☙ BTS Groupement A – Mathématiques ❧

Éléments de correction

Session 2012

Exercice 1 :

Spécialités Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques – Systèmes Électroniques - Électrotechnique – Génie optique

Partie A :

1. La variable aléatoire X suit $\mathcal{N}(15\,;0,35)$ alors $T = \dfrac{X-15}{0,35}$ suit $\mathcal{N}(0\,;1)$.

   (a) La pièce est conforme si $X \in [14,3\,;15,5]$. On a donc

$$\begin{aligned} p(14,3 \leqslant X \leqslant 15,5) &= p\left(\frac{14,3-15}{0,35} \leqslant T \leqslant \frac{15,5-15}{0,35}\right) \\ &= p(-2 \leqslant T \leqslant 1,43) \\ &= \Pi(1,43) - \Pi(-2) \\ &= \Pi(1,43) - [1-\Pi(2)] \\ &= \Pi(1,43) + \Pi(2) - 1 \\ &\approx 0,90 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} p(15-h \leqslant X \leqslant 15+h) &= p\left(\frac{-h}{0,35} \leqslant T \leqslant \frac{h}{0,35}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - \Pi\left(\frac{-h}{0,35}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - \left[1-\Pi\left(\frac{h}{0,35}\right)\right] \\ &= 2\Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - 1 \end{aligned}$$

   On veut $2\Pi\left(\dfrac{h}{0,35}\right) - 1 = 0,95$ c'est-à-dire $\Pi\left(\dfrac{h}{0,35}\right) = 0,975$.
   À l'aide de la table, on a $\Pi(1,96) = 0,975$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{h}{0,35} &= 1,96 \\ h &= 1,96 \times 0,35 \\ &\boxed{h \approx 0,69} \end{aligned}$$

   (c) D'après la question précédente, on a

$$p(14,31 \leqslant X \leqslant 15,69) = 0,95$$

   c'est-à-dire que la probabilité qu'une pièce possède une épaisseur comprise entre $14,31$ et $15,69$ mm est égale à $0,95$.

2. On a maintenant $m = 14,9$.
   X suit la loi normale $\mathcal{N}(14,9\,;\sigma)$ alors $T = \dfrac{X-14,9}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}
p(14,3 \leqslant X \leqslant 15,5) &= p\left(\frac{14,3-14.9}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{15,5-14,9}{\sigma}\right)\\
&= p\left(\frac{-0,6}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{0,6}{\sigma}\right)\\
&= \Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - \Pi\left(\frac{-0,6}{\sigma}\right)\\
&= \Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - \left[1 - \Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right)\right]\\
&= 2\Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - 1
\end{aligned}$$

Il faut alors résoudre

$$2\Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - 1 = 0,9$$

c'est-à-dire

$$\Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) = 0,95$$

d'où

$$\frac{0,6}{\sigma} = 1,645$$

alors

$$\boxed{\sigma \approx 0,36}$$

Partie B :

1. Les paramètres de la loi binomiale sont $\boxed{n = 50 \quad \text{et } p = 0,1}$
2. On demande la probabilité que deux pièces soient non conformes. On demande alors de calculer $p(Y = 2)$ sachant que, pour

$$0 \leqslant k \leqslant 50, \quad p(Y = k) = \mathrm{C}_{50}^{k}\, 0,1^{k} \cdot 0,9^{50-k},$$

c'est-à-dire ici $p(Y = 2) = \mathrm{C}_{50}^{2}\, 0,1^{2} \cdot 0,9^{48}$.
On obtient

$$\boxed{p(Y = 2) = 0,08}$$

3. (a) Par approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, l'espérance est conservée. Or l'espérance d'une loi binomiale est $E(Y) = np = 50 \times 0,1 = 5$.
L'espérance d'une loi de Poisson est le paramètre λ d'où

$$\boxed{\lambda = 5}$$

(b) En appelant Z la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces non conformes suivant la loi de Poisson, on demande de calculer $p(Z \leqslant 2)$.

$$\begin{aligned}
p(Z \leqslant 2) &= p(Z = 0) + p(Z = 1) + p(Z = 2)\\
&\approx 0,007 + 0,034 + 0,084
\end{aligned}$$

$$\boxed{p(Z \leqslant 2) \approx 0,13}$$

Partie C :

1. D'après l'énoncé, nous avons :

$$\begin{aligned}
p(A) &= 0,4\\
p_A(C) &= 0,9\\
p(\bar{C}) &= 0,06
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
p(\bar{A}) &= 0,6\\
p_A(\bar{C}) &= 0,1
\end{aligned}$$

On demande

$$\begin{aligned} p(A\cap\bar{C}) &= p(A)\times p_A(\bar{C}) \\ &= 0,4\times 0,1 \\ &\boxed{p(A\cap\bar{C}) = 0,04} \end{aligned}$$

2. Le tableau est le suivant :

	C	$\bar{C}$	
A	0,36	0,04	0,4
$\bar{A}$	0,58	0,02	0,6
	0,94	0,06	1

3. On demande de calculer

$$\begin{aligned} p_C(A) &= \frac{p(A\cap C)}{p(C)} \\ &= \frac{0,36}{0,94} \\ &\boxed{p_C(A) = 0,38} \end{aligned}$$

4. On a $p(A\cap C) = 0,36$ et $p(A)\times p(C) = 0,4\times 0,94 = 0,38$, alors $p(A\cap C) \neq p(A)\times p(C)$ donc

$$\boxed{\text{les événements } A \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Exercice 1 :

Spécialité Contrôle industriel et régulation automatique

Partie A :

1. L'équation différentielle s'écrit $y'(t) + 0,5y(t) = 0$. La solution générale est alors donnée par

$$\boxed{y_0(t) = k\mathrm{e}^{-0,5t}, \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}}$$

2. On recherche une solution h constante, alors $h(t) = a$ d'où $h'(t) = 0$.
En remplaçant dans l'équation (E), on obtient immédiatement

$$\boxed{h(t) = 3}$$

3. La solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée et une solution particulière de (E)

$$\boxed{y(t) = k\mathrm{e}^{-0,5t} + 3 \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}}$$

Or on veut $s(0) = 0$ d'où $k = -3$. On a alors

$$\boxed{\text{Pour } t \in [0\,;+\infty[, \quad s(t) = 3 - 3\mathrm{e}^{-0,5t}}$$

4. (a) La fonction s est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $s'(t) = 1,5\mathrm{e}^{-0,5t} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } s \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[.}$$

(b) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5t} = 0$, alors on a

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} s(t) = 3 = \ell}$$

5. La bonne courbe est la courbe 2. Elle décrit bien une fonction vérifiant les propriétés suivantes :
   - $s(0) = 0$: ceci élimine la courbe 1 pour laquelle $s(0) = 1$.
   - la fonction s est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: ceci élimine la courbe 3 : la fonction n'est pas strictement croissante.
   - $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = 3$: ceci élimine la courbe 4 : la limite en $+\infty$ semble être 5.
6. Pour déterminer ce temps de réponse, on va résoudre l'inéquation $s(t) \geqslant 0,95 \times 3$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
3 - 3\mathrm{e}^{-0,5t} &\geqslant 3 \times 0,95\\
0,05 &\geqslant \mathrm{e}^{-0,5t}\\
\ln(0,05) &\geqslant -0,5t\\
t &\geqslant -2\ln(0,05)\\
t &\geqslant 6
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le temps de réponse du système est de 6.}}$$

Partie B :

1. Avec $T_e = 0,1$, la relation (E') s'écrit

$$\begin{aligned}
20\,(x(n+1) - x(n)) + x(n+1) &= 3\\
21x(n+1) &= 20x(n) + 3\\
x(n+1) &= \frac{20}{21}x(n) + \frac{3}{21}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{x(n+1) = \frac{20}{21}x(n) + \frac{1}{7}}$$

2. On a $x(4)=\dfrac{20}{21}x(3)+\dfrac{1}{7}$ d'où
$$\boxed{x(4)\approx 0,531}$$
De même, $x(5)=\dfrac{20}{21}x(4)+\dfrac{1}{7}$, d'où
$$\boxed{x(5)\approx 0,649}$$

3. En prenant la transformée en $\mathscr{Z}$ de l'équation obtenue à la question 1, on obtient :
$$\begin{aligned}
(\mathscr{Z}x(n+1))(z) &= \frac{20}{21}X(z)+\frac{1}{7}(\mathscr{Z}e(n))(z)\\
z[X(z)-x(0)] &= \frac{20}{21}X(z)+\frac{1}{7}\frac{z}{z-1} \quad \text{avec } x(0)=0\\
zX(z) &= \frac{20}{21}X(z)+\frac{1}{7}\frac{z}{z-1}\\
\left(z-\frac{20}{21}\right)X(z) &= \frac{1}{7}\frac{z}{z-1}
\end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{7(z-1)\left(z-\frac{20}{21}\right)}}$$

4. Par réduction au même dénominateur, on a
$$\frac{A}{z-1}-\frac{B}{z-\frac{20}{21}}=\frac{(A-B)z+\left(-\frac{20}{21}+B\right)}{(z-1)\left(z-\frac{20}{21}\right)}$$
D'où, on obtient, par identification, le système suivant
$$\begin{cases} A-B=0\\ -\dfrac{20}{21}A+B=\dfrac{1}{7}\end{cases}$$
On obtient facilement $A=B=3$, c'est-à-dire
$$\boxed{\frac{X(z)}{z}=\frac{3}{z-1}-\frac{3}{z-\frac{20}{21}}}$$

5. D'après la question précédente, on a donc $X(z)=3\left(\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-\frac{20}{21}}\right)$. En prenant la transformée inverse de ceci, on obtient
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\quad x(n)=3\left(1-\left(\frac{20}{21}\right)^n\right)}$$

6. (a) Comme $\left(\dfrac{20}{21}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{20}{21}\in\,]-1\,;1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{20}{21}\right)^n=0$, c'est-à-dire
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}x(n)=3}$$
(b) On résout l'inéquation proposée :
$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{20}{21}\right)^n &\geqslant 0,95\\
0,05 &\geqslant \left(\frac{20}{21}\right)^n\\
ln(0,05) &\geqslant n\ln\left(\frac{20}{21}\right)\\
n &\geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)} \qquad \ln\left(\frac{20}{21}\right)<0
\end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$\boxed{n\geqslant n_0=62}$$
(c) Le temps de réponse du système est alors n_0T_e, c'est-à-dire
$$\boxed{\text{Le temps de réponse du système est de } 6,2 \text{ secondes, à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

Exercice 2 :

Spécialités Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques – Systèmes Électroniques - Électrotechnique – Génie optique – Contrôle industriel et régulation automatique

Partie A :

1. (a) Voir figure 1

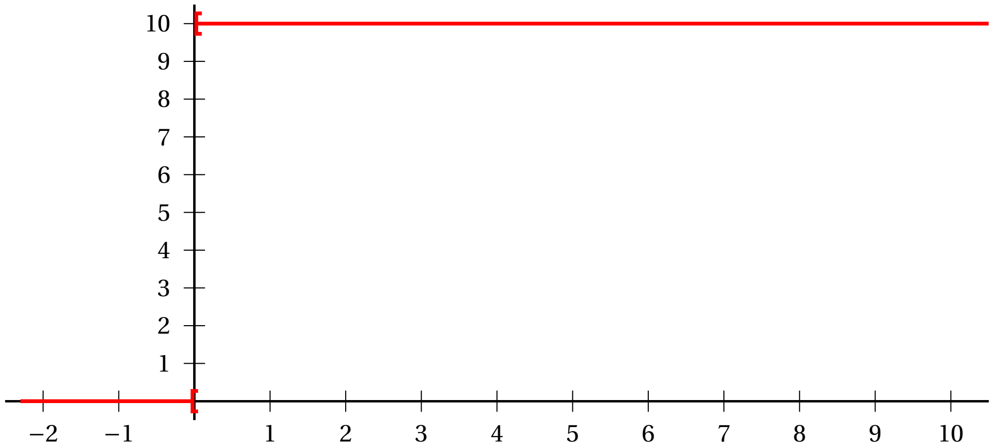

FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction e

(b) On a $\boxed{E(p)=\dfrac{10}{p}}$

2. D'après le formulaire, sachant que $v(0^+)=0$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right](p) &= pV(p)-v(0^+)\\ &= V(p)\end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle et en remplaçant, on obtient

$$\begin{aligned}RCpV(p)+V(p) &= E(p)\\ (1+RCp)V(p) &= E(p)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{V(p)=\frac{10}{p(1+RCp)}}$$

3. (a) Par réduction au même dénominateur, on a

$$\begin{aligned}\frac{10}{p}-\frac{10}{p+\frac{1}{RC}} &= \frac{10}{p\left(p+\frac{1}{RC}\right)}\times\left[p+\frac{1}{RC}-p\right]\\ &= \frac{10}{p\left(p+\frac{1}{RC}\right)}\times\frac{1}{RC}\\ &= \frac{10}{p(1+RCp)}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{V(p)=\frac{10}{p}-\frac{10}{p+\frac{1}{RC}}}$$

(b) Par lecture inverse de la table de transformée de Laplace, on obtient

$$V(t)=10\mathscr{U}(t)-10\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\mathscr{U}(t)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\text{pour } t\geqslant 0,\quad v(t)=10\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Partie B :

1. On a

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{j}C\omega\left(R+\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega} \end{aligned}$$

$$\boxed{T(\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

2. On a

$$\boxed{T(\omega_0) = \frac{1}{1+\mathrm{j}}}$$

d'où

$$\boxed{|T(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

On a aussi

$$\arg(T(\omega_0)) = -\arg(1+\mathrm{j})$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\arg(T(\omega_0)) = -\frac{\pi}{4}}$$

3. Les bonnes réponses sont :

   (a)

$$\boxed{|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

   (b)

$$\boxed{\arg(T(\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

4. En prenant $\omega = \omega_0$ dans les formules précédentes, on a bien

$$\boxed{|T(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

et

$$\boxed{\arg(T(\omega_0)) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}}$$

5. Pour $\omega = \omega_0$, le gain, en décibels, est

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{db}}(\omega_0) &= \frac{20}{\ln 10}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{-10}{\ln 10}\ln 2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{G_{\mathrm{db}}(\omega_0) = -3 \text{ dB}}$$

6. (a) On a

$$\boxed{\phi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}}$$

   (b) Voir figure 2

(c) d'où, par lecture graphique :

$$\boxed{G_{\text{db}}(\omega_0) = -3 \text{ dB}}$$

7. En appelant, ω_1 la pulsation correspondant au point M_1, on $\phi(\omega_1) < \phi(\omega_0)$.
   Sachant que la fonction ϕ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on peut en déduire que

$$\boxed{\omega_1 > \omega_0}$$

Document réponse

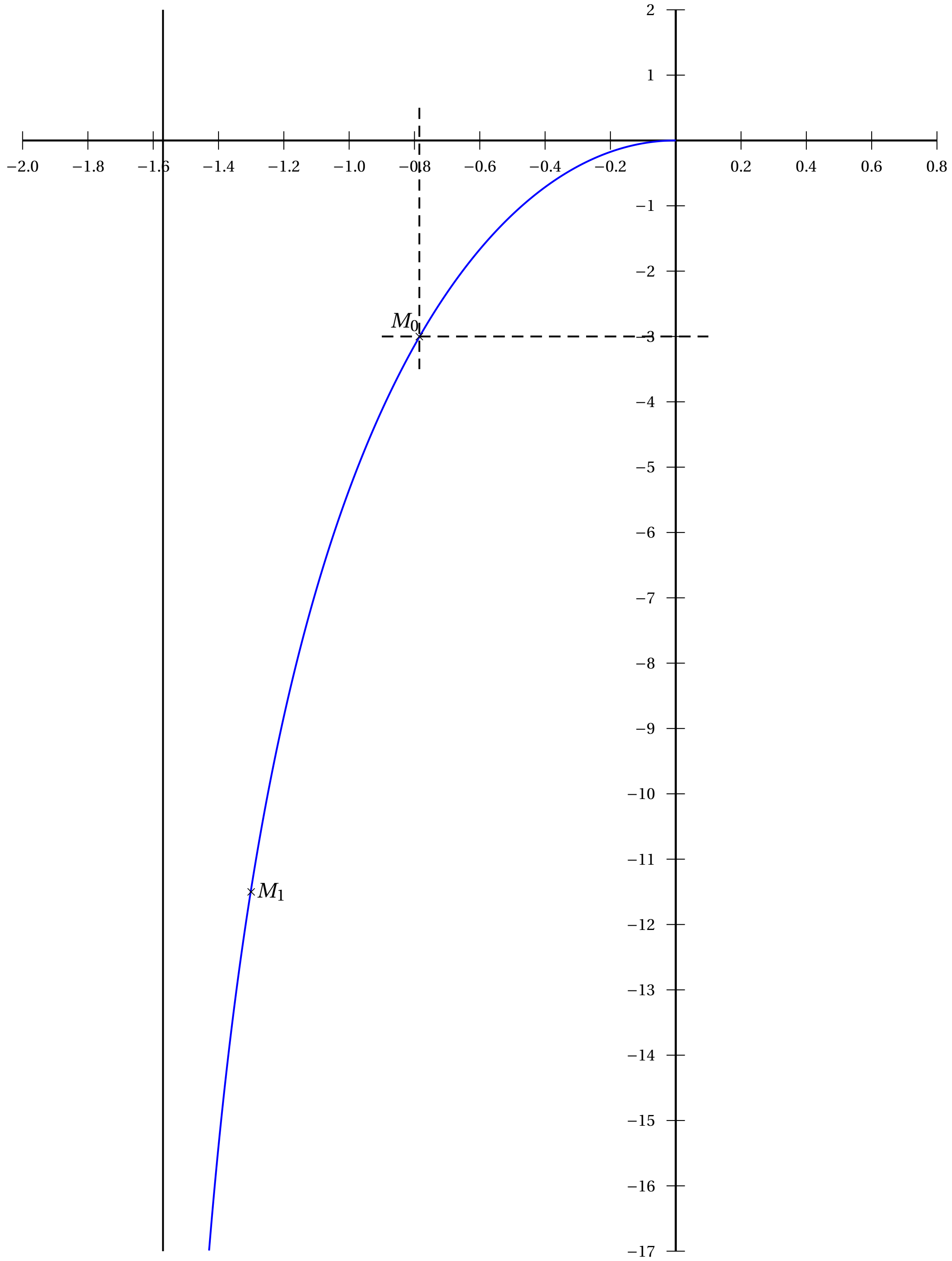

FIGURE 2 – Courbe décrite par le point $M(\omega)$

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr