BTS Groupement A1 – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2014

Exercice 1
Toutes spécialités
Partie A

1. Les bonnes réponses sont :
   (a) $\boxed{T = 2}$
   (b) $\boxed{b_1 = 0}$
   (c) $\boxed{a_0 = 0,5}$
   (d) $\boxed{a_1 = \dfrac{4}{\pi^2}}$
2. On a

$$\begin{aligned}
P_f &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{0}^{1} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t \quad \text{la fonction } f^2 \text{ est paire}\\
&= \int_{0}^{1} (1-t)^2\,\mathrm{d}t\\
&= \left[\frac{-1}{3}(1-t)^3\right]_0^1
\end{aligned}$$

   d'où $\boxed{P_f = \dfrac{1}{3}}$
3. Voir tableau 1 du document réponse 1.
   On veut que $Sn \geqslant 0,999P_f$ c'est-à-dire $S_n \geqslant 0,333$, d'où $\boxed{n \geqslant 3}$

Partie A

1. (a) Par lecture graphique, on a $\boxed{h_{\text{max}} \approx 0,975}$
   (b) Voir courbe 1 en rouge du document réponse 1.
   (c) À l'aide de la valeur approchée précédente, on obtient $\boxed{F_c \approx 4,55}$.

   (a) On lit graphiquement $\boxed{\omega \in [0;184]}$

(b) Il faut résoudre l'équation $G(\omega) = -0,1$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{-10}{\ln(10)} \ln\left[1+\left(\frac{\omega}{80\pi}\right)^{12}\right] &= -0,1\\
\ln\left[1+\left(\frac{\omega}{80\pi}\right)^{12}\right] &= 0,01\ln(10)\\
1+\left(\frac{\omega}{80\pi}\right)^{12} &= \exp(0,01\ln 10)\\
\left(\frac{\omega}{80\pi}\right)^{12} &= \exp(0,01\ln 10)-1\\
12\ln\left(\frac{\omega}{80\pi}\right) &= \ln\left(\exp(0,01\ln 10)-1\right)\\
\ln\left(\frac{\omega}{80\pi}\right) &= \frac{1}{12}\ln\left(\exp(0,01\ln 10)-1\right)\\
\frac{\omega}{80\pi} &= \exp\left[\frac{1}{12}\ln\left(\exp(0,01\ln 10)-1\right)\right]\\
\omega &= 80\pi\exp\left[\frac{1}{12}\ln\left(\exp(0,01\ln 10)-1\right)\right]
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\omega_0 \approx 183,7}$

Exercice 2
Groupement A1 : Spécialités CIRA, IRIS, Systèmes électroniques, TPIL

1. (a) On a immédiatement

$$\begin{aligned}
\frac{2}{p} - \frac{2}{p+2} &= \frac{4}{p(p+2)}\\
&= \frac{2}{p(1+0,5p)}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{S(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+2}}$

(b) Par lecture inverse du formulaire, on a $s(t) = 2\mathscr{U}(t) - 2\mathrm{e}^{-2t}\mathscr{U}(t)$ c'est-à-dire

$$\boxed{\text{Pour } t \geqslant 0, \quad s(t) = 2(1-\mathrm{e}^{-2t})}$$

(c) On complète le tableau 3 du document réponse 2.

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
F(z) &= H\left(100\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\\
&= \frac{2}{1+0,5\times 100\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}\\
&= \frac{2}{1+50\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{F(z) = \frac{2(1+z^{-1})}{51-49z^{-1}}}$

(b) On a alors $Y(z) = \frac{2(1+z^{-1})}{51-49z^{-1}}X(z)$ c'est-à-dire

$$\boxed{51Y(z) - 49z^{-1}Y(z) = 2X(z) + 2z^{-1}X(z)}$$

(c) En prenant l'originale de la relation précédente, on obtient :

$$51y(n)-49y(n-1)=2x(n)+2x(n-1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{y(n)=\frac{49}{51}y(n-1)+\frac{2}{51}x(n)+\frac{2}{51}x(n-1)}$$

3. On complète le tableau 2 du document réponse 2 à l'aide de la formule précédente.

4. (a) On a

$$\begin{aligned}\frac{2z}{z-1}-\frac{100}{51}\times\frac{z}{z-\frac{49}{51}}&=\frac{2z}{z-1}-100\frac{z}{51z-49}\\&=\frac{2z}{(z-1)(51z-49)}(51z-49-50(z-1))\\&=\frac{2z(z+1)}{(51z-49)(z-1)}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{Y(z)=\frac{2z}{z-1}-\frac{100}{51}\times\frac{z}{z-\frac{49}{51}}}$$

(b) On prend l'original de la formule précédente, et on a

$$\boxed{\text{Pour } n\geqslant 0,\quad y(n)=2e(n)-\frac{100}{51}\left(\frac{49}{51}\right)^n}$$

(c) On complète le tableau 3 de l'annexe.

Document réponse 1 à rendre avec la copie,
Toutes spécialités

n	1	2	3	4	5	6
a_n^2	$0,1643$	0	$0,0020$	0	$0,0003$	0
S_n	$0,3321$	$0,3321$	$0,3331$	$0,3331$	$0,3333$	$0,3333$

TABLE 1 – Puissances des harmoniques

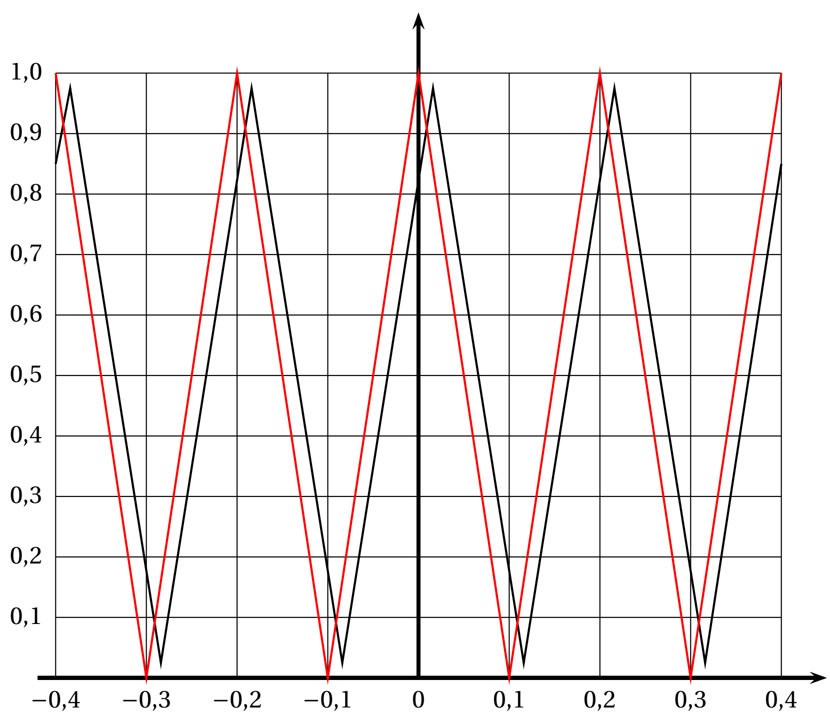

FIGURE 1 – La fonction h

Document réponse 2 à rendre avec la copie,
spécialités CIRA, IRIS, Systèmes électroniques, TPIL

n	-1	0	1	2	3
$d(n)$	0	1	0	0	0
$y(n)$	0	$0,039$	$0,077$	$0,074$	$0,071$

TABLE 2 – ici $x(n) = d(n)$

n	0	10	20	30	40	50	100	150
$y(n)$	$0,039$	$0,686$	$1,119$	$1,410$	$1,604$	$1,735$	$1,964$	$1,995$
$t = 0,02n$	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1	2	3
$s(t)$	0	$0,659$	$1,101$	$1,398$	$1,596$	$1,729$	$1,963$	$1,995$

TABLE 3 – ici $x(n) = e(n)$

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr