Sur le Port

Mes machines à faire mal aux méninges

Richard Choulet

richardchoulet@wanadoo.fr

Journées de la Régionale de Normandie Occidentale

Mercredi 31 Mars 2010

A.P.M.E.P

Chapitre 1

Présentation : Suite construite à partir d'une autre

1.1 Introduction

Sans faire des constructions trop sophistiquées, mon idée est de présenter quelques outils qui permettent de transformer une suite donnée en une autre suite. Au passage, j'ai pu obtenir quelques formules sommatoires inédites, du moins à ma connaissance.

Auparavant, il est bon de faire quelques mises au point variées.

On connaît pour une suite donnée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des différences premières (v_n) telle que $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ pour tout n et l'on peut poursuivre. À partir de (u_n), on sait également définir la suite (v_n) telle que $v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1}$ qui permet de dégager la notion de limite au sens de Césaro.

On connaît peut-être un peu moins la transformation binomiale qui à $(u_n)_{n\geqslant 0}$, associe (v_n) pour laquelle

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k.$$

Je viens de faire connaissance récemment avec le « boustrophédon »,[1]

[1]Ce mot barbare a trait au déplacement du bœuf de labour puis, par extension, à un certain type d'écriture qui se lit en continu dans les deux sens

mais avant, êtes-vous « sec » ?

Sur « sec », en Europe latine, on est plutôt sec ; son utilisation est plus poussée dans la littérature anglo-saxonne. sec est la fonction « sécante » $x \longmapsto \frac{1}{\cos x}$.

Définissant d'abord les nombres E_n par $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{E}_n x^n}{n!} = \sec x + \tan x$ en développant en série entière, le boustrophédon associe à la suite (u_n) la suite (v_n) telle que :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{E}_{n-k} u_k.$$

1.2 Des séries entières

Donnons un exemple de l'utilisation non banale des séries entières.

Cet exercice a été donné en 1987 au Championnat de France des Jeux Mathématiques et Logiques et demandait le nombre de façons de décomposer 1888 francs (monnaie d'usage courant à l'époque) en pièces de 2, 3 et 5 francs. Ce fut réalisé seul mais avec maestria, par un de mes élèves de Terminale C en 1988. L'inconvénient est que si l'on change un tantinet la sus-dite somme, on doit tout reprendre à la base, alors que, pour à peine plus cher (quoique le prix à payer n'est pas négligeable), on peut partir de N francs et se poser le même problème. Que cherche-t-on en fait ? Le nombre $a(N)$ de triplets $(m\,;\,n\,;\,p)$ solutions de l'équation $2m + 3n + 5p = N$.

Partons de $P(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^5)}$ et cherchons le coefficient de z^N dans le développement de $P(z)$ en série entière (je rappelle que $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n$).

C'est celui de z^N dans le produit $(\sum_{m\geqslant 0} z^{2m})(\sum_{n\geqslant 0} z^{3n})(\sum_{p\geqslant 0} z^{5p})$, c'est-à-dire le nombre de triplets solutions de l'équation précédente. Que reste-t- il donc à faire ? Du calcul ! Celui de la décomposition en éléments simples de $P(z)$, qui passe par la recherche des pôles. Pas d'escroquerie, il y a de la transpiration en perpective mais n'est-il pas enthousiasmant, époustouflant, pour tout dire, beau, de trouver :

$$\boxed{a(N)=\frac{77}{360}+\frac{7(N+1)}{60}+\frac{(N+2)(N+1)}{60}+\frac{(-1)^N}{8}-\frac{2}{9}\cos\frac{2(N+2)\pi}{3}+\frac{4}{5\sqrt{5}+25}\cos\frac{2N\pi}{5}-\frac{4}{5\sqrt{5}-25}\cos\frac{4N\pi}{5}}.$$

Par commodité d'écriture, je parle ici de la notation d'Ehrhart qui veuille que l'on note par exemple $[0\,;\,1\,;\,1\,;\,0\,;\,3]$ la suite périodique définie sur $\mathbb{N}$, de période 5 et dont les premières valeurs sont listées ci-dessus. Cette suite est définie ainsi. Pour $n\equiv 0\ (5)$, $u_n=0$; pour $n\equiv 1\ (5)$, $u_n=1$; pour $n\equiv 2\ (5)$, $u_n=1$; pour $n=3\ (5)$, $u_n=0$ et enfin pour $n\equiv 4\ (5)$, $u_n=3$.

J'ai alors le résultat :

$$a(N)=\left|\left|\frac{(N+1)(N+9)}{60}+\frac{1}{5}[0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 3]\right|\right|,$$

où $||A||$ désigne l'entier le plus proche du réel A lorsque celui-ci n'est pas moitié d'entier.

Pour la petite histoire, le nombre de décompositions demandé était $a(1988)=66\ 201$.

1.3 Fonction génératrice

Je parle ici de la notion de fonction génératrice ordinaire d'une suite (u_n). C'est la fonction définie formellement par $\Psi(z)=\sum_{n\geqslant 0}u_nz^n$.

Remarque : L'autre fonction génératrice classique, dite exponentielle, est définie par $\tilde{\Psi}(z)=\sum_{n\geqslant 0}u_n\frac{z^n}{n!}$.

Envisageons la suite de Fibonacci (F_n) pour laquelle nous prenons $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout n : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Notons, comme cela a été annoncé : $\Psi(z) = \sum_{n\geqslant 0} F_n z^n$ et calculons :

$\sum_{n\geqslant 0} F_{n+2} z^{n+2} = \Psi(z) - F_0 - F_1 z$, mais aussi

$\sum_{n\geqslant 0} F_{n+2} z^{n+2} = \sum_{n\geqslant 0} (F_{n+1} + F_n) z^{n+2} = z(\Psi(z) - F_0) + z^2\Psi(z)$. J'en déduis :

$$\Psi(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Les pôles de la fraction rationnelle sont $-\Phi = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $-\tilde{\Phi} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, « Φ » le nombre d'or $\cdots)$.

En passant par la décomposition en éléments simples :

$$\Psi(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{\lambda}{\Phi + z} + \frac{\mu}{\tilde{\Phi} + z} = \frac{\lambda}{\Phi} \sum_{n\geqslant 0} \left(-\frac{z}{\Phi}\right)^n + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\Phi}} \sum_{n\geqslant 0} \left(-\frac{z}{\tilde{\Phi}}\right)^n.$$

(On simplifie le travail en remarquant que $\mu = \tilde{\lambda}$ est le « conjugué » de λ c'est-à-dire obtenu en changeant $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$).

Je trouve $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$, puis le terme général de la suite comme coefficient de z^n dans le développement en série, sous la forme

$$F_n = \frac{\lambda}{(-\Phi)^{n+1}} + \frac{\tilde{\lambda}}{(-\tilde{\Phi})^{n+1}}.$$

Avec $\Phi\tilde{\Phi} = -1$, tous calculs faits cela donne :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Chapitre 2

Les émules de Pascal

2.1 Comme on l'écrit d'habitude

Je construis le tableau suivant à partir de la suite (u_n) donnée. Les éléments de (u_n) sont écrits à la première ligne ; la première colonne n'est constituée que de u_0, et le tableau est généré comme le triangle de Pascal, ce qui fait que l'on obtient :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	$\cdots$
u_0	u_0+u_1	u_1+u_2	u_2+u_3	u_3+u_4	$\cdots$
u_0	$2u_0+u_1$	$u_0+2u_1+u_2$	$u_1+2u_2+u_3$	$u_2+2u_3+u_4$	$\cdots$
u_0	$3u_0+u_1$	$3u_0+3u_1+u_2$	$u_0+3u_1+3u_2+u_3$	$u_1+3u_2+3u_3+u_4$	$\cdots$
u_0	$4u_0+u_1$	$6u_0+4u_1+u_2$	$4u_0+6u_1+4u_2+u_3$	$u_0+4u_1+6u_2+4u_3+u_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

Tableau 1

En prenant les lignes horizontales du tableau, j'associe donc une suite à la suite donnée. Je note $\mathcal{H}$ pour horizontal.

Par exemple $\mathcal{H}^{(0)}(u) = u$ en prenant la première ligne

$\mathcal{H}^{(1)}(u) = (u_0;\ u_0+u_1\ ; u_1+u_2\ :\ u_2+u_3\ ;\ \cdots)$ en prenant la deuxième ligne,

$\mathcal{H}^{(4)}(u) = (u_0\ ;\ 4u_0+u_1\ ;\ 6u_0+4u_1+u_2\ ;\ 4u_0+6u_1+4u_2+u_3\ ;\ \cdots)$ en prenant la cinquième ligne etc.

Si l'on prend l'exemple numérique de la suite u telle que $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_n = 0$, c'est le triangle de Pascal avec ses suites horizontales finies (on n'écrit évidemment pas l'infinité de zéros) que l'on obtient.

2.1.1 Quelques exemples

$\mathcal{H}^{(1)}(1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\cdots) = (1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ \ 9\ ;\cdots)$
$\mathcal{H}^{(1)}(1\ ;\ -2\ ;\ 3\ ;\ -4\ ;\ 5\ ;\ -6\ ;\cdots)$
$= (1\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ -1\ ;\ \ 1\ ;\cdots) = [1\ ;\ -1]$
$\mathcal{H}^{(1)}([1\ ;-1]) = (1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \cdots)$
$\mathcal{H}^{(1)}(1\ ;\ 2\ ;\ -3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ -6\ ;\cdots)$
$= (1\ ;\ 3\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 9\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 15\ ;\ -1\cdots)$

Examinons plus en détails l'exemple de $u = 1$. On obtient les suites constantes à partir d'un certain rang que voici :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(1)}(1) &= (1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ \cdots)\\
\mathcal{H}^{(2)}(1) &= (1\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 4\ ;\ 4\ ;\ \cdots)\\
\mathcal{H}^{(3)}(1) &= (1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 8\ ;\ \cdots)\\
\mathcal{H}^{(4)}(1) &= (1\ ;\ 5\ ;\ 11\ ;\ 15\ ;\ 16\ ;\ 16\ ;\ \cdots).
\end{aligned}$$

Quelle est donc $\mathcal{H}^{(m)}(u)$?

Je remarque, mais cela ne fait guère avancer le calcul, que j'ai toujours :

$$\mathcal{H}^{(m)}(u) = (\underbrace{\mathcal{H}\circ\mathcal{H}\circ\cdots\mathcal{H}}_{\text{m fois}})(u),$$

où pour simplifer, j'ai posé $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)}$.

J'ai démontré dans « Mathématique et Pédagogie n° 157, pages 53 à 60 » que le terme général $[\mathcal{H}^{(m)}(1)]_n$ est

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{m+1}{n-2k}$$

avec la convention usuelle $\binom{k}{l} = 0$ pour $l > k$.

La démonstration passe par le calcul de la fonction génératrice ordinaire de la ligne numéro m, notée Θ_m, connaissant celle de la suite de départ qu'on note Θ_0 (ici $\Theta_0(z) = \dfrac{1}{1-z}$), pour laquelle on a la récurrence : $\Theta_{m+1}(z) = (1+z)\Theta_m(z)$ ce qui permet d'obtenir :

$$\Theta_m(z) = (1+z)^m\Theta_0(z).$$

Dans le cas qui m'occupe, $u = 1$, j'obtiens $\Theta_m(z) = \dfrac{(1+z)^m}{1-z}$. Je vois ainsi que pour $u = 1$ la suite $\mathcal{H}^{(m)}(u)$ est la constante 2^m à partir du rang $m+1$ puisqu'on obtient la somme de tous les coefficients du binôme soit 2^m.

La suite $\mathcal{H}^{(1)}(1)$ est nommée A040000, $\mathcal{H}^{(2)}(1)$ est A113311 et $\mathcal{H}^{(3)}(1)$ est A115291 chez Sloane. Je désigne ainsi familièrement le créateur du site `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`, chez lequel, actuellement, vous attendent plus de 172066 suites d'entiers.

Je développe symboliquement $(U_* + 1)_n^{<m>} = \sum_{k=0}^{m} U_{m,n}^{(k)} \binom{m}{k}$ en posant $U_{m,n}^{(k)} = U_{n-m+k}$ (convention : $U_l = 0$ pour $l < 0$) ce qui donne :

$$\mathcal{H}^{(m)}(u)(z) = \sum_{n \geqslant 0} (u_* + 1)_n^{<m>} z^n.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{(4)}(u)(z) = u_0 + (4u_1 + u_0)z + (6u_2 + 4u_1 + u_0)z^2 \\ &+(4u_3 + 6u_2 + 4u_1 + u_0)z^3 + (u_4 + 4u_3 + 6u_2 + 4u_1 + u_0)z^4 \\ &+(u_5 + 4u_4 + 6u_3 + 4u_2 + u_1)z^5 + \cdots . \end{aligned}$$

2.2 En chamboulant un peu

2.2.1 Le classique mue

J'écris le triangle de Pascal sous forme d'un carré :

1	1	1	1	1	$\cdots$
1	2	3	4	5	$\cdots$
1	3	6	10	15	$\cdots$
1	4	10	20	35	$\cdots$
1	5	15	35	70	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

Tableau 2

et je me dis qu'au fond, je me suis donné la première ligne, suite de 1, la première colonne répétition du premier 1 et qu'ensuite le tableau croît tout seul avec la règle de génération du type : $D_{m,n} = D_{m-1,n} + D_{m,n-1}$ sans entrer dans les détails pour l'instant.

Qu'advient-il si je prends une autre suite de départ que la suite constante 1 ?

2.2.2 Un exemple plus consistant

Je considère le tableau suivant, croissant comme le triangle de Pascal, où la ligne de départ est constituée de 1 et -1.

1	-1								
1	0	-1							
1	1	-1	-1						
1	2	0	-2	-1					
1	3	2	-2	-3	-1				
1	4	5	0	-5	-4	-1			
1	5	9	5	-5	-9	-5	-1		
1	6	14	14	0	-14	-14	-6	-1	
1	7	20	28	14	-14	-28	-20	-7	-1

Tableau 3

J'extrais de ce tableau les nombres strictement positifs en les lisant sur les diagonales descendantes que « je redresse » horizontalement. J'obtiens le tableau suivant.

1							Ligne 0
1	1						Ligne 1
1	2	2					Ligne 2
1	3	5	5				Ligne 3
1	4	9	14	14			Ligne 4
1	5	14	28	42	42		Ligne 5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$

Tableau 4

J'ai obtenu le triangle dit de Catalan. Il donne sur la diagonale principale les nombres de Catalan $(1\,;1\,;2\,;5\,;14\,;42\,;\cdots)$ (les $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ répertoriés A000108) dont la fonction génératrice f est donnée par

$$f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

J'ai démontré, mais je ne suis pas le seul, que les diagonales suivantes ont pour fonctions génératrices successives :

$$\varphi_k(z) = \left[\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}\right]^{k+1}.$$

En gros comment fait-on ? On cherche un lien (et on trouve !) entre trois fonctions génératrices consécutives :

$$z\varphi_{k+2}(z) - \varphi_{k+1}(z) + \varphi_k(z) = 0,$$

puis on résout l'équation caractéristique et on écrit que φ_k est combinaison linéaire des puissances k de ces solutions (en z !) ; les constantes (en z !) s'obtiennent avec les deux premières suites connues.

Les premières suites qu'on obtient ainsi, parallèles à la diagonale principale de ce tableau 4, sont répertoriées (la toute première qui suit est, au premier terme près mais cela change tout, la diagonale principale :

$(1\,;\,3\,;\,9\,;\,28\,;\,90\,;\,297\,;\,1001\,;\,\cdots)$ est A000245

$(1\,;\,4\,;\,14\,;\,48\,;\,165\,;\,572\,;\,2002\,;\,\cdots)$ est A002057,

$(1\,;\,5\,;\,20\,;\,75\,;\,275\,;\,1001\,;\,3640\,;\,\cdots)$ est A000344, $\cdots$

$(1\,;\,13\,;\,104\,;\,663\,;\,3705\,;\,\cdots)$ est A000590.

Examinons les fonctions génératrices des lignes et des colonnes.

En ce qui concerne les lignes, les calculs sont moins agréables qu'il n'y paraît pour la raison qu'on a, en fait, un polynôme : quand on utilise des séries génératrices, on travaille avec des suites infinies et les outils généraux fonctionnent, alors qu'ici on est obligé de faire de la découpe.

Il est sûr au niveau des fonctions génératrices des lignes, que j'ai toujours quelque chose du genre $\varphi_{k+1}(z) = \frac{\varphi_k(z)}{1-z}$. Je dis du genre car je m'arrête sur un certain degré pour faire un polynôme. Plus précisément : par récurrence φ_k est de degré k et donc φ_{k+1} est la troncature à l'ordre $k+1$ de $\frac{\varphi_k(z)}{1-z}$. En clair : je ne prends que les termes de degré inférieur à $k+1$.

Par exemple prenant $\varphi_3(z) = 1 + 3z + 5z^2 + 5z^3$, je calcule

$$(1 + 3z + 5z^2 + 5z^3) \times (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) = 1 + 4z + 9z^2 + 14z^3 + 14z^4 + \cdots$$

et je ne garde que $\varphi_4(z) = 1 + 4z + 9z^2 + 14z^3 + 14z^4$.

En ce qui concerne les colonnes, formons d'abord le calcul général liant deux fonctions génératrices θ et ϕ pour des suites u et v satisfaisant à : $v_{n+1} = v_n + u_{n+2}$ (c'est le cas pour la croissance du tableau de Catalan). J'ai le calcul :

$$\sum_{n\geqslant 0} v_{n+1} z^{n+1} = \phi(z) - v_0 = z \sum_{n\geqslant 0} v_n z^n + \frac{1}{z} \sum_{n\geqslant 0} u_{n+2} z^{n+2}$$

soit encore :

$$\phi(z) = \frac{zv_0 + \theta(z) - u_0 - u_1 z}{z(1-z)}.$$

Pour ce qui m'occupe , j'ai donc, entre deux colonnes consécutives, le lien (car $u_1 = v_0$) :

$$\phi_{k+1}(z) = \frac{\phi_k(z) - \delta_k}{z(1-z)},$$

où $\delta_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.

Je prends l'exemple de la deuxième et troisième colonne. La première a pour fonction génératrice $\phi_0(z) = \frac{1}{1-z}$. La seconde fonction génératrice est donc donnée par : $\phi_1(z) = \frac{z+\frac{1}{1-z}-1-z}{z(1-z)} = \frac{1}{(1-z)^2}$. Ensuite avec $u_0 = 1$, $u_1 = 2 = v_0$, j'ai :

$$\phi_2(z) = \frac{\frac{1}{(1-z)^2} - 1}{z(1-z)} = \frac{2-z}{(1-z)^3}.$$

Plus généralement :

$$\phi_{k+1}(z) = \frac{1}{z(1-z)}[\phi_k(z) - \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}].$$

```
> f(0):=1/(1-z):for k from 0 to 3 do f(k+1):=(f(k)-(1/(k+1))*binomial(2*k,k))/
z/(1-z):a(k):=simplify(f(k+1)):od:seq(a(k),k=0..3);
                                        2                     2      3
    1        -2 + z    5 - 6 z + 2 z   -14 + 28 z - 20 z  + 5 z
---------, ---------, --------------, ------------------------
        2          3              4                       5
(-1 + z)   (-1 + z)     (-1 + z)                (-1 + z)
```

J'ai démontré finalement que le terme général du triangle de Catalan, celui situé donc en ligne numéro n et colonne numéro k (avec $n \geqslant k > 0$) est donné par :

$$D_{n,k} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k}{k-1} = \frac{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)(n-k+1)}{k!}$$

en convenant que $D_{n,0} = 1$ pour tout n. On retrouve bien :

$$D_{n,n} = \frac{(n+2)(n+3)\cdots(n+n)(n-n+1)}{n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

2.2.3 Un exemple moins connu

Je pars de la suite [1 ; 0] avec la notation déjà citée. Cela commence par :

1	0	1	0	1	0	1	$\cdots$	A000035
1	1	2	2	3	3	4	$\cdots$	A004526
1	2	4	6	9	12	16	$\cdots$	A087811
1	3	7	13	22	34	50	$\cdots$	A002623
1	4	11	24	46	80	130	$\cdots$	A001752
1	5	16	40	86	166	296	$\cdots$	A001753
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	

Tableau 5

Je regarde les diagonales : la principale (1 ; 1 ; 4 ; 13 ; 46 ; 166 ; 610 ; 2269 ; $\cdots$) ressemble, en ce qui concerne ses premières valeurs, à A026441 qui a pour fonction génératrice f telle que :

$$f(z) = \frac{2}{3\sqrt{1-4z} - 1 + 4z}.$$

L'immédiate inférieure (1 ; 2 ; 7 ; 24 ; 86 ; 314 ; 1163 ; $\cdots$) semble être A014300, de fonction génératrice

$$f(z) = \frac{2}{(1+2z)\sqrt{1-4z} + 1 - 4z}.$$

Enhardi par ce succès peut-être éphémère, j'ai poussé plus loin les investigations. Admettant que la diagonale principale est bien A026441, *j'ai alors démontré ce résultat : la fonction génératrice de la k-ième diagonale inférieure est*

$$\varphi_k(z) = \frac{2}{3\sqrt{1-4z} - 1 + 4z}\left[\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}\right]^k.$$

Cela convient, bien sûr dès $k = 0$ ou $k = 1$.

Je vois donc que, dès que je connais la diagonale principale, j'ai toutes les autres avec ce $\left[\dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}\right]^k$. Oui, mais la diagonale principale, elle vient d'où ?

Je regarde les lignes en notant Θ_k la fonction génératrice de la ligne numéro k. Ici $\Theta_0(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$.

La construction du tableau avec la formule $D_{n,k+1} = D_{n,k} + D_{n-1,k+1}$ se répercute sur les fonctions et donne :

$$\Theta_m(z) = \frac{\Theta_{m-1}(z)}{1-z}$$

ce qui permet d'obtenir

$$\Theta_m(z) = (1-z)^{-m}\Theta_0(z) = \frac{1}{(1-z)^{m+1}(1+z)}.$$

La décomposition en éléments simples de cette fonction rationnelle :

$$\Theta_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{m-k+1}(1-z)^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}(1+z)}$$

donne explicitement le terme général de la suite.

Pour le démontrer, j'use et abuse du fait que la dérivée d'ordre p de $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$ est donnée par : $D^p(\frac{1}{1-z}) = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$.

Je peux utiliser aussi directement le développement de $(1-z)^{-(k+1)}$.

J'en déduis que :

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{k!}D^{(k)}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha \geqslant k} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)z^{\alpha-k} = \sum_{p\geqslant 0}\binom{p+k}{k}z^p$$

et donc que le terme de numéro n de la ligne numéro m est :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{m-k+1}}\binom{n+k}{k} + \frac{(-1)^n}{2^{m+1}}.$$

Par exemple avec $m = 5$ et $n = 6$ j'ai le terme correspondant :

$$\tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{2^5} \times 7 + \tfrac{1}{2^4} \times 28 + \tfrac{1}{2^3} \times \tfrac{9\times8\times7}{3\times2} + \tfrac{1}{2^2}\tfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2} = 296.$$

En particulier le terme d'indice n de la ligne numéro n (le terme d'indice n de la diagonale principale), est :

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k+1}} \binom{n+k}{k} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}. \tag{1}$$

Je prends l'exemple numérique de $n = 6$. J'obtiens :

$$\tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{7}{2^6} + \tfrac{28}{2^5} + \tfrac{1}{2^4}\tfrac{9\times8\times7}{3\times2} + \tfrac{1}{2^3}\tfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} + \tfrac{1}{2^2}\tfrac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times3\times2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2} = 610$$

Et les colonnes ?

Les lettres finissant par manquer, je vais encore noter φ_k la fonction génératrice de la colonne numéro k de sorte que $\varphi_0(z) = \dfrac{1}{1-z}$ puis que, de manière un peu moins évidente, $\varphi_1(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$.

La relation de récurrence double

$$D_{n,k} = D_{n,k-1} + D_{n-1,k}$$

qui génère le tableau fait que, suivant la parité de l'indice de colonne, on trouve deux liens sur les fonctions génératrices :

$$\varphi_{2k+1}(z) = \frac{\varphi_{2k}(z) - 1}{1-z} \text{ et } \varphi_{2k+2}(z) = \frac{\varphi_{2k+1}(z) + 1}{1-z}.$$

À partir de là, il y a un peu de calcul : j'ai écrit chaque fonction φ comme fonction rationnelle, dont le dénominateur est une puissance de $1 - z$, et j'ai cherché à évaluer les numérateurs N. J'ai obtenu :

$$N_{2k+1} = N_{2k} - (1-z)^{2k+1} z$$

« d'où » $N_{2k} = 1 - \frac{1-z}{2-z}(1 - (1-z)^{2k})$.

Puis, en reportant, je me suis aperçu que la parité n'intervient plus dans le résultat final et qu'ainsi j'ai :

$$\varphi_k(z) = \frac{1-(z-1)^{k+1}}{(2-z)(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{(2-z)(1-z)^{k+1}} - \frac{(-1)^{k+1}}{2-z}.$$

La décomposition en éléments simples est assez immédiate par division suivant les puissances croissantes et alors :

$$\varphi_k(z) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{k-\ell}}{(1-z)^{\ell+1}}.$$

Le résultat déjà cité sur la dérivation permet en conséquence d'obtenir le coefficient de numéro n de cette colonne d'indice k :

$$a_k(n) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{n+k-p}{n}.$$

Voici ce que calcule le programme MAPLE® suivant

```
> for k from 0 to 10 do for n from 0 to 20 do a(n):=sum(binomial(n+k-p,k-p)*(-1)^p,
p=0..k):od:seq(a(n),n=0..20):od;
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92, 106, 121, 137, 154, 172, 191, 211
0, 2, 6, 13, 24, 40, 62, 91, 128, 174, 230, 297, 376, 468,
 574, 695, 832, 986, 1158, 1349, 1560
1, 3, 9, 22, 46, 86, 148, 239, 367, 541, 771, 1068, 1444, 1912,
 2486, 3181, 4013, 4999, 6157, 7506, 9066
0, 3, 12, 34, 80, 166, 314, 553, 920, 1461, 2232, 3300, 4744, 6656,
 9142, 12323, 16336, 21335, 27492, 34998, 44064
1, 4, 16, 50, 130, 296, 610, 1163, 2083, 3544, 5776, 9076, 13820, 20476,
 29618, 41941, 58277, 79612, 107104, 142102, 186166
0, 4, 20, 70, 200, 496, 1106, 2269, 4352, 7896, 13672, 22748, 36568, 57044,
 86662, 128603, 186880, 266492, 373596, 515698, 701864
1, 5, 25, 95, 295, 791, 1897, 4166, 8518, 16414, 30086, 52834, 89402, 146446,
 233108, 361711, 548591, 815083, 1188679, 1704377, 2406241
0, 5, 30, 125, 420, 1211, 3108, 7274, 15792, 32206, 62292, 115126, 204528, 350974,
 584082, 945793, 1494384, 2309467, 3498146, 5202523, 7608764
1, 6, 36, 161, 581, 1792, 4900, 12174, 27966, 60172, 122464, 237590, 442118, 793092,
1377174, 2322967, 3817351, 6126818, 9624964, 14827487, 22436251
```

En particulier pour $n = k$, je trouve le terme d'indice n de la diagonale principale par la formule :

$$d_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n-p}{n}. \tag{2}$$

MORALITÉ. J'ai donc démontré cette formule pas évidente :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n-p}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k+1}} \binom{n+k}{k} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}. \tag{F}$$

Ce qui est embêtant : ceci ne correspond à aucune des formules assorties de la fonction génératrice dont j'ai parlé plus haut ! J'ai fait le développement en série entière de $\dfrac{2}{3\sqrt{1-4z}-1+4z}$ arrangé en

$$\frac{1}{2(2+z)} + \frac{3}{2(2+z)\sqrt{1-4z}} = \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{\sqrt{1-4z}} + 1\Big)\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

pour obtenir un des résultats cités (je garde la notation d_n car, même si je patauge, je suis sûr de mon coup) :

$$d_n = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n+2} + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-k} \binom{2k}{k}, \tag{3}$$

qui, vous en conviendrez, ne fait pas avancer le schmilblic ! Au passage, j'ai utilisé le résultat (et pour briller en soirée, vous pouvez le retenir) que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n.$$

Vous aurez aussi tous les atouts pour séduire avec :

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{1-2n} \binom{2n}{n} z^n$$

C'est d'autant plus joli que le nombre de Catalan d'indice n est $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ et que la fonction génératrice associée, déjà citée, est telle que $f(z) = \dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$.

Je vais interrompre ici le cours de l'émission de ma logorrhée pour, dans le cadre de l'élévation culturelle mathématique des masses, donner une démonstration subtile de mon collègue Paul Louis Hennequin, qui concerne les trois formules évoquées.

Je définis donc le polynôme

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{2n-k}{n} = \sum_{j=0}^{n} x^{n-j}\binom{n+j}{j}.$$

La partie gauche de la formule (F) est $f_n(-1)$ tandis que la partie droite est $\frac{1}{2}f_n(\frac{1}{2}) + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$. Le deal consiste donc à établir l'égalité :

$$f_n(-1) = \frac{1}{2}f_n(\frac{1}{2}) + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Pas de récurrence en tant que telle, mais un jeu sur indice et degré. Je forme

$$f_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} x^{n+1-j}\binom{n+1+j}{j} + \binom{2n+2}{n+1}.$$

Avec la convention $\binom{n+j}{-1} = 0$, on peut alors écrire :

$$f_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} x^{n+1-j}\left[\binom{n+j}{j}+\binom{n+j}{j-1}\right]+\binom{2n+1}{n+1}+\binom{2n+1}{n}$$

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) + 2\binom{2n+1}{n} + \frac{1}{x}\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-i+1}\binom{n+i+1}{i}$$

$f_{n+1}(x) = xf_n(x) + 2\binom{2n+1}{n} + \frac{1}{x}\Big[f_{n+1}(x) - x\binom{2n+1}{n} - \binom{2n+2}{n+1}\Big]$ *d'où vient :*
$(1-\frac{1}{x})f_{n+1}(x) = xf_n(x) - \binom{2n+1}{n} + 2(1-\frac{1}{x})\binom{2n+1}{n}$.

En spécialisant avec $x=-1$ *:* $f_{n+1}(-1) = -\frac{1}{2}f_n(-1) + \frac{3}{2}\binom{2n+1}{n}$ *tandis qu'avec* $x=\frac{1}{2}$ *:* $-f_{n+1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f_n(\frac{1}{2}) - 3\binom{2n+1}{n}$.

Par différence : $f_{n+1}(-1) - \frac{1}{2}f_{n+1}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Big[f_n(-1) - \frac{1}{2}f_n(\frac{1}{2})\Big]$.

Ceci ayant lieu pour tout n*, on en déduit l'expression du terme général de la suite géométrique avec* $f_0 = 1$ *:*

$$f_n(-1) - \frac{1}{2}f_n(\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}. \qquad \textit{C.Q.F.D.}$$

Quant à la formule (3), elle vient du raisonnement suivant. Avec $g_n(x) = x^{n+2} + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}\binom{2k}{k}$*, il suffit de vérifier que* $g_n(-\frac{1}{2}) = f_n(-1)$*. Là c'est une vraie récurrence, juste à mettre en forme sur la base des calculs suivants.*

$g_0(x) = x^2 + \frac{3}{4}$ *donc* $g_0(-\frac{1}{2}) = 1 = f_0(-1)$.

Comme

$$g_{n+1}(x) = x^{n+3} + \frac{3x}{4}\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}\binom{2k}{k} + \frac{3}{4}\binom{2n+2}{n+1} = xg_n(x) + \frac{3}{4}\binom{2n+2}{n+1},$$

nous avons

$$g_{n+1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}g_n(-\frac{1}{2}) + \frac{3}{4}\binom{2n+2}{n+1}$$

tandis que par ailleurs directement :

$$f_{n+1}(-1) = -\frac{1}{2}f_n(-1) + \frac{3}{4}\binom{2n+2}{n+1}.$$

J'ai lu qu'on a aussi les formules suivantes :

$$d_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k}. \tag{4}$$

$$d_n = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{2n-2j-1}{n-1} \tag{5}$$

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} \binom{k}{n-k} \tag{6}$$

$$d_n = (-\frac{1}{2})^{n+2} + \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} \binom{2k}{k} \frac{1}{(1-2k)} (1-(-\frac{1}{8})^{n-k+1}) \tag{7}$$

mais tout est à faire !

Attention à la formule (6). L'usage courant veut que $\binom{m}{p} = 0$ pour $p > m$, ce qui est le cas ici, mais il ne faut pas oublier que des usages plus théoriques font que pour tout p entier naturel et tout z complexe, l'on pose : $\binom{z}{p} = \dfrac{z(z-1)\cdots(z-p+1)}{p!}$. Il est donc prudent de faire partir le k de $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Ma (1) ou (2) est clairement (4) : dans (2) il suffit de poser $n-p=k$ et on obtient (4). L'honneur est sauf mais j'ai pris pour argent comptant les autres formules citées. Elles sont certainement vraies (depuis le temps qu'elles sont écrites, les erreurs auraient été corrigées, quoique bémol plus bas) mais on est loin de la fonction génératrice annoncée sur le site.

Pour justifier , en tout cas, que (7) correspond bien au développement de $\dfrac{2}{3\sqrt{1-4z}-1+4z}$, j'ai utilisé une autre écriture plutôt atypique de cette expression :

$$\frac{2}{3\sqrt{1-4z}-1+4z}=\frac{2(1-4z+3\sqrt{1-4z})}{9(1-4z)}+\frac{1-4z+3\sqrt{1-4z}}{18(2+z)}.$$

Je déduis le coefficient de z^n dans le développement :

$$d_n=\frac{2}{9}\Big[4^n-4^n-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}4^{n-k}\Big]+\frac{1}{36}\Big[(-\frac{1}{2})^n-4\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-k}\Big].$$

En regroupant les deux sommes dans lesquelles je mets d'autorité 4^{n-k} en facteur, je trouve bien alors :

$$d_n=(-\frac{1}{2})^{n+2}+\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}4^{n-k}\binom{2k}{k}\frac{1}{(1-2k)}(1-(-\frac{1}{8})^{n-k+1}).$$

Pour l'instant rien sur (4) et (5) vis-à-vis de (3) ou (7) ; tout au plus je m'assure que je suis sur la bonne voie avec :

```
> for n from 0 to 40 do a(n):=sum(binomial(2*n-2*j-1, n-1), j=0..floor(n/2)):od:
seq(a(n),n=0..40);
1, 1, 4, 13, 46, 166, 610, 2269, 8518, 32206, 122464, 467842, 1794196, 6903352,
26635774, 103020253, 399300166, 1550554582, 6031074184,23493410758, 91638191236,
357874310212, 1399137067684, 5475504511858, 21447950506396, 84083979575116,
329896909923520, 1295256114274324, 5088889893433168, 20006004927939196,
78695433709676470, 309723548086607581, 1219606331663639110, 4804768159680379750,
18937397026590242680, 74671009849202012734, 294548900283026578036,
1162323473110206368356, 4588303749964842831772, 18118609276916852595814,
71571101911543706048308
```

```
> for n from 0  to 40 do b(n):=sum(binomial(2*n-k, k)*binomial(k, n-k),
k=floor(n/2)..n):od:seq(b(n),n=0..40);
1, 1, 4, 13, 46, 166, 610, 2269, 8518, 32206, 122464, 467842, 1794196, 6903352,
26635774, 103020253, 399300166, 1550554582, 6031074184,23493410758, 91638191236,
357874310212, 1399137067684, 5475504511858, 21447950506396, 84083979575116,
329896909923520, 1295256114274324, 5088889893433168, 20006004927939196,
78695433709676470, 309723548086607581, 1219606331663639110, 4804768159680379750,
18937397026590242680, 74671009849202012734, 294548900283026578036,
1162323473110206368356, 4588303749964842831772, 18118609276916852595814,
71571101911543706048308
```

J'ai rectifié la formule (7), qui était grossièrement fausse telle qu'elle était livrée. MAIS il reste encore de la belle ouvrage en perspective !

Par cette autre décomposition :

$$\frac{2}{3\sqrt{1-4z}-1+4z}=\frac{2}{3\sqrt{1-4z}}+\frac{2}{9(1-\frac{\sqrt{1-4z}}{3})}=\frac{2}{3}\sum_{k\geqslant 0}\binom{2k}{k}z^k+\frac{2}{9}\sum_{k\geqslant 0}\Big(\frac{\sqrt{1-4z}}{3}\Big)^k$$

j'obtiens, après de pittoresques calculs :

$$d_n=\frac{2}{3}\binom{2n}{n}-\frac{(-2)^{n+1}}{9n!}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}(k-2p)}{3^k}, \tag{8}$$

qui n'est citée nulle part : BRAVO Choulet !

```
f(0):=1:for n from 1 to 20 do f(n):=2/3*binomial(2*n,n)+2/9*(-2)^n/n!*
sum(product(k-2*p,p=0..n-1)/3^k,k=0..infinity):od:seq(f(n),n=0..20);
1, 1, 4, 13, 46, 166, 610, 2269, 8518, 32206, 122464, 467842, 1794196, 6903352,
26635774, 103020253, 399300166, 1550554582, 6031074184, 23493410758, 91638191236
```

Finalement, toujours moyennant que c'est la bonne fonction génératrice, j'ai obtenu la relation de récurrence - cela pourrait donc être un angle d'attaque pour démontrer la coïncidence des formules - :

$$d_n=d_{n-1}+3\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2n-2k-2)(2n-2k-3)\cdots(n-k+1)}{(n-k-1)!}d_k,$$

ou si l'on préfère :

$$d_n=d_{n-1}+\frac{3}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}d_{n-k}. \tag{9}$$

Je prends l'exemple numérique de $n=5$ avec la première relation.

$$d_5=d_4+3(d_0\frac{8\times 7\times 6}{4!}+d_1\frac{6\times 5}{3!}+d_2\frac{4}{2}+d_3)=46+3\times(14+5+4\times 2+13)=46+120=166.$$

Pour ce dernier point j'ai utilisé que :

$$\frac{2}{3\sqrt{1-4z}-1+4z}=\frac{1}{1-z-\frac{3}{2}\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}z^n}$$

et que le produit de la série cherchée, par son inverse est évidemment 1.

J'ai revu ma position sur l'anodine formule (4) ! En utilisant la récurrence fondamentale des coefficients du binôme, j'ai atteint le nirvâna. En effet cela me donne une récurrence des plus sympathiques sans de grands calculs, qui est :

$$d_n=-\frac{1}{2}d_{n-1}+\frac{3}{2}\binom{2n-1}{n-1}, \tag{10}$$

(Re BRAVO) ce qui se programme avec facilité :

```
d(0):=1:d(1):=1:for n from 1 to 40 do d(n):=(3/(2))*binomial(2*n-1,n-1)-(1/2)*d(n-1):
od:seq(d(n),n=0..40);
1, 1, 4, 13, 46, 166, 610, 2269, 8518, 32206, 122464, 467842, 1794196, 6903352,
26635774, 103020253, 399300166, 1550554582, 6031074184, 23493410758,
91638191236, 357874310212, 1399137067684, 5475504511858, 21447950506396,
84083979575116, 329896909923520, 1295256114274324, 5088889893433168,
20006004927939196, 78695433709676470, 309723548086607581, 1219606331663639110,
4804768159680379750, 18937397026590242680, 74671009849202012734,
294548900283026578036, 1162323473110206368356, 4588303749964842831772,
18118609276916852595814, 71571101911543706048308.
```

Avec (10), tout se décante. Car elle donne à propos de la fonction génératrice Ψ tant espérée :

$$\Psi(z)-1=-\frac{z}{2}\Psi(z)+\frac{3}{2}\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n+1}{n}z^{n+1}$$

qui fournit

$$\Psi(z)=\frac{2+3\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n+1}{n}z^{n+1}}{2+z}$$

$$\Psi(z) = 2\frac{1 - z + \sqrt{1-4z}}{\sqrt{1-4z}(1+\sqrt{1-4z})(2+z)}, \tag{11}$$

car

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n+1}{n} z^{n+1} = \frac{2z}{\sqrt{1-4z}(1+\sqrt{1-4z})}.$$

La relation (11), arrangée avec l'expression conjuguée du numérateur donne à son tour :

$$\Psi(z) = \frac{2}{3\sqrt{1-4z} - 1 + 4z}.$$

La boucle est bouclée ; il reste toujours en l'air les formules (5) et (6).

2.3 Là ça fait mal, mais on ne lâche pas maintenant

Je reprends le tableau du 2.2.3 dans sa généralité comme suit :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	$\cdots$	Suite u
u_0	u_0+u_1	$u_0+u_1+u_2$	$u_0+u_1+u_2+u_3$	$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4$	$\cdots$	Suite $\mathcal{H}^{<1>}(u)$
u_0	$2u_0+u_1$	$3u_0+2u_1+u_2$	$4u_0+3u_1+2u_2+u_3$	$5u_0+4u_1+3u_2+2u_3+u_4$	$\cdots$	Suite $\mathcal{H}^{<2>}(u)$
u_0	$3u_0+u_1$	$6u_0+3u_1+u_2$	$10u_0+6u_1+3u_2+u_3$	$15u_0+10u_1+6u_2+3u_3+u_4$	$\cdots$	Suite $\mathcal{H}^{<3>}(u)$
u_0	$4u_0+u_1$	$10u_0+4u_1+u_2$	$20u_0+10u_1+4u_2+u_3$	$35u_0+20u_1+10u_2+9u_3+u_4$	$\cdots$	Suite $\mathcal{H}^{<4>}(u)$
u_0	$5u_0+u_1$	$15u_0+5u_1+u_2$	$35u_0+15u_1+5u_2+u_3$	$70u_0+35u_1+15u_2+10u_3+u_4$	$\cdots$	Suite $\mathcal{H}^{<5>}(u)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	

Tableau 6

Que se donne-t-on ? La suite u avec sa fonction génératrice θ_0. Qu'est-ce que je veux obtenir ? Le terme général du tableau sur la ligne de rang n et la colonne de rang k. J'aimerai pour arriver à mes fins ou pas d'ailleurs, calculer les fonctions génératrices des lignes, des diagonales et des colonnes.

2.3.1 Les lignes

Même pas mal ! Le travail a été fait précédemment, certes avec des valeurs numériques, mais de $v_{n+1} = v_n + u_{n+1}$ avec $u_0 = v_0$, vient toujours

$$\varphi_v(z) = \frac{\varphi_u(z)}{1-z}.$$

En appliquant cela à la ligne numéro n, qui correspond à la n-ième itérée de u :

$$\varphi^{<n>}(z) = \frac{\theta_0(z)}{(1-z)^n}.$$

Comme $\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{p\geqslant 0} \binom{n+p-1}{p} z^p$, je déduis, par le produit, le nombre du tableau sur la ligne numéro n et la colonne numéro k :

$$a_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell-1}{k-\ell} u_\ell.$$

L'élément de la diagonale en $(n+1)$-ème place est donc :

$$d_n = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{2n-\ell-1}{n-\ell} u_\ell.$$

2.3.2 Les diagonales

La principale

C'est par définition la fonction φ_0 définie par :

$$\varphi_0(z) = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{\ell\geqslant 0}^{n} \binom{2n-\ell-1}{n-\ell} u_\ell z^n,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\varphi_0(z) = \sum_{\ell \geqslant 0} u_l \sum_{n \geqslant \ell} \binom{2n-\ell-1}{n-\ell} z^n$$

par échange des sommes ; en redécalant l'indice :

$$\varphi_0(z) = \sum_{\ell \geqslant 0} u_l z^\ell \sum_{p \geqslant 0} \binom{2n+\ell-1}{p} z^p.$$

« Comme » : $\sum_{p \geqslant 0} \binom{2n+\ell-1}{p} z^p = \frac{2^{\ell-1}}{\sqrt{1-4z}}(1+\sqrt{1-4z})^{1-\ell}$, je déduis :

$$\varphi_0(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2\sqrt{1-4z}} \theta_0(\frac{2z}{1+\sqrt{1-4z}}).$$

Voici le calcul de la fonction génératrice dans le cas de l'exemple 2.2.3 :

```
a:=2*z/(1+sqrt(1-4*z)):simplify(1/2*(1+sqrt(1-4*z))/sqrt(1-4*z)*1/(1-a^2));
                                                  1/2 3
                            (1 + (1 - 4 z)   )
         - 1/4 --------------------------------------------
                          1/2                  1/2          2
              (1 - 4 z)    (-1 - (1 - 4 z)    + 2 z + 2 z )
> taylor(-1/4*(1+(1-4*z)^(1/2))^3/(1-4*z)^(1/2)/(-1-(1-4*z)^(1/2)+2*z+2*z^2),
z=0,20);
```

$1 + z + 4z^2 + 13z^3 + 46z^4 + 166z^5 + 610z^6 + 2269z^7 + 8518z^8 + 32206z^9 + 122464z^{10} + 467842z^{11} + 1794196z^{12} + 6903352z^{13} + 26635774z^{14} + 103020253z^{15} + 399300166z^{16} + 1550554582z^{17} + 6031074184z^{18} + 23493410758z^{19} + O(z^{20})$

Les autres diagonales

C'est une formalité maintenant : la n-ième diagonale sous la diagonale principale a donc pour fonction génératrice :

$$\varphi_n(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2\sqrt{1-4z}} \theta_0(\frac{2z}{1+\sqrt{1-4z}}) \times \left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}\right)^n.$$

2.3.3 Les colonnes

Entre deux fonctions génératrices de colonnes successives, j'ai :

$$\tilde{\phi}_n(z) - u_n = z\tilde{\phi}_n(z) + \tilde{\phi}_{n-1}(z) - u_{n-1}$$

d'où

$$\tilde{\phi}_n(z) = \frac{\tilde{\phi}_{n-1}(z) - u_{n-1} + u_n}{1-z}$$

avec $\tilde{\phi}_0(z) = \frac{1}{1-z}$. Par récurrence, j'obtiens alors :

$$\tilde{\phi}_n(z) = \frac{u_n}{1-z} + z\sum_{p=0}^{n-1} \frac{u_p}{(1-z)^{n+1-p}}.$$

Le coefficient de z^k dans le développement de cette fonction est donc :

$$[z^k](\tilde{\phi}_n(z)) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n+k-1-p}{k-1} u_p.$$

Je vois qu'à l'échange des lettres n et k près, c'est heureusement la formule trouvée ci-dessus.

2.3.4 Jouons à appliquer cela à un autre exemple docile

En effet que donnent les résultats précédents appliqués à l'exemple du tableau suivant ?

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	$\cdots$	A000034
1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	$\cdots$	A032766
1	4	8	14	21	30	40	52	65	80	$\cdots$	A006578
1	5	13	27	48	78	118	170	235	315	$\cdots$	A002717
1	6	19	46	94	172	290	460	695	1010	$\cdots$	
1	7	26	72	166	338	628	1088	1783	2793	$\cdots$	

Tableau 7

La fonction génératrice de la suite initiale est θ_0 : $\theta_0(z) = \frac{1+2z}{1+z}$.

La fonction génératrice de la diagonale principale est

$$\varphi_0(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2\sqrt{1-4z}}\theta_0(\frac{2z}{1+\sqrt{1-4z}}).$$

```
a:=2*z/(1+sqrt(1-4*z)):f(z):=(1/2*(1+sqrt(1-4*z))/sqrt(1-4*z)*((1+2*a)/(1-a^2)));
                                       1/2  /             z         \
                     (1 + (1 - 4 z)   ) |1 + 4 ----------------|
                                            |                   1/2|
                                            \     1 + (1 - 4 z)   /
       f(z) := 1/2 -------------------------------------------
                                       /              2         \
                                   1/2 |             z          |
                      (1 - 4 z)    |1 - 4 -------------------|
                                       |                   1/2 2|
                                       \     (1 + (1 - 4 z)   ) /
> taylor(f(z),z=0,10);
```

$$1 + 3z + 8z^2 + 27z^3 + 94z^4 + 338z^5 + 1238z^6 + 4595z^7 + 17222z^8 + 65034z^9 + O(z^9)$$

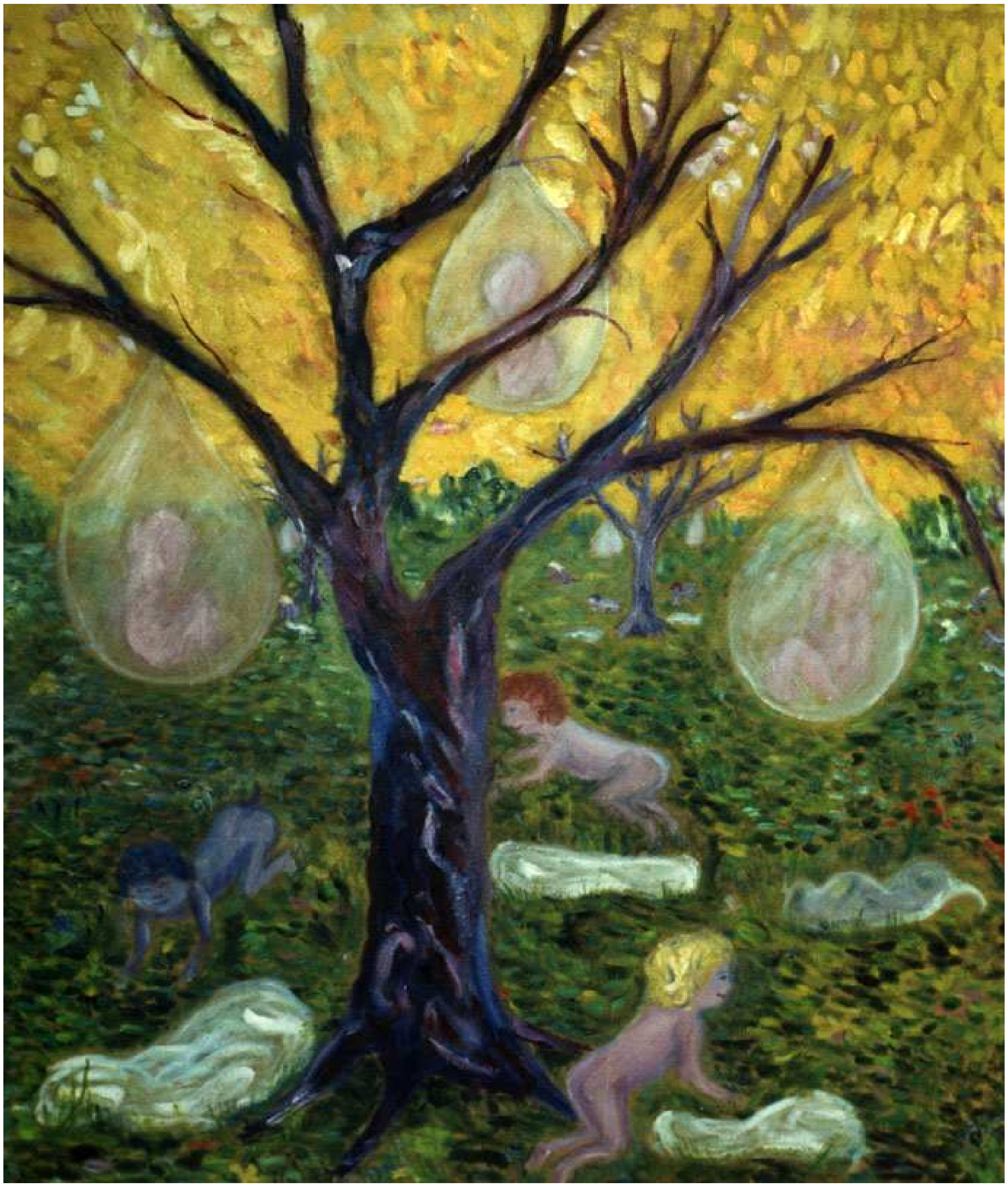
Conclusion Ô combien éphémère :

Afin de mettre en pratique toutes les bonnes choses qui viennent d'être narrées, il est proposé à votre sagacité de tirer la substantifique mœlle[1] du gentillet tableau de type « Pascal ordinaire », construit sur la suite de Fibonacci[2].

1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$
1	2	3	5	8	13	21	$\cdots$
1	3	5	8	13	21	34	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tableau 8

[1] J'entends : je voudrais proprement le terme général du tableau et, par exemple, ses diagonales.
[2] Allez du courage c'est facile : déjà ça se voit !



Arbres de Vie