques alternatives et en réfléchissant ensuite de manière comparative sur les deux autres énoncés. Nous élargirons aux choix et aux contraintes qui pèsent sur l'enseignant pour terminer le paragraphe.

1. Le déroulement pour le premier énoncé

L'analyse fine du déroulement qui a été faite[8] révèle une partie des activités potentielles des élèves ; elle suggère aussi leur diversité selon les élèves et montre des différences entre ce qui a été prévu et ce qui peut être induit de l'étude de la vidéo de la séance. En particulier, la vidéo montre beaucoup d'habitudes de cette classe, qui se traduisent par des orientations des activités des élèves, initialisées par l'enseignant, dont certaines étaient imprévisibles dans l'analyse a priori. Elle révèle d'autre part que toutes les tâches[9] prévues sont reprises et indiquées aux élèves **avant** leur exécution par tous, ce qui modifie aussi l'analyse a priori.

L'enseignant consacre 30 min à la recherche et à la correction de cet exercice : après avoir écrit le texte au tableau, il installe presque immédiatement le travail sur la première question, collectivement, pendant 6 min à peu près. Il indique ainsi de faire la figure (pas nécessairement en vraie grandeur), il fait préciser les hypothèses et la conclusion, il fait remarquer que x peut varier de 0 à 5 cm, en insistant sur le fait que M est variable. Enfin il demande les idées générales qui vont guider le travail : utilisation du théorème de Thalès, mais avec un « x ». Une courte recherche individuelle de 1 min 25 s commence ensuite, qui se conclut par la correction en 3 min de la première partie de la question (avec un élève au tableau) : l'écriture des trois égalités obtenues à partir du théorème. Une très courte recherche individuelle et une deuxième correction de 3 min (avec un élève au tableau) sont consacrées à l'écriture de EN et MN. Le travail question 2 est installé ensuite pendant 2 min 30 s : il s'agit de chercher le périmètre du trapèze et de résoudre une équation. Une recherche individuelle (2 min) est suivie d'une correction très guidée de 10 min (analogue). C'est l'enseignant qui pose la question de la légitimité de la solution … et qui la résout dans une certaine indifférence (prévue).

Ainsi, *a minima*, si un élève attend les indications de l'enseignant pour s'y mettre, il aura tracé sa figure à main levée : mais cette tâche est indiquée, et devient une activité simple et isolée ici. Il aura essayé d'utiliser « tout seul » le théorème de

(8) Cf. Robert 2004.

(9) Nous utilisons ici le mot « tâches » pour désigner les activités prévues a priori et bien les distinguer des activités potentielles.

Thalès sans avoir réfléchi à la nécessité de cette utilisation, c'est-à-dire sans l'avoir trouvé seul ; il sera rassuré à l'avance sur le fait qu'on peut « mettre » x dans les égalités correspondantes. Il aura pu recopier au tableau les égalités et surtout le calcul de EN et MN en fonction de x : il n'aura peut-être pas eu le temps de faire lui-même le calcul. Il aura donc eu accès à des activités à la fois isolées, mettant en jeu une seule connaissance mathématique récente à la fois, et isolées les unes des autres. Il aura aussi entendu de manière insistante qu'on peut utiliser x comme un nombre (nombre généralisé). Dans la deuxième question la première phase lui indiquera, qu'il ait cherché ou non, la démarche à suivre : il y a toutes les étapes sauf la dernière (validité de la solution). Puis cet élève pourra recopier au tableau la correction : de toutes façons s'il n'est pas envoyé au tableau, la phase de recherche individuelle n'est pas prise en compte.
La manière de gérer l'exercice en classe peut ainsi réserver les initiatives prévues à certains élèves et permettre à d'autres de se mettre au travail un peu plus tard, sur des tâches simples et isolées. Le travail des élèves est très vite installé, ce qui revient à lister au moins les premières sous-tâches, du coup isolées si ce n'est simples ; en fait l'enseignant transforme et complète des réponses d'élèves aux questions ouvertes qu'il pose dès le début sur ce qu'il va falloir faire. Des élèves peuvent ne pas avoir à leur charge le questionnement préalable.
Puis le temps de recherche individuelle laissé aux élèves leur permet de traiter ces sous-tâches, au moins les premières ; l'enseignant circule dans les rangs en intervenant éventuellement publiquement par des aides indirectes (par exemple : « Vous faites comme si x était un nombre »).
De plus l'enseignant rassure beaucoup les élèves, il leur laisse peu d'initiatives longues : seuls certains élèves rapides vont pouvoir réfléchir aux méthodes, sous son impulsion, avant la recherche de la question. En revanche, il laisse une certaine autonomie à tous les élèves dès que les tâches sont bien balisées.
Enfin, lorsque les plus rapides ont fini, une correction soigneuse permet de laisser dans les cahiers des élèves qui recopient le tableau un modèle de rédaction de solution. Il n'y a pas de bilan de la correction, ni de retour sur le découpage ou les méthodes utilisées, mais des remarques sur ce qui a distingué cet exercice des autres ou sur un détail de la correction.

Cet enseignant introduit de nombreux formats systématiques de travail, les mots « habitudes, habituels » sont très présents. Cela concerne aussi bien ce qui est dit et répété que les activités des élèves : faire la figure, dégager hypothèses et conclusion avant de commencer, réfléchir collectivement, avant de commencer la résolution, aux méthodes précises à mettre en œuvre. Les élèves sont aussi habitués à rédiger en insérant le théorème utilisé dans le contexte précis de l'exercice (en *contextualisant* le théorème). L'enseignant livre à chaque fois une correction modèle au tableau, même si c'est un élève qui écrit.

2. Alternatives et énoncés 2 et 3

Ces alternatives portent sur les aides apportées aux élèves par l'enseignant et sur la forme de travail adoptée. On pourrait penser à ne pas aider les élèves au démarrage : c'est-à-dire leur déléguer « l'installation » du travail, les laisser travailler seuls ou en petits groupes d'emblée pendant une dizaine de minutes. Mais cela peut renforcer les différences entre élèves. Les plus faibles, ne pouvant rien faire, risquent de décrocher ; ce qui n'est pas le cas ci-dessus.

L'énoncé 3 peut aider à une gestion favorisant l'initiative des élèves. On voit mal en effet l'enseignant guidant les élèves dès le début sur un texte aussi ouvert. Le texte même engage à un travail de débroussaillage, demandant du temps et des essais, et propice à des formes de travail où l'enseignant n'intervient pas immédiatement. Le travail en petits groupes dans certaines classes est utilisé pour mettre à profit, devant des situations de ce type, les diversités des élèves et la discussion entre eux.

En revanche, l'énoncé 2 se prête bien à une gestion « pas à pas », on peut penser que l'enseignant ne modifie pas tellement les activités prévisibles en aidant au fur et à mesure.

Ainsi selon les énoncés, tel ou tel type de gestion s'adapte plus ou moins pour renforcer les activités prévues dans les analyses a priori.

3. Choix des enseignants : contraintes et marges de manœuvre

Finalement pourquoi l'enseignant a-t-il choisi tel énoncé, tel déroulement ? Et pouvait-il faire autrement, même si pour certains élèves ne sont pas développées les mêmes activités que pour d'autres ? Nos descriptions ne tiennent compte en effet ni de l'insertion dans un temps plus long que celui de la séance, ni des objectifs de l'enseignant, ni de la classe.
Il ne faut pas négliger en effet le fait que les dynamiques d'apprentissage se développent sur un temps long. Les objectifs de l'enseignant peuvent jouer en termes de reprises, répétitions, complexification qui peuvent ne pas apparaître ici.

Grâce à un questionnaire et à un entretien informel que nous avons eu avec l'enseignant deux ans après cette séance (en revisionnant la vidéo), on peut donner quelques éléments de réponse, concernant le projet de l'enseignant, cette classe et l'insertion dans le temps long : l'enseignant reconnaît dans cette séance beaucoup d'éléments habituels, c'est une séance comme les autres, il n'envisage pas vraiment d'alternatives ; le travail en petits groupes est jugé trop risqué, sans suffisamment d'avantages, même si la classe est bonne ; l'importance des habitudes est voulue et une part des activités des élèves est supposée enclenchée par elles ; enfin la place de l'exercice analysé est précisée comme le premier élément d'un travail sur le mélange des cadres géométrique et algébrique, que l'enseignant juge crucial en troisième. Le temps à passer sur une activité est dicté par l'avancée du programme, qui doit être impérativement fini. L'enseignant est là pour aider les élèves, les rassurer, les encourager, leur laisser une certaine autonomie mais dans un cadre très balisé, de telle sorte que même les élèves les plus « fragiles » aient quelque chose à faire. Il encadre assez strictement les élèves, en établissant toujours des interactions entre eux et lui. Ainsi l'énoncé 1 correspond-il très bien à la fois à la gestion particulière choisie, ainsi qu'aux choix plus généraux de l'enseignant !

Pour rebondir sur ce constat de stabilité et de conformité des choix de l'enseignant à son projet, nous introduisons ici l'idée suivante : si les apprentissages des élèves sont conditionnés (au moins partiellement) par les choix de contenus et de déroulement de l'enseignant, *du côté du professeur le déroulement et même le choix des contenus ne dépendent pas seulement des apprentissages visés pour les élèves*. Ce déroulement est la résultante, stabilisée à partir de quelques années d'enseignement, de plusieurs composantes, dont certaines sont liées au « métier ». Ce dernier terme comprend la version, personnalisée par chaque enseignant, de l'expérience, des connaissances, des représentations des mathématiques, de leur enseignement et de l'apprentissage pour les classes concernées. Il y entre aussi les diverses pressions sociales et institutionnelles qui s'exercent sur tous les enseignants. Dans ces conditions nous suggérons que les contraintes qui pèsent sur les enseignants réduisent notablement leurs marges de manœuvre individuelles, ce qui renforce encore la tendance, naturelle à toute profession, à rechercher un équilibre respectant la cohérence individuelle.

Conclusion : À quoi peuvent servir les recherches dans lesquelles s'inscrit ce type d'analyses ?

Les analyses d'exercices telles qu'elles sont présentées ici s'inscrivent en général dans des recherches sur les pratiques des enseignants en classe et les activités des élèves.
Ainsi prend-on en compte les programmes, le scénario global dans lequel s'inscrit l'exercice 1 : dans le cas présent on commence par indiquer que la séance étudiée est la deuxième séance du cours sur le théorème de Thalès, que l'exercice 1 est le deuxième de la séance et on complète la description du chapitre correspondant, sans oublier le travail à la maison et les contrôles. Une étude des notions qui interviennent peut s'avérer utile pour comprendre les enjeux. Ainsi, le théorème de Thalès en troisième est une extension de ce qui a été vu en quatrième. Enfin le projet de l'enseignant et ses commentaires sur la classe et l'établissement sont aussi explicitement ajoutés. Dans certains travaux actuels, une étude précise des contrôles proposés aux élèves permet en outre de mettre en relation les activités en classe et les procédures des élèves.

Ceci dit, même ainsi complétée, l'approche dans laquelle s'inscrivent les analyses présentées ici est encore partielle : elle ne rend compte que des activités potentielles des élèves et ne suffit pas à expliquer leurs apprentissages. En effet bien des variables ne sont pas prises en compte, notamment toutes les composantes psychologiques, affectives, psychiques qu'il est impossible d'ignorer. De plus l'hétérogénéité des classes rend difficile des interprétations valables pour tous les élèves. Cependant nous admettons que les choix des enseignants sur les contenus abordés en classe et

les déroulements adoptés sont décisifs ; de plus ils relèvent en grande partie de choix rationnels, même si des facteurs échappent, et cela nous intéresse aussi.
Ces recherches incluant des analyses d’activités d’élèves peuvent en fait présenter à nos yeux plusieurs intérêts, pour les chercheurs, les formateurs et les enseignants.

1. Une meilleure appréhension de ce qui peut se passer en classe – perspectives

Les comparaisons entre les analyses a priori et ce qui est observable en classe sont nettement facilitées par ce type d’analyses. Notamment un certain nombre de malentendus apparaissent, qui passent inaperçus dans le feu de l’action ou même a posteriori s’il n’y a pas eu d’analyse a priori.
Ainsi, une tâche peut apparaître plus difficile que prévu, un mot se révéler ambigu ou la réalisation de la tâche ne pas mettre en fonctionnement les mathématiques attendues.
Un certain nombre de surprises attendent aussi le chercheur : l’expérience est irremplaçable et il reste toujours des inconnues dans le passage en classe. Le travail correspondant d’interprétation, d’explication est facilité par les comparaisons.
Enfin, le constat, toujours renouvelé, des différences importantes entre les activités mathématiques a priori des élèves (tâches prévues) et leurs activités potentielles a posteriori est fondamental : tout exercice ou presque peut être découpé en activités simples et isolées, bien des tâches simples et isolées peuvent être transformées en travail de recherche pour les élèves. Les activités correspondantes, qui ont toutes leur utilité, ne sont pas porteuses des mêmes apprentissages, par delà toutes les autres différences.

Des recherches en cours sont menées pour aller plus loin dans deux directions[(10)]. Il s’agit d’une part de vérifier dans quelle mesure l’ensemble des élèves d’une classe « profite » de ce qui a été organisé ou s’il se révèle des manques. Par exemple il s’agirait de répondre à la question suivante : est-ce que les habitudes, les répétitions finissent par engendrer des activités que les élèves s’approprient, qu’ils font seuls, sans indications ?
D’autre part, la question des différences entre élèves peut être abordée : en particulier, on peut se demander si les élèves qui travaillent *a minima* apprennent quelque chose de ce qui est visé et/ou quelque chose d’autre.
Bien entendu il faut être très prudent, encore une fois, à cause de l’importance du temps long sur les apprentissages. L’échelle du chapitre, choisie dans les travaux actuels de ce type, apparaît raisonnable.

2. Une meilleure connaissance des contraintes et marges de manœuvre des enseignants.

Un enseignant n’est pas « libre » une fois passé le seuil de sa classe : mais ce ne sont pas seulement les élèves qui contraignent son projet, d’autres facteurs plus subtils entrent en jeu. Là encore les didacticiens ont abordé de différentes manières ces contraintes, institutionnelles, sociales, ou encore liées à l’épistémologie même

(10) Cf. Horoks, thèse en cours.

des mathématiques qui n'autorise pas n'importe quel ordre dans la présentation d'une progression(11).

Dans nos recherches nous avons mis en évidence, et fini par admettre comme une hypothèse de base, la stabilité des pratiques individuelles, liée à la cohérence de chacun et à la complexité de l'activité enseignante. Mais nous avons aussi rencontré des régularités fortes inter-individuelles qui nous interrogent, ne serait-ce que la difficulté à transmettre certains résultats ou certaines séquences de didactique !

Nous essayons ainsi de mettre en évidence l'importance d'habitudes qui se développent collectivement, quelquefois à l'insu des acteurs, et qui sont liées à l'exercice même du métier(12) : le rejet relativement unanime du travail en petits groupes dans certains établissements par exemple peut apparaître à certains égards comme une habitude, qui n'est pas remise en question individuellement, dans la mesure où il est générateur de bruit et facteur de perte de temps, voire d'autorité, pour l'enseignant.

Un travail d'élucidation des contraintes de toutes sortes nous semble important pour estimer les marges de manœuvre réelles des enseignants et le prix à payer pour les investir éventuellement.

3. Un moyen pour aborder les formations des enseignants

Comment concevoir la formation des pratiques des enseignants de mathématiques ? Nos recherches sur les pratiques des enseignants nous amènent à des inférences sur cette formation. Nous proposons des « scénarios de formation » à partir d'analyses de vidéo de séances de classe : il s'agit de formations longues, permettant un travail simultané sur les contenus enseignés et la gestion en classe, mettant en jeu les contraintes et amenant à une réflexion sur les alternatives, grâce à des activités collectives signifiantes pour les participants(13).

Bibliographie

Robert A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 18/2, p. 139-190.

(11) Citons par exemple Coulange, L. (2001) : Enseigner les systèmes d'équations en troisième, une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 21 n° 3, p. 305-354.

(12) Voir entre autres Roditi, E. (2003) : Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherches en didactique des mathématique*s, Vol 23/2 p. 183-216.

(13) Cf. Robert A. (2005) : Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique, *Annales de didactique et sciences cognitives* Strasbourg.